

TÍTULO DE LA OBRA

CONSTRUCCIONES EN TRIÁNGULOS

(C) 2004 por ING. JOSE LUIS MEZA BARCENA

PRIMERA EDICIÓN

PUBLICADO POR

IMPECUS

SUPERVISIÓN GENERAL

ING. JOSE LUIS MEZA BARCENA

REVISIÓN GENERAL DEL MANUSCRITO

PROF. ERICH A. VILLAVICENCIO GUTIERREZ

COMPOSICIÓN, DIAGRAMACIÓN Y ARTE

DANIEL DURAN VARGAS - @DHDV - 95013748 / 2264638
Email: DanielDHDV@hotmail.com

AUSPICIADO

• COMPETITIVIDAD Revista Especializada en Negocios

COMPETITIVIDAD

• BUSINESS IMPLEMENTACIÓN ASSOCIATION (BIASSO)



• CENTRO CULTURAL AVANZADA TECNOLÓGICA
(CCAT) UNI-FIIS



PROHIBIDA LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL DE ESTA OBRA

HECHO EL DEPÓSITO LEGAL EN LA DIRECCIÓN DE DERECHOS DE
AUTOR DE INDECOPI Y AMPARADO A LA LEY N° 13714 Y AL ARTÍCULO
N° 211 DEL CÓDIGO PENAL.

Presentación

Permitanme presentarme primero como estudiante y ahora como profesional egresado de la Universidad Nacional de Ingeniería, presentando al respetable lector este sencillo aporte al conocimiento práctico de la Geometría que es el Fruto de una fructífera experiencia cotidiana en la enseñanza, de consultar e investigar sobre las ideas y la forma de la resolución de los problemas empleando trazos auxiliares, contenido que han sido discutidos por varios docentes que han participado en mi formación, han sido revaloradas, actualizadas y ensambladas para realizar esta obra.

Me he propuesto con él tres objetivos: claridad en la exposición, rigor en la explicación de los métodos y la utilidad de la imaginación y abstracción.

Precisamente, la colección de problemas resueltos detalla claramente que constituyen esta obra ha sido concebida con el objeto de llevar al estudiante a una asimilación más rápida y segura de tales métodos de lo que suele ser no posible con los textos corrientes, no se trata por cierto de una colección de problemas de adiestramiento mecánico, sino de exponer resoluciones bien detalladas que tienen precisamente por objetivo acostumbrar al que aprende a trabajar correctamente, dando todos los pasos indispensables y fundamentando todos sus operaciones y reglas graduando cuidadosamente la dificultad de los ejercicios.

Así paso por paso, el estudiante es conducido por mano firme hasta el momento que pueda resolver los problemas solo. Es el momento en que puede decirse plenamente que la técnica en particular que se estudiaba ha sido asimilada a la perfección.

Tras un atento estudio de las reglas que abre cada método, recuérdese que, como proceso de asimilación más indicado, se ha de tratar de resolver por propia cuenta lo más posible de los problemas y comparar después los resultados obtenidos con los que aparecen en la obra, y en ocasiones será muy provechoso revisar previamente los "trucos" lógicos (métodos de construcciones), por así llamarlos, que permiten muchas veces emprender la resolución de los problemas de aquellas que constituyen "El dolor de cabeza" de todo principiante. En suma, la colección de problemas que aquí se representa obedece a la clara convicción de que todo curso de matemática tiene por columna vertebral el estudio y solución de ejercicios y problemas; Recomiendo que tengamos paciencia, consultemos y revisemos nuestras dudas, pensando que el buen conocimiento está directamente relacionado con la práctica y que esto nos permitira ingresar en el grandioso mundo de la matemática.

El autor.

Agradecimiento

El autor desea manifestar su agradecimiento, en primer lugar a todos los profesores y colegas universitarios que me han escuchado y enriquecido con su amistad, experiencias, sugerencias, críticas y comentarios.

A lo Editorial "IMPECUS" por su auspicio en la publicación de esta obra.

De modo particular a Erich A. Villavicencio G., Rossel Higinio Regalado, Ivan Tovar Fuentes, Alex Achulla, Arturo Jacinto Caluana, Matilde Gamboa, a mis grandes amigos del "Centro de Estudios Avanzada Tecnológica (CCAT)", cuna de excelentes profesionales de la Universidad Nacional de Ingeniería de la facultad de Ingeniería Industrial y de sistemas quienes han hecho valerosos comentarios para mejorar tanto el contenido como la forma de la presente obra

Un agradecimiento especial a mis padres Teofilo y Francisca quienes me iluminan mi camino con sus sabios consejos y a mis inquietos y extrañables hermanos Miguel, Roger, Juana, Leann, Angel, Gabriel, Alcides, Millar que me motivan a ser cada vez mejor.

Y una dedicatoria muy especial de esta obra a mi querida tía María Apari Suarez y Familia.

Y a todo aquel que tenga a bien dirigirnos sus críticas, comentarios o sugerencias serán muy bien recibidas.

El autor.

La Geometría está en todas partes

Fíjese en las formas regulares y perfectas que presentan muchos cuerpos. Las flores, las hojas e incontables animales revelan simetrías admirables que dislumbran nuestro espíritu.

La Geometría, repito, existe en todas partes: en el disco solar, en las hojas, en el arco iris, en los suaves pétalos de una flor, en la mariposa, en el diamante, en la estrella de mar y hasta en un diminuto grano de arena, hay, en fin, una infinita variedad de formas geométricas extendidas por la naturaleza. Un cuervo que vuela lentamente por el cielo describe con la mancha negra de su cuerpo figuras admirables. La sangre que circula por las venas del camello no escapa tampoco a los rigurosos principios geométricos, ya que sus glóbulos presentan la singularidad única entre los mamíferos de tener forma elíptica; la piedra que se tira al perro inoportuno dibuja en el aire una curva perfecta, denominada parábola; la abeja construye sus panales con la forma de prismas hexagonales y adopta esta forma geométrica, creo yo, para obtener su casa con la mayor economía posible de material.

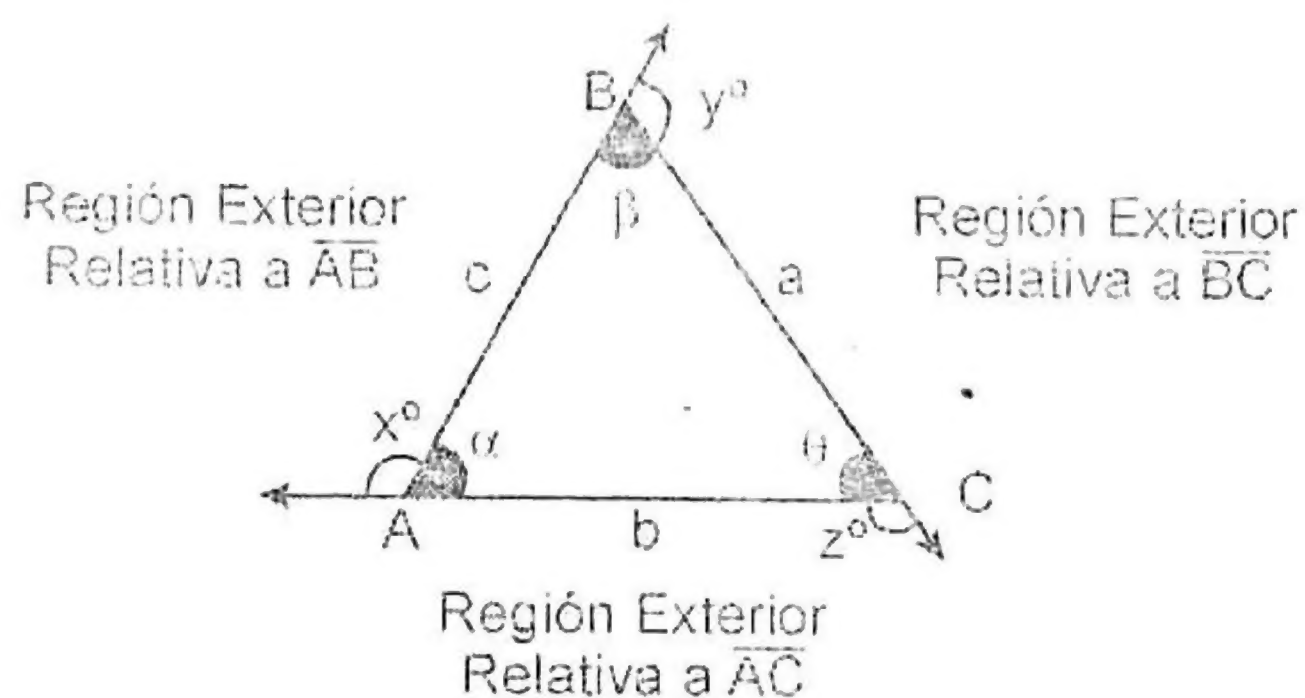
La Geometría existe, como dijo el filósofo, en todas partes. Es preciso, sin embargo, tener ojos para verla, inteligencia para comprenderla y alma para admirarla.

El campesino ve las formas geométricas pero no las entiende; el ciudadano común las entiende, pero no las admira; el artista, en fin, ve a la perfección de las figuras, comprende la belleza, y admira el orden y la armonía. Dios fue el Gran Geómetra. que Geometrizó el cielo y la tierra.

El autor.

Triángulos

Es aquella figura geométrica determinada por la unión de tres puntos no colineales mediante segmentos de línea recta.



| ELEMENTOS | NOTACIÓN |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------|
| • Vértices A, B, C | $\triangle ABC$: |
| • Lados AB, BC, AC | Se lee: triángulo de |
| • \angle s Internos α , β y θ | vértices A, B y C |
| • \angle s Externos x , y , z | |

| PERÍMETRO (2P) | SEMIPERÍMETRO (P) |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Es la longitud del contorno de la región triangular ABC $2P = a + b + c$ | $P = \frac{a + b + c}{2}$ |

| PROPIEDAD FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO | | | |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|---------|-------------------------------------------|
| Nº | PROPIEDAD | GRÁFICO | SE CUMPLE |
| 1 | Suma de las medidas de sus ángulos internos | | $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ |
| 2 | Medida de un ángulo exterior | | $x = \alpha + \beta$ |
| 3 | Suma de las medidas de sus ángulos externos | | $x^\circ + y^\circ + z^\circ = 360^\circ$ |

| Nº | PROPIEDAD | GRÁFICO | SE CUMPLE |
|----|------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | Correspondencia | | Si: $\overline{AB} > \overline{BC}$ $\Rightarrow \theta > \alpha$ |
| 5 | Existencia del Triángulo ó de Desigualdad Triangular | | Si $a > b > c$ $b - c < a < b + c$ $a - c < b < a + c$ $a - b < c < b + a$ |

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

| | TRIÁNGULO | FIGURA | CARACTERÍSTICA |
|---------|-------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| LADOS | ESCALENO | | $AB \neq BC \neq AC$ $\alpha \neq \beta \neq \theta$ |
| | ISÓSCELES | | $AB = BC$ $m\angle A = m\angle C$ $AC \rightarrow$ Base |
| | EQUILÁTERO | | $AB = BC = AC$ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ |
| ÁNGULOS | ACUTÁNGULO | | $\alpha < 90^\circ$ $\beta < 90^\circ$ $\theta < 90^\circ$ (Tiene \angle s agudos) |
| | RECTÁNGULO | | * AC y BC Catetos * AB \rightarrow Hipotenusa * $\alpha + \theta = 90^\circ$ * $c^2 = a^2 + b^2$ |
| | OSTUSÁNGULO | | $\alpha > 90^\circ$ $\beta < 90^\circ \wedge \theta < 90^\circ$ |

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

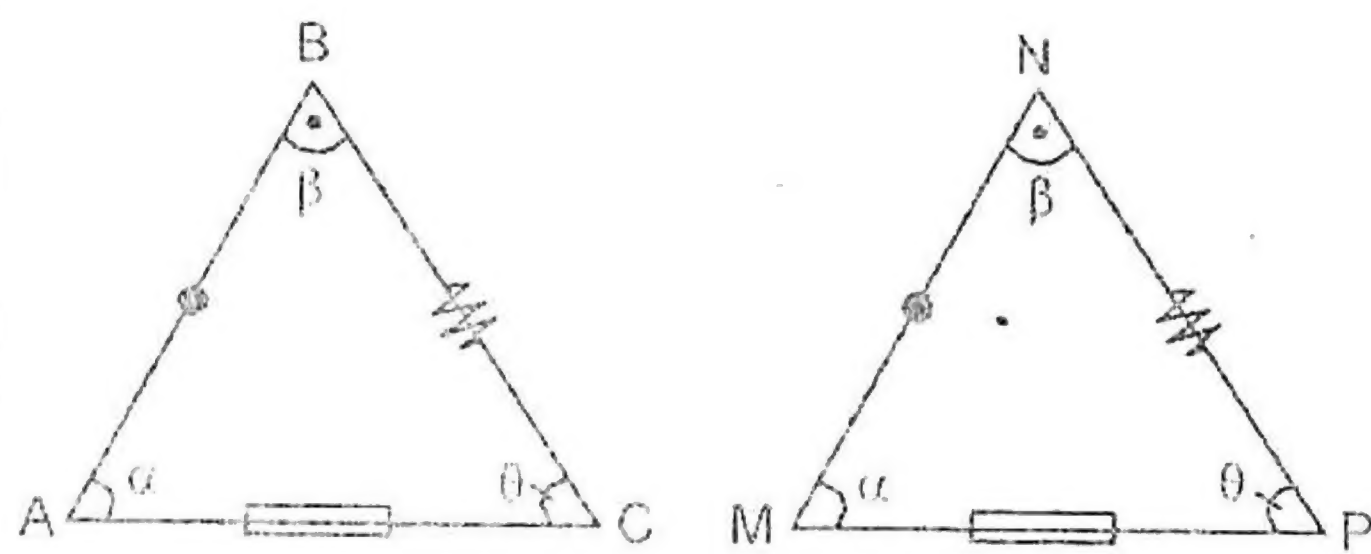
| | CARACTERÍSTICA | GRÁFICO |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| CEVIANA | Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y un punto cualquiera del lado opuesto o de su respectiva prolongación. | |
| MEDIANA | Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. | |
| ALTURA | Es aquel segmento perpendicular trazado de un vértice del triángulo hacia el lado opuesto o hacia su respectiva prolongación. | |
| MEDIATRIZ | Es la recta perpendicular a un lado cualquiera del triángulo en su punto medio. | |
| BISECTRIZ INTERIOR | Es la ceviana interior trazado desde un vértice del triángulo que biseca o divide en partes iguales al ángulo interior. | |
| BISECTRIZ EXTERIOR | Es la ceviana exterior trazado desde un vértice del triángulo que divide en partes iguales al ángulo exterior. | |

PROPIEDADES

| GRÁFICO | SE CUMPLE |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | En todo triángulo isósceles \overline{BH} { <ul style="list-style-type: none"> Altura Mediana Bisectriz Mediatriz |
| | Si: $\overline{BM} \rightarrow$ Mediana $\nabla AM = MC = BM$ |
| Si tenemos: | Si: $AB = BC$ y $m\hat{A}BC = 60^\circ$ $\nabla \Delta ABC$ es Equilátero |
| | En todo cuadrilátero cóncavo: $x = \alpha + \beta + \theta$ |
| | $x = \frac{\alpha^\circ + \theta^\circ}{2}$ |
| | $x = 90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2}$ |
| | $x = 90^\circ - \frac{\alpha^\circ}{2}$ |
| | $x = \frac{\alpha^\circ}{2}$ |

Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son congruentes si ellos tienen igual forma y tamaño, es decir a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud y viceversa.



$$\triangle ABC \cong \triangle MNP$$

Se lee "es congruente con"

CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

| CASO | CONDICIÓN | GRÁFICO |
|------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| I | Lado Ángulo Lado (L.A.L.) | <p>$\triangle ABC \cong \triangle MNP$</p> |
| II | Ángulo Lado Ángulo (A.L.A.) | <p>$\triangle ABC \cong \triangle MNP$</p> |
| III | Lado Lado Lado (L.L.L.) | <p>$\triangle ABC \cong \triangle MNP$</p> |

APLICACIONES DE CONGRUENCIA

| TEOREMA | CARACTERÍSTICA | SE CUMPLE |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| BISECTRIZ | Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo | <p>$AP = PB \wedge AO = OB$</p> |
| MEDIATRIZ | Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento | <p>$AP = PB$</p> |
| BASE MEDIA | En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y además su longitud es la mitad de dicho tercer lado. | <p>$\overline{BN} = \overline{NC} \wedge \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$</p> |

La ciencia exige del hombre toda su vida y aún si ustedes tuvieran dos vidas no les serían suficientes, la ciencia exige del hombre una gran tensión y una pasión inmensa»

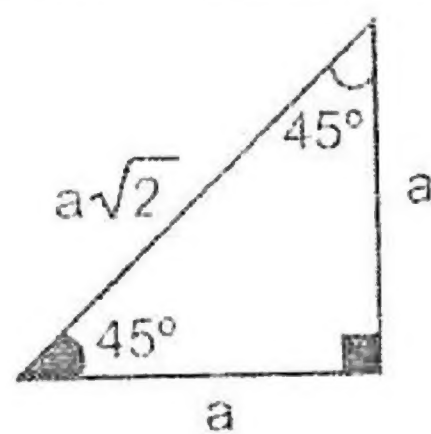
Anónimo

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

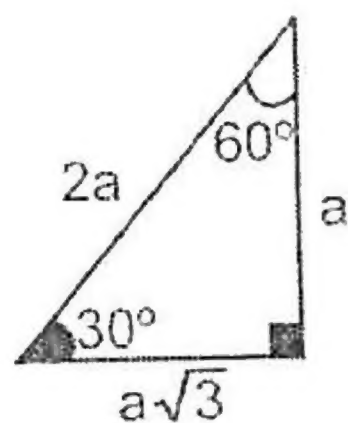
MEDIDA

RELACIÓN DE LADOS

45° y 45°

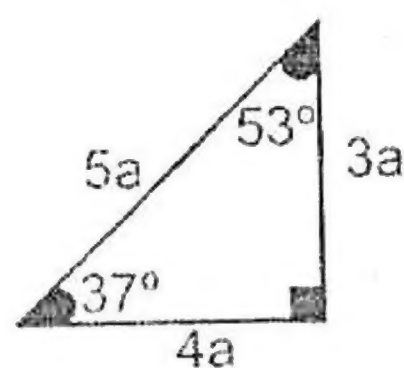
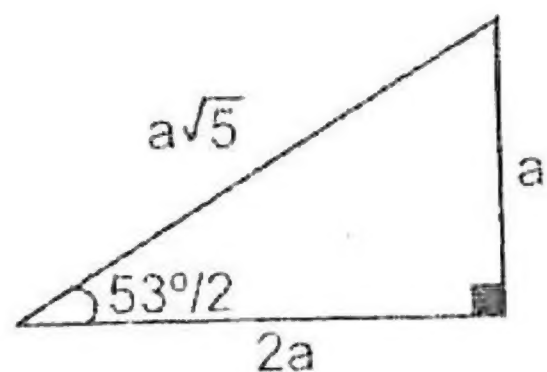
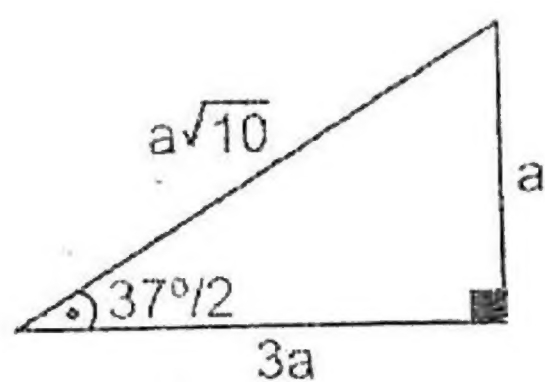


30° y 60°

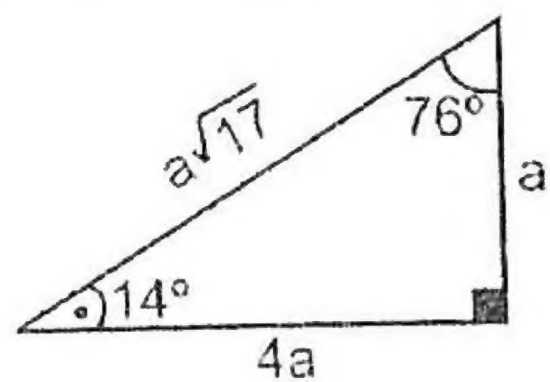


TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLES APROXIMADOS

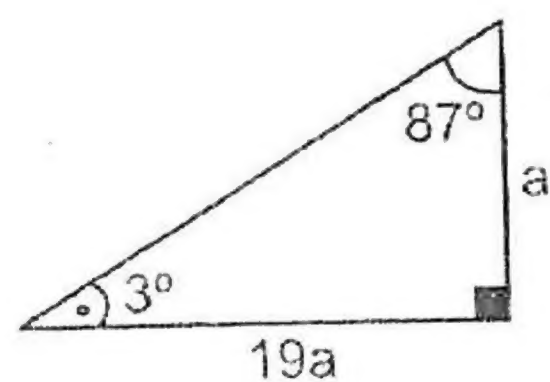
37° y 53°

53°/2
(26° 30')37°/2
(18° 30')

14° y 76°



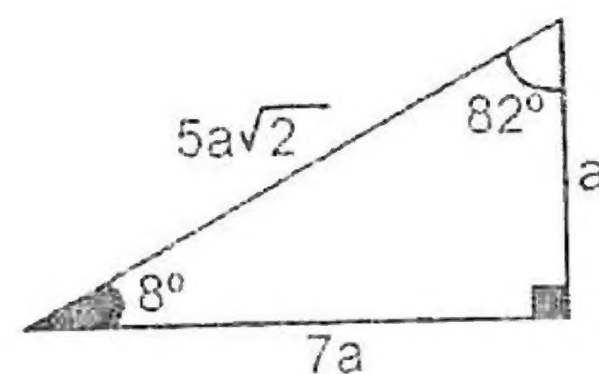
3° y 87°



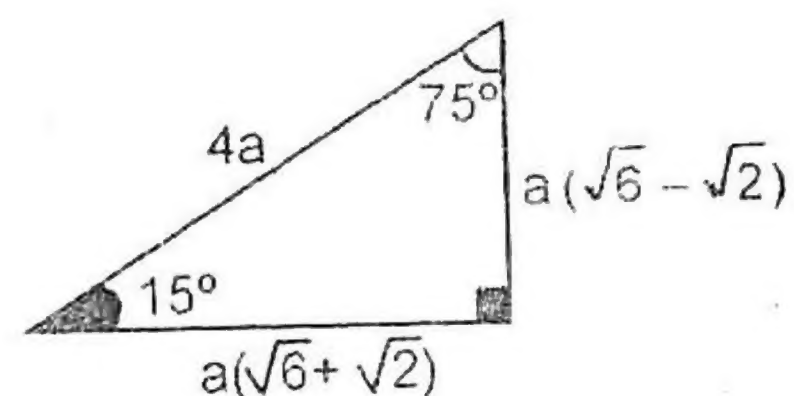
MEDIDA

RELACIÓN DE LADOS

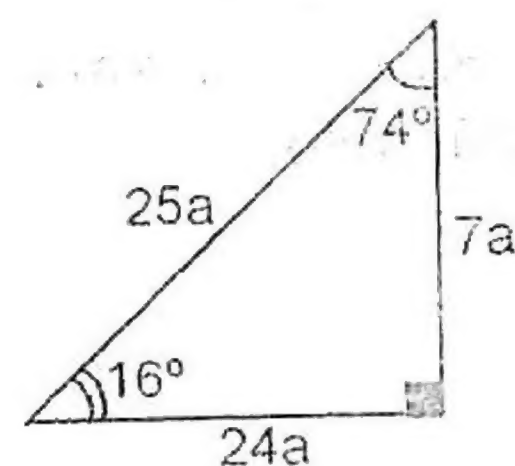
8° y 82°



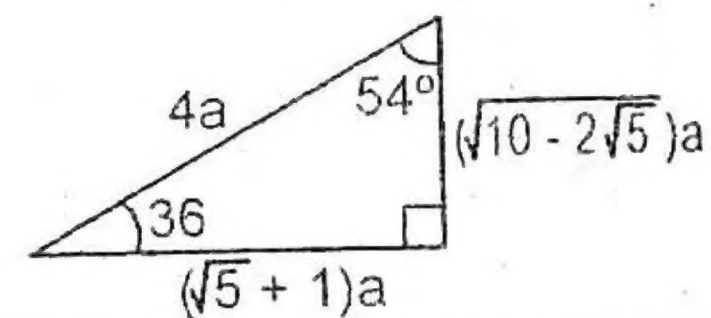
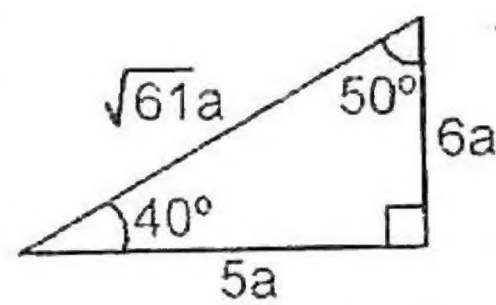
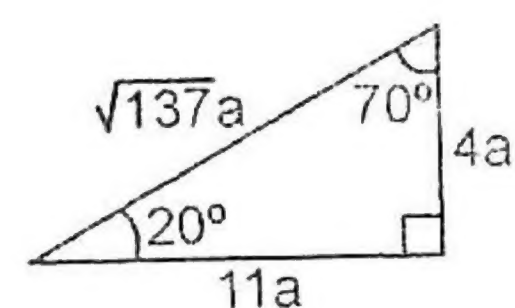
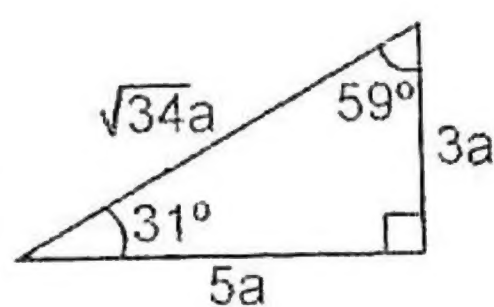
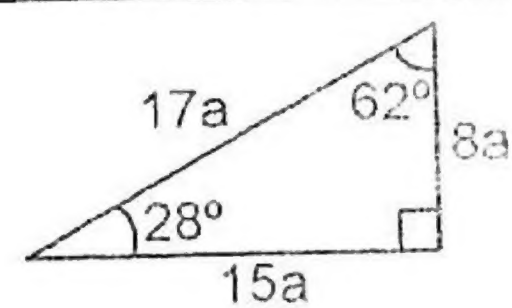
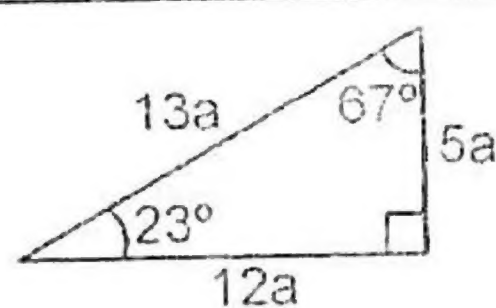
15° y 75°



16° y 74°



ADICIONALES

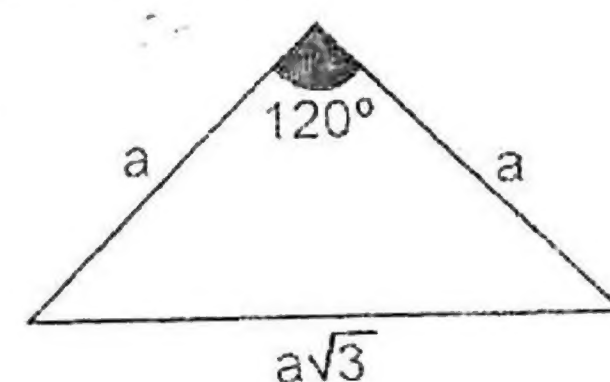


ADICIONAL

MEDIDA

RELACIÓN DE LADOS

120°

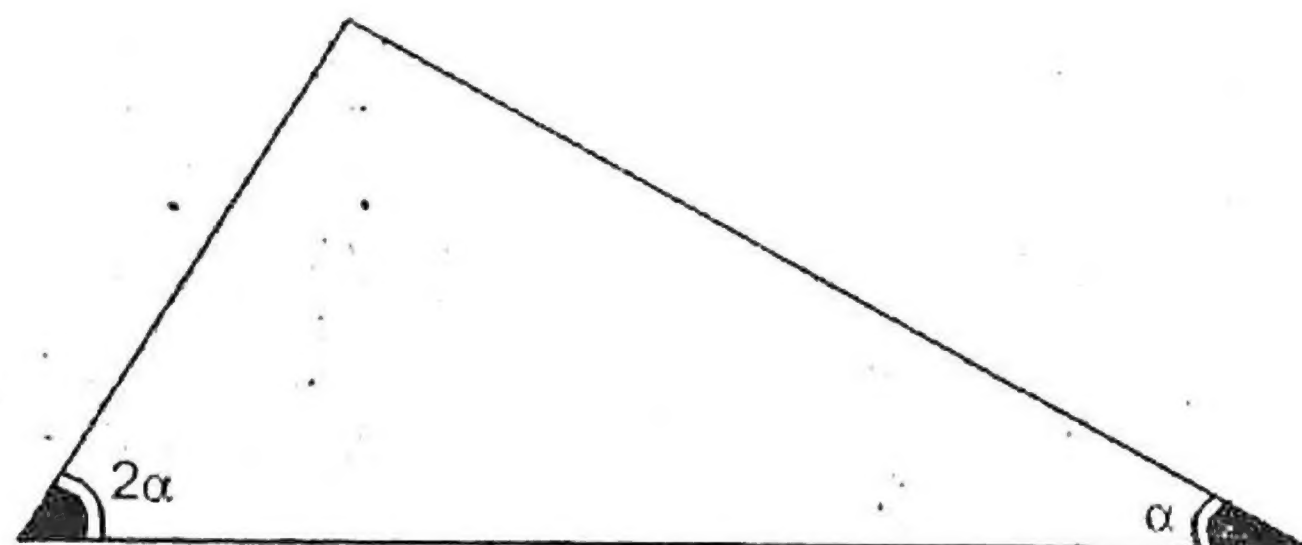


CRITERIOS PARA HACER TRAZOS AUXILIARES EN TRIÁNGULOS

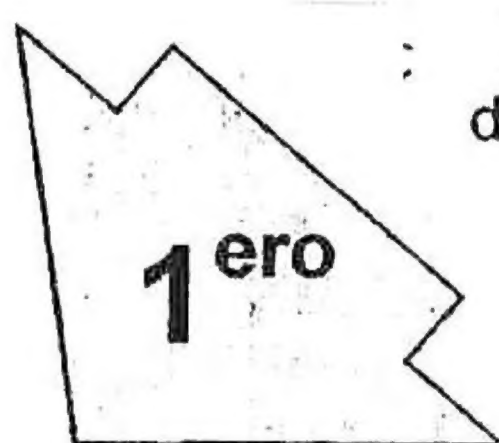
1er Criterio

"TRAZO DE LA CEVIANA"

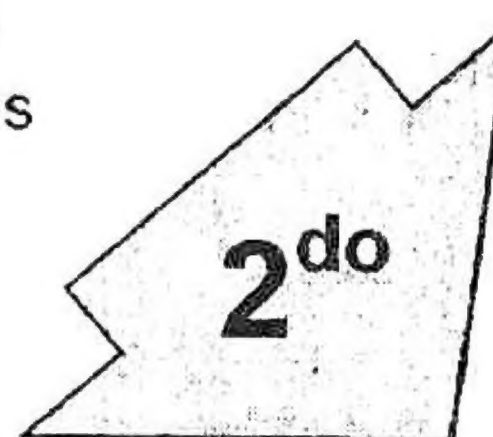
Cuando se observa un triángulo que tenga ángulos interiores en la relación de uno a dos, de la siguiente forma.



Se trazará una ceviana interna tal que forme un ángulo igual al mayor en la misma base del triángulo.

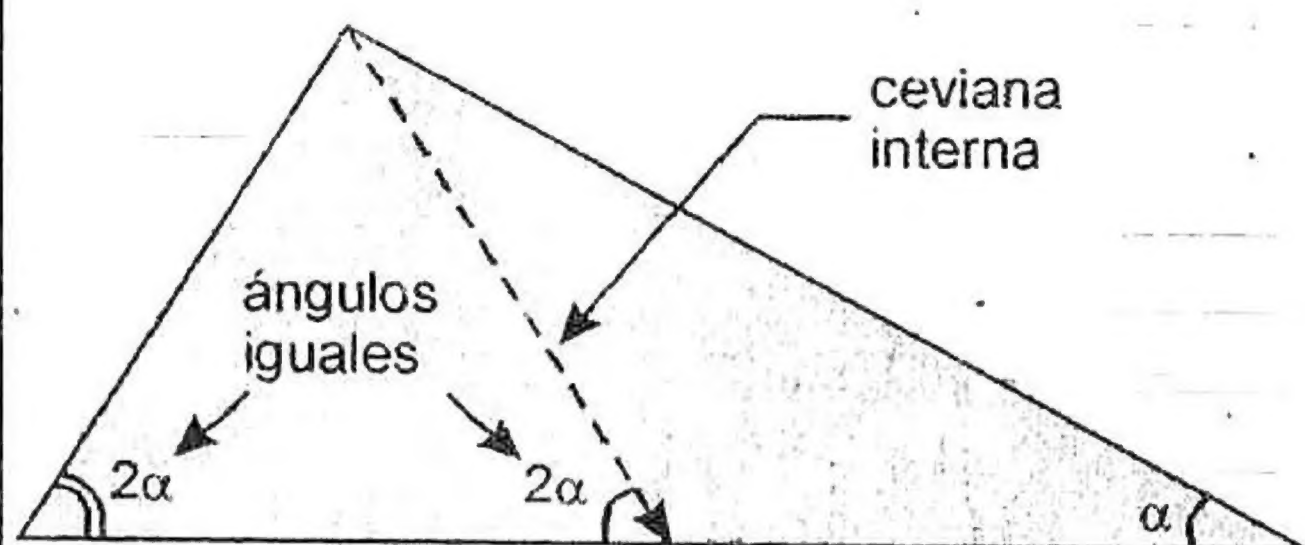


Tendremos dos opciones

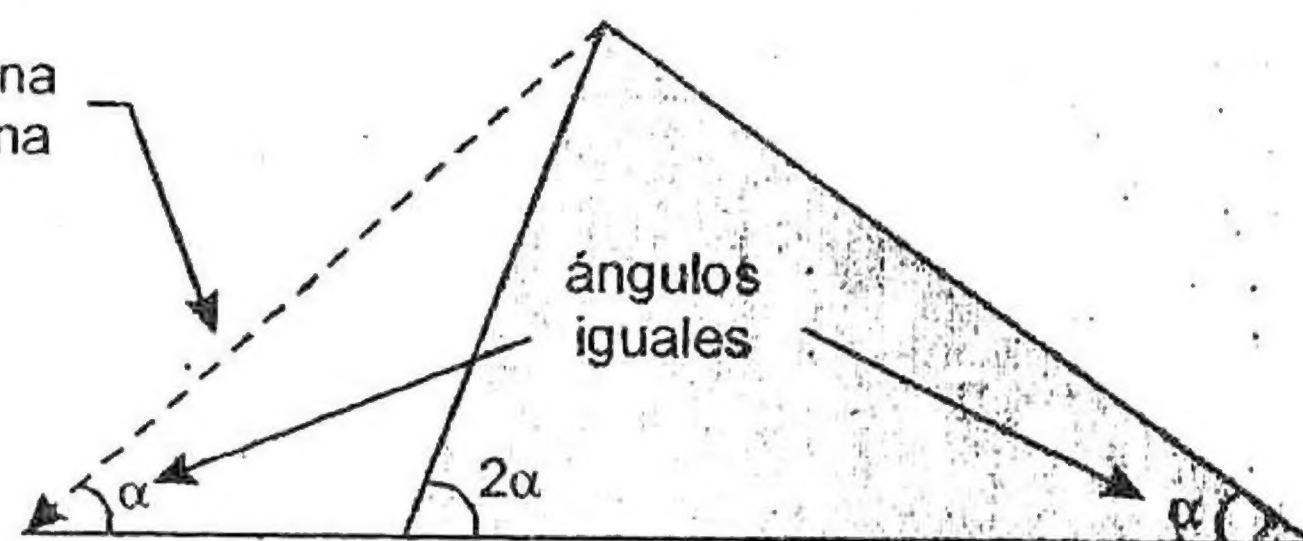


Se trazará una ceviana externa tal que forme un ángulo igual al menor en la misma base del triángulo.

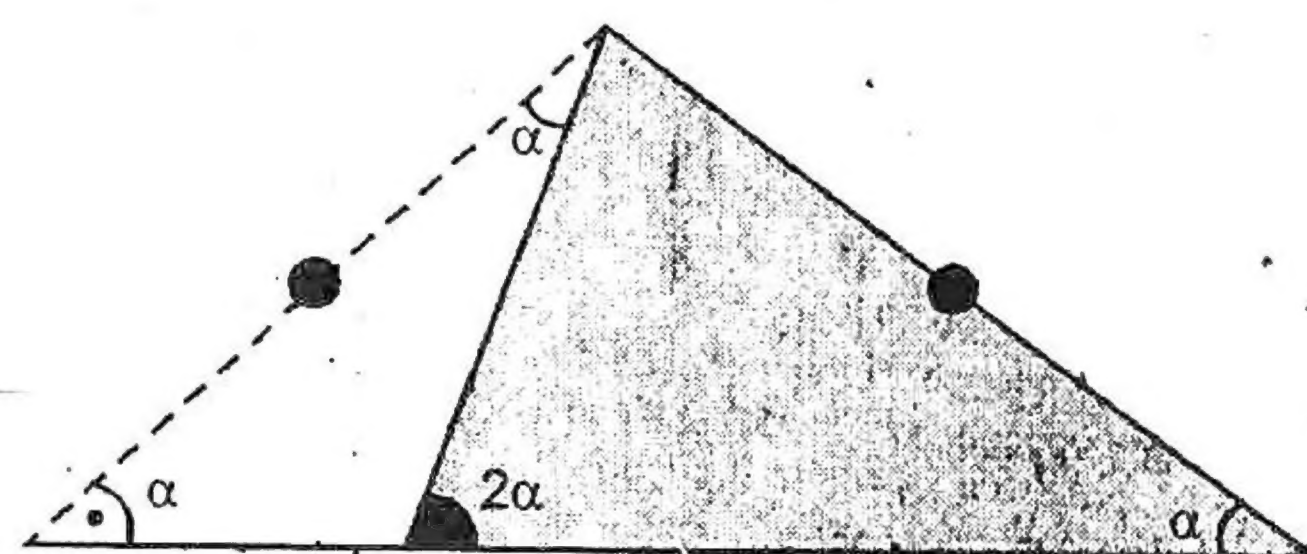
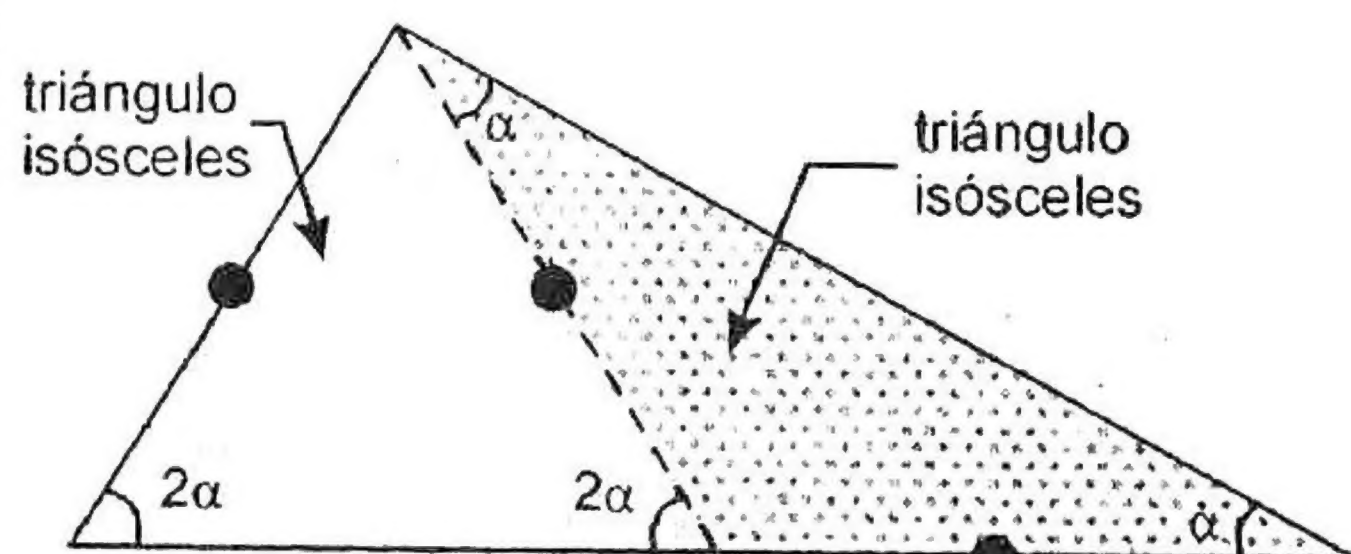
10



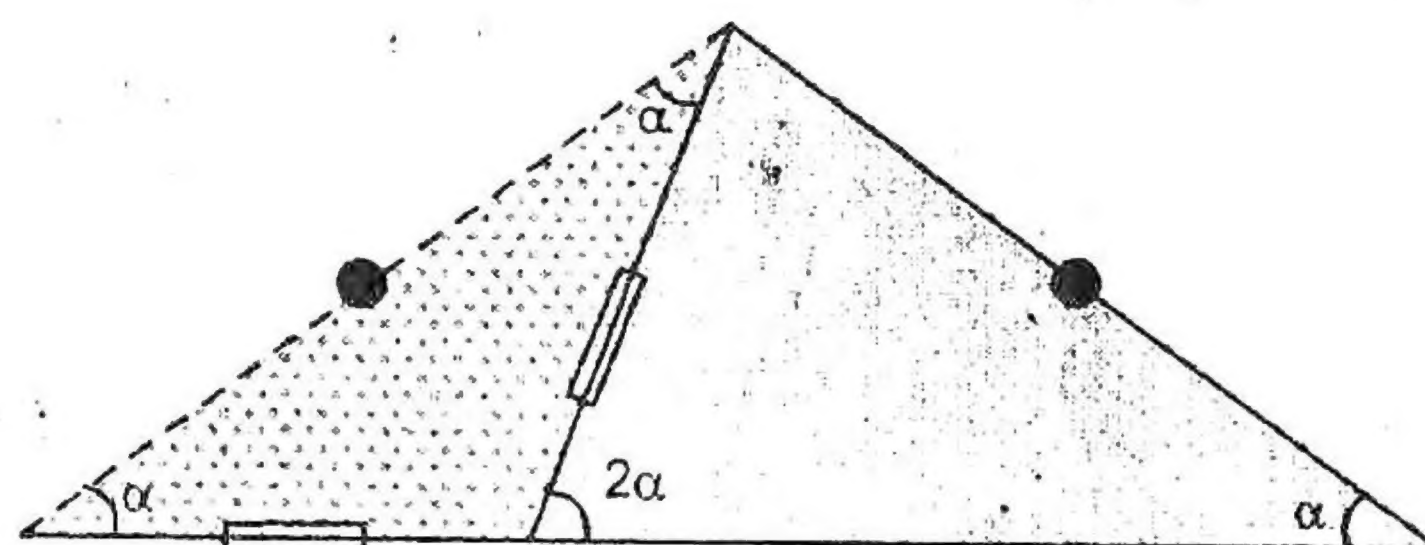
cevana externa



En ambos casos obtenemos triángulos isósceles como se muestra en las figuras.



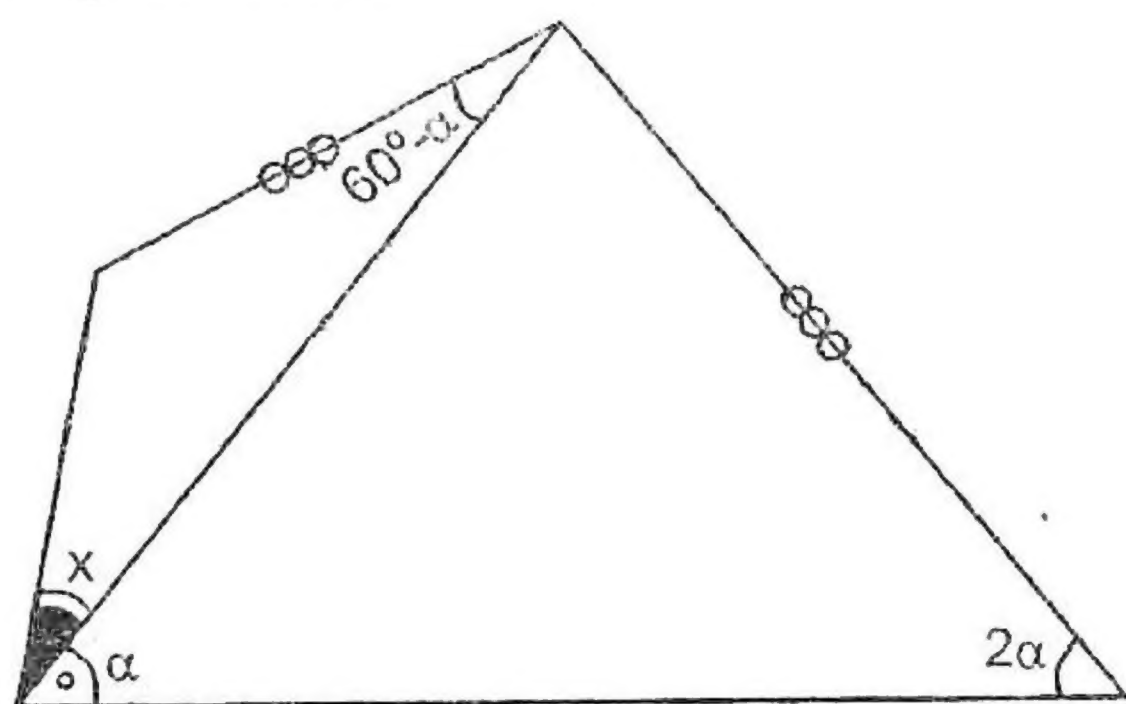
también:



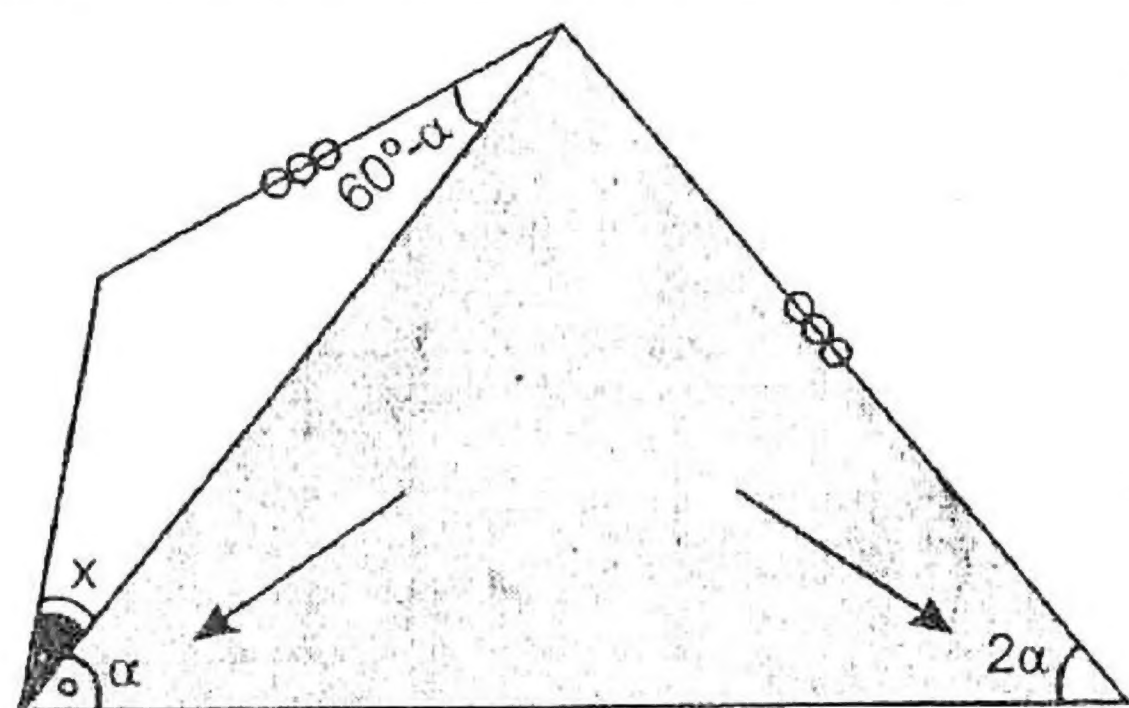
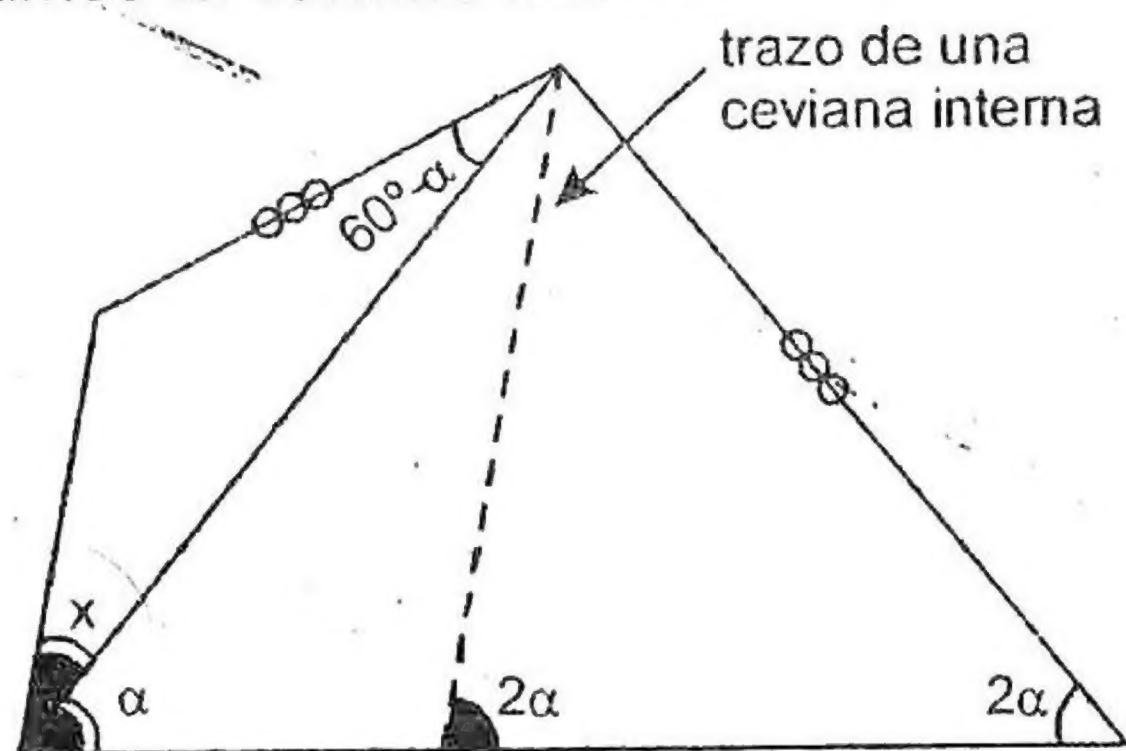
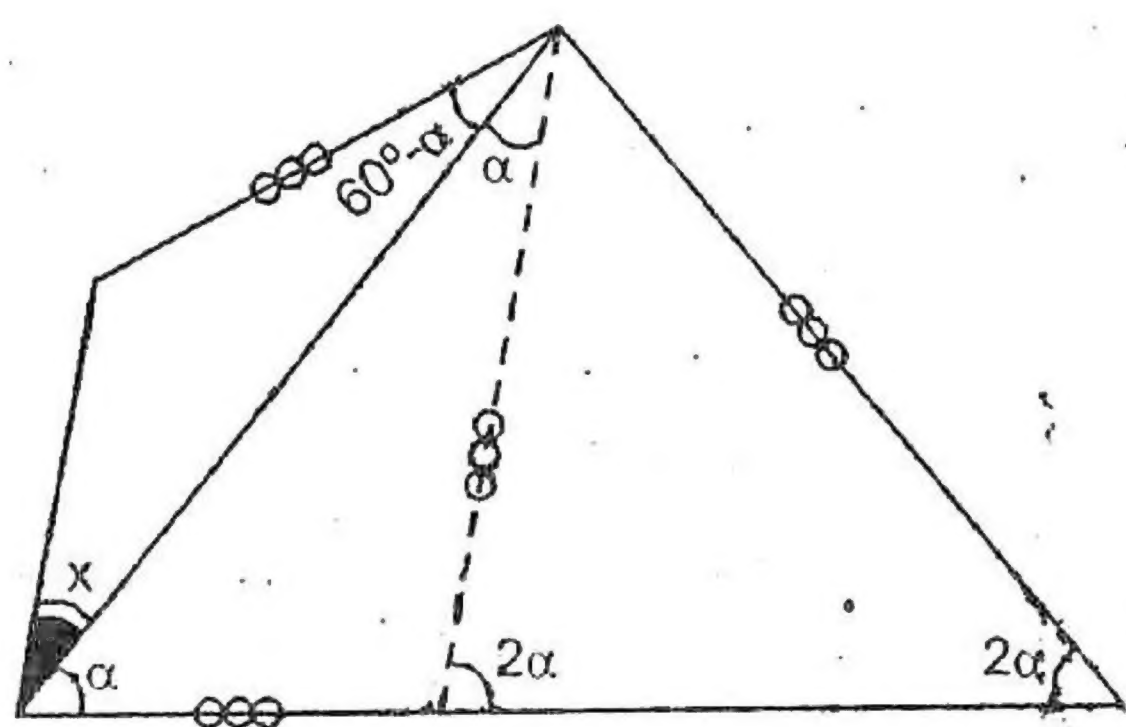
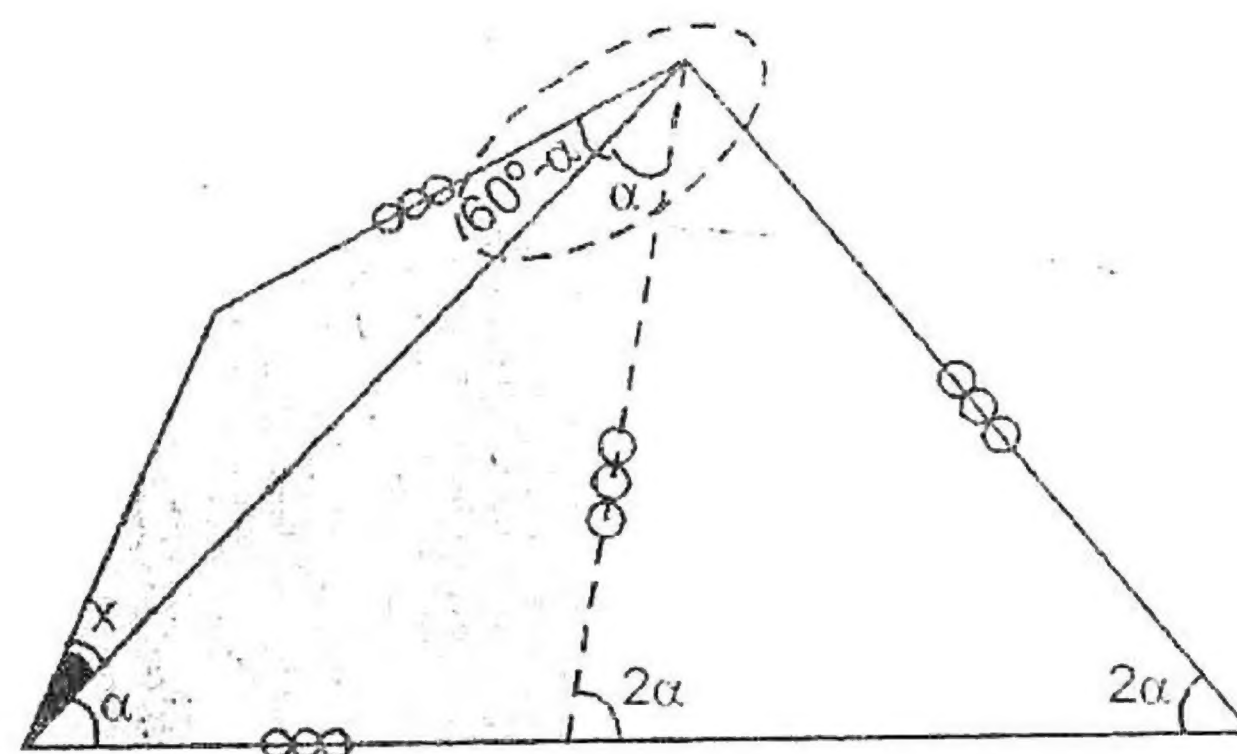
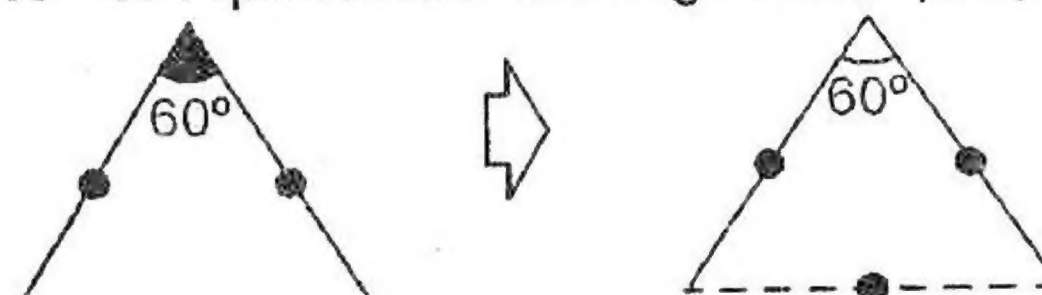
De hecho, el éxito representa el 1% de un trabajo que resulta del 99% de aquello que se llama fracaso

EjemPlo N° 1

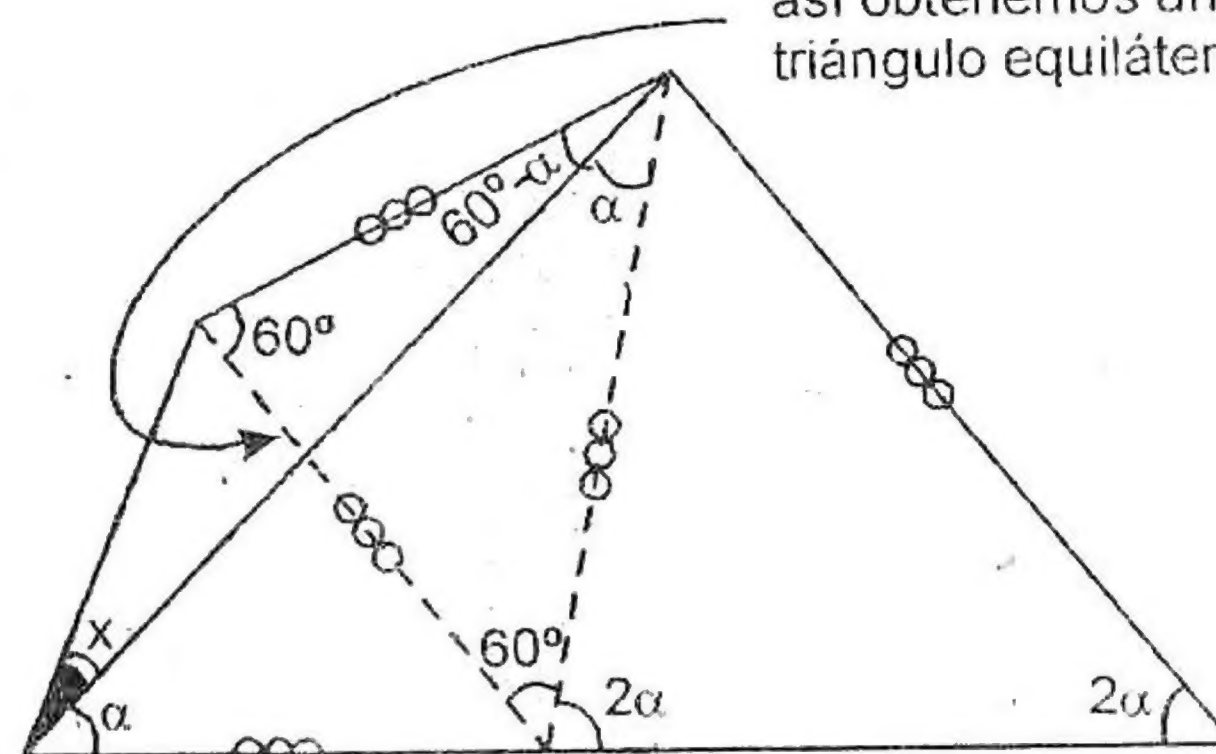
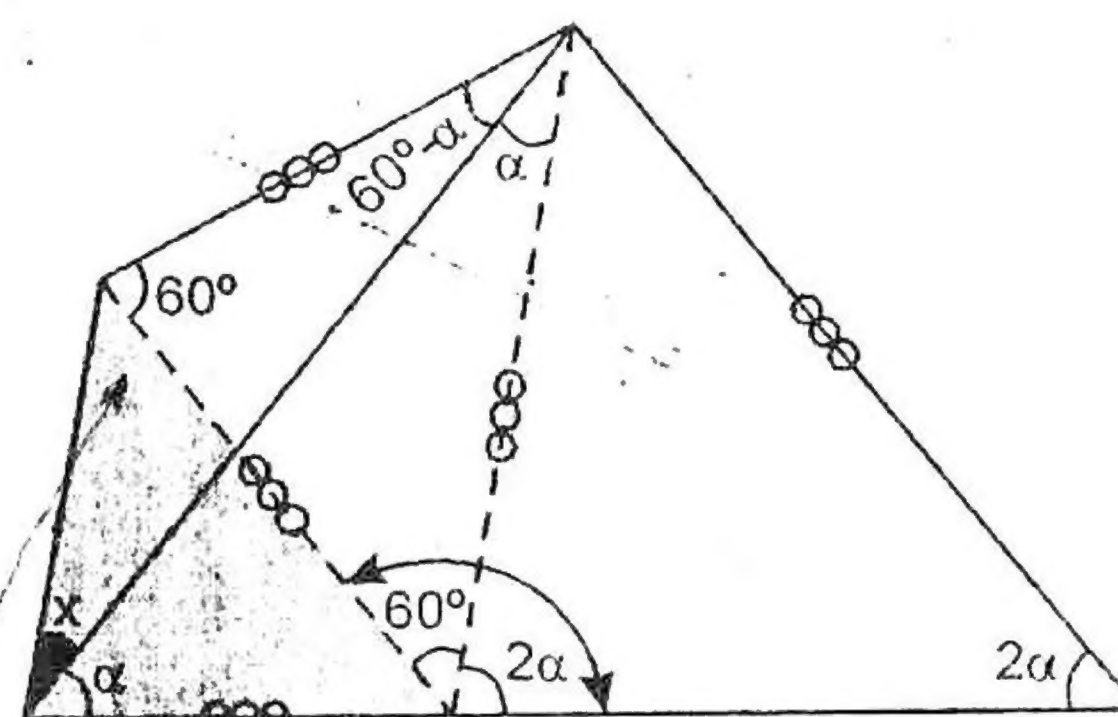
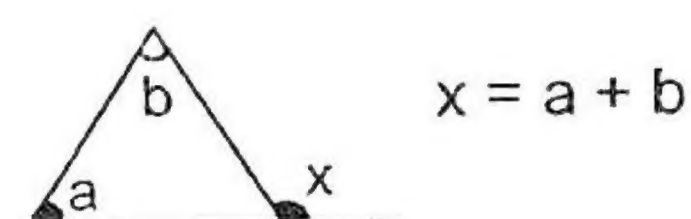
De la figura calcular "x"

**SOLUCIÓN:**

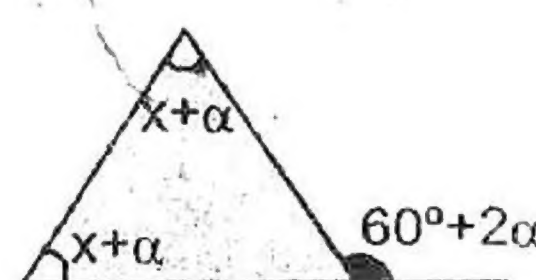
Se tiene en la figura un triángulo que tiene ángulos internos la relación de 1 a 2.

**Paso N° 1:** Entonces aplicamos el primer criterio: Trazamos la ceviana interna.**Paso N° 2:** Ahora, completamos ángulos y observamos lados iguales.**Paso N° 3:** Se observa, un ángulo de 60° de la siguiente forma.**Paso N° 4:** Aplicando las siguiente propiedad.

así obtenemos un triángulo equilátero

**Paso N° 5:** Se observa un triángulo isósceles adicional donde se podrá aplicar.

De aquí:



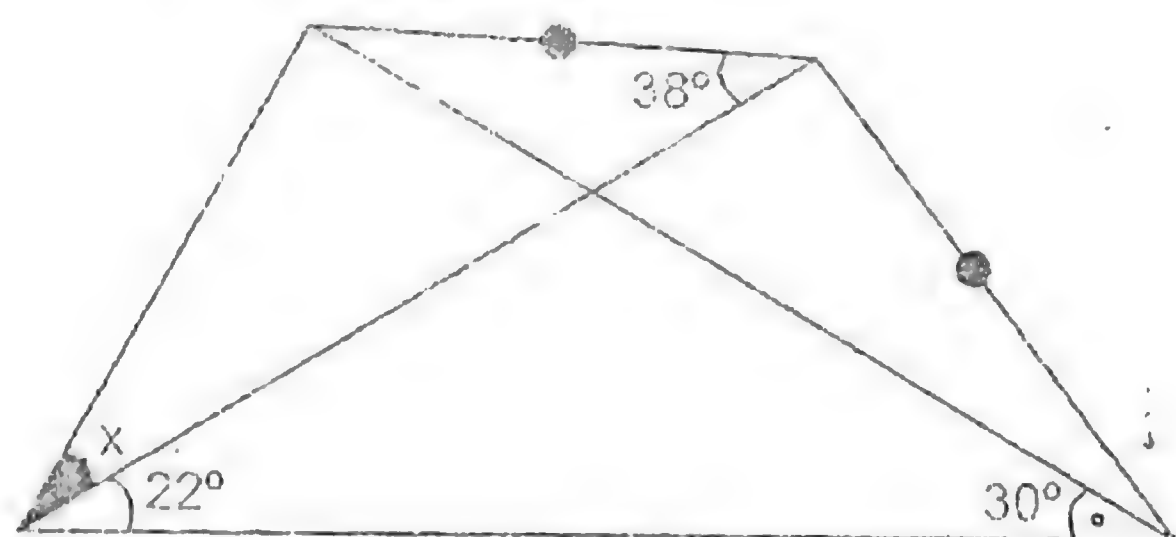
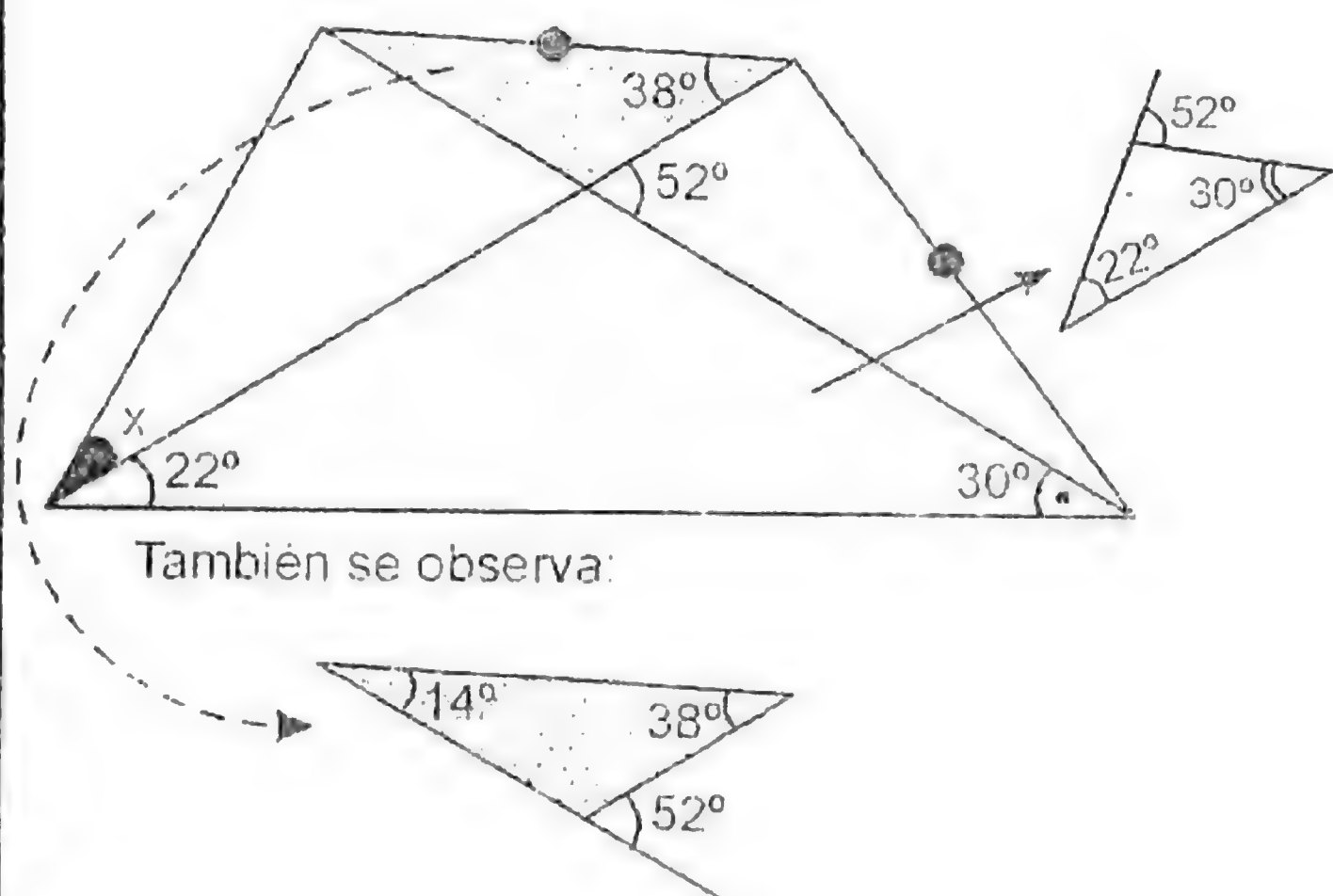
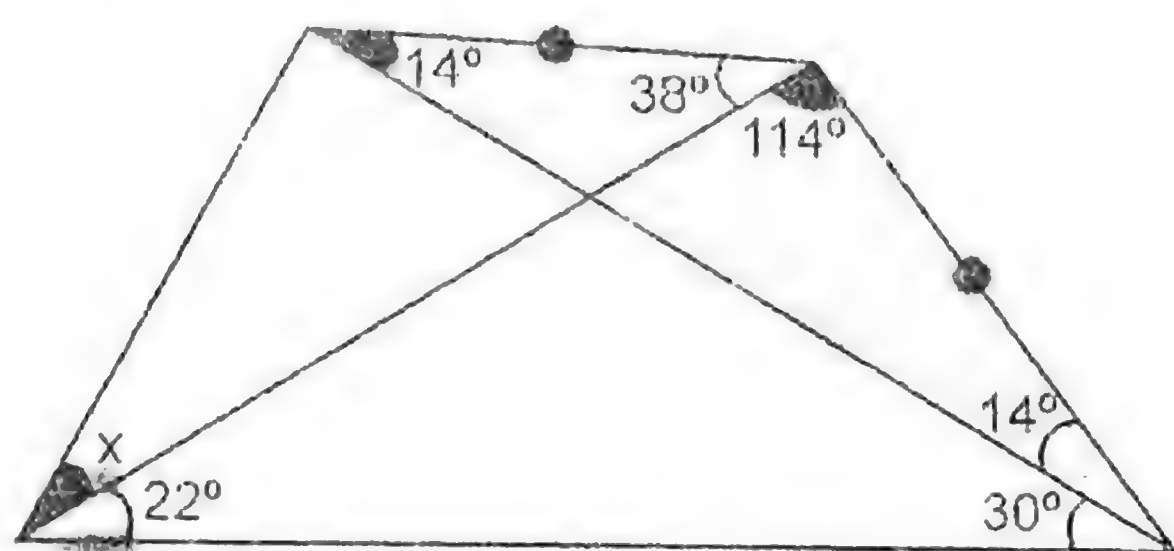
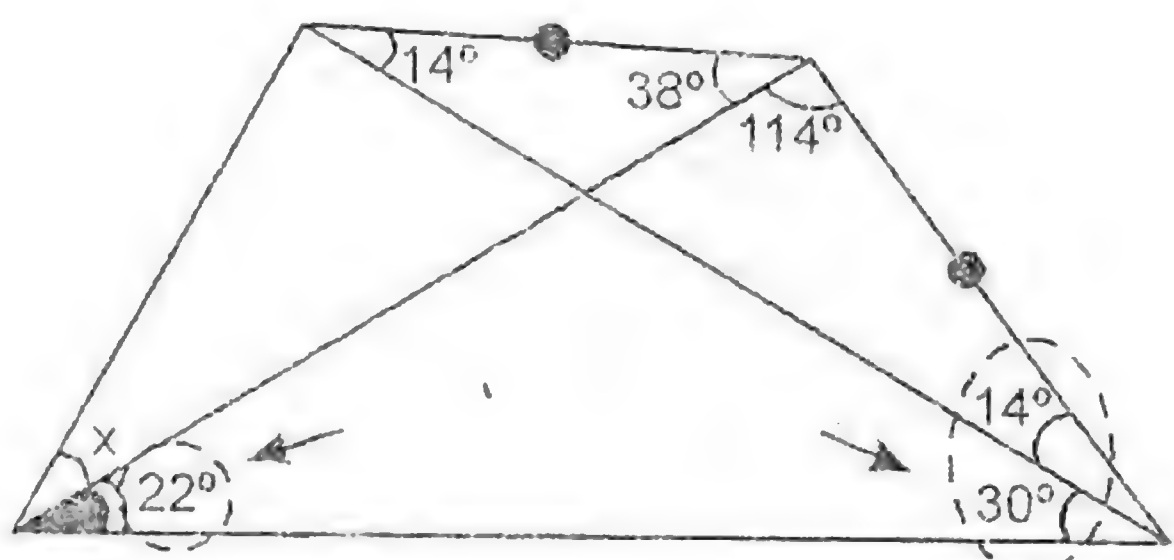
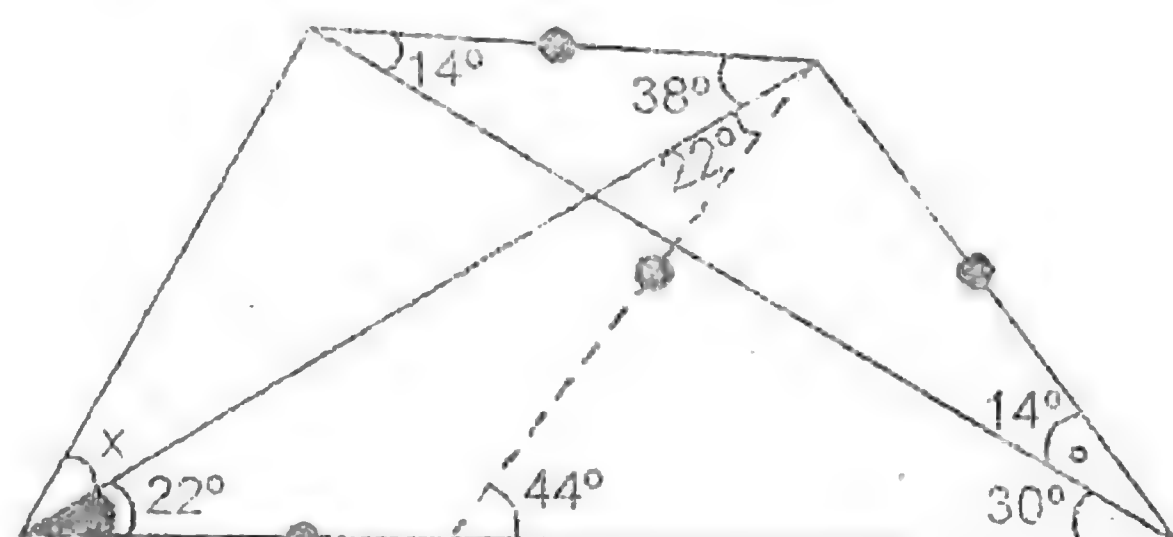
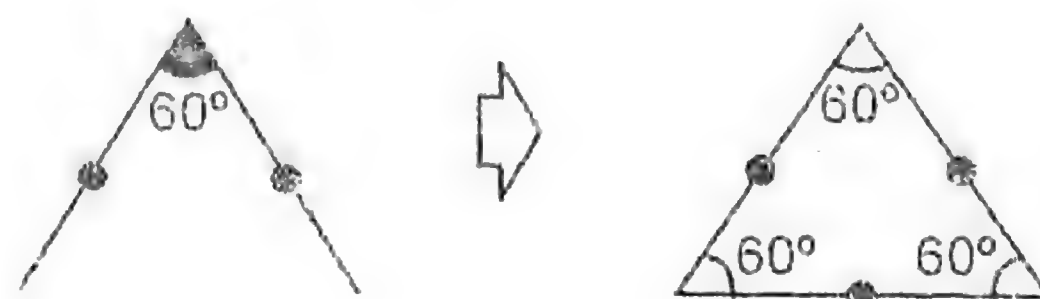
$$x + \alpha + x + \alpha = 60^\circ + 2\alpha$$

$$2x + 2\alpha = 60^\circ + 2\alpha$$

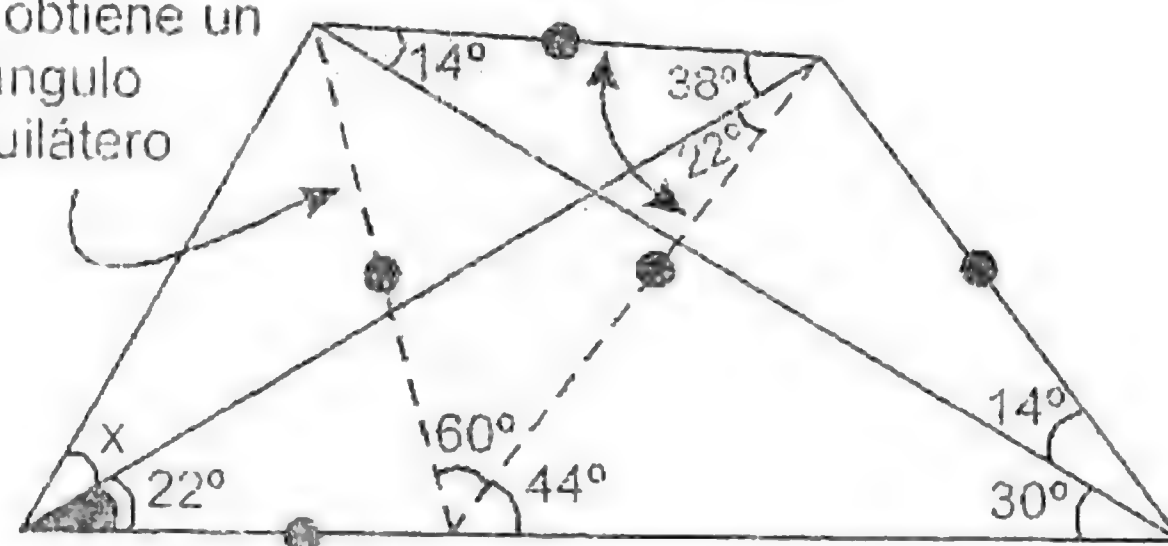
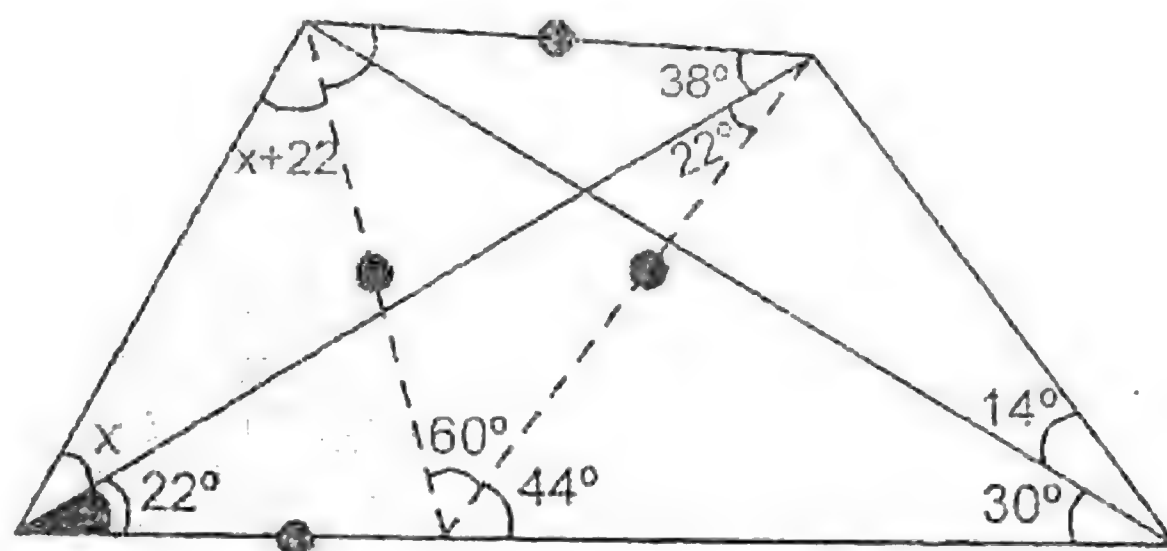
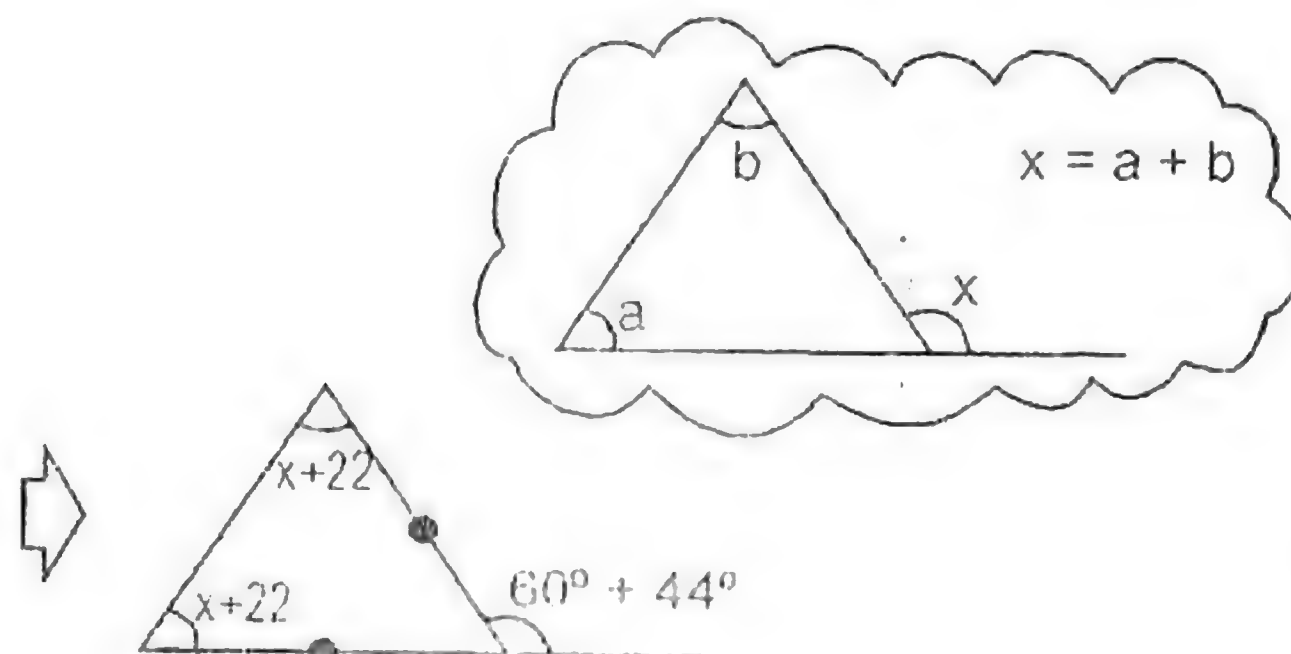
$$x = 30^\circ$$

EJEMPLO Nº 2

De la figura calcular "x"

**SOLUCIÓN:****Paso Nº 1:** Completamos ángulos, internos en la figura y se tiene:**Paso Nº 2:** Se tiene un triángulo isósceles.**Paso Nº 3:** Se observa un triángulo que tiene ángulos internos en la relación de 1 a 2 (22° y 44°)**Paso Nº 4:** Aplicamos el primer criterio; trazamos la ceviana interna.**Paso Nº 5:** Ahora observamos un ángulo 60° ($38^\circ + 22^\circ$) acompañado de dos lados iguales, entonces hacemos:

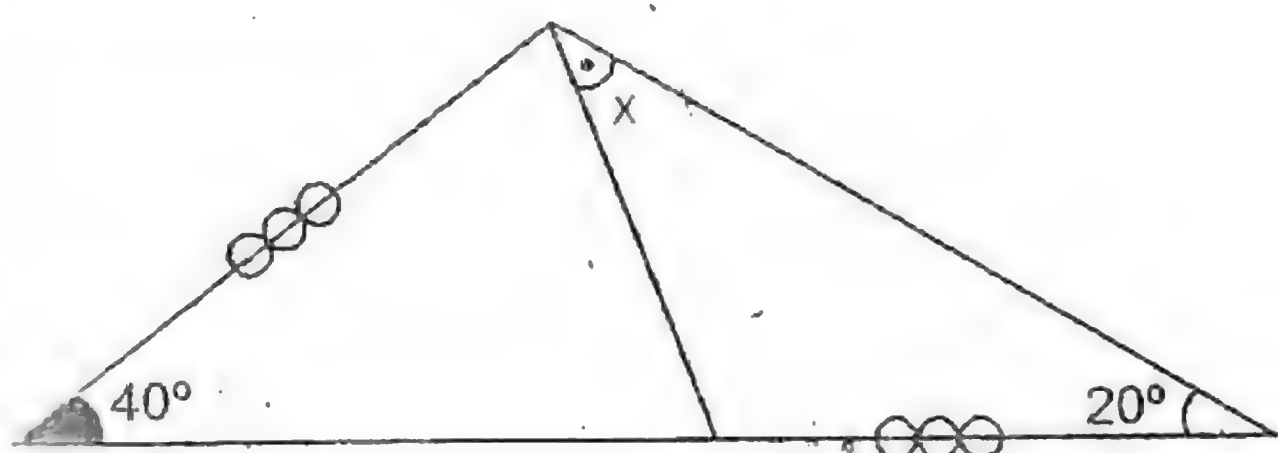
se obtiene un triángulo equilátero

**Paso Nº 6:** Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.**Paso Nº 7:** Ahora en este triángulo isósceles se puede aplicar.

$$\begin{aligned}
 x + 22^\circ + x + 22^\circ &= 60^\circ + 44^\circ \\
 2x + 44^\circ &= 60^\circ + 44^\circ \\
 x &= 30^\circ
 \end{aligned}$$

PROBLEMA N° 3

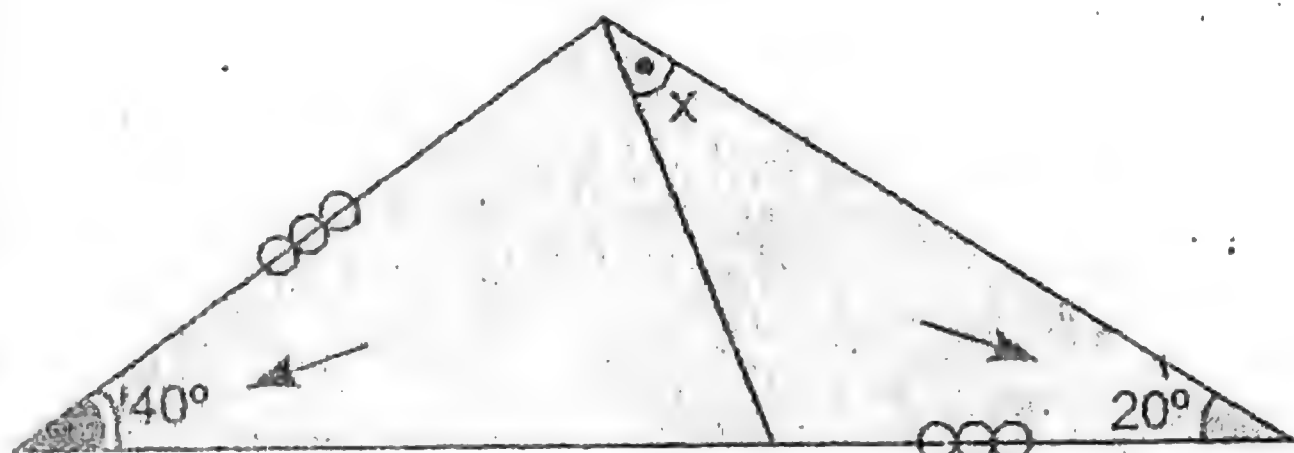
En la figura calcular "x"



SOLUCIÓN:

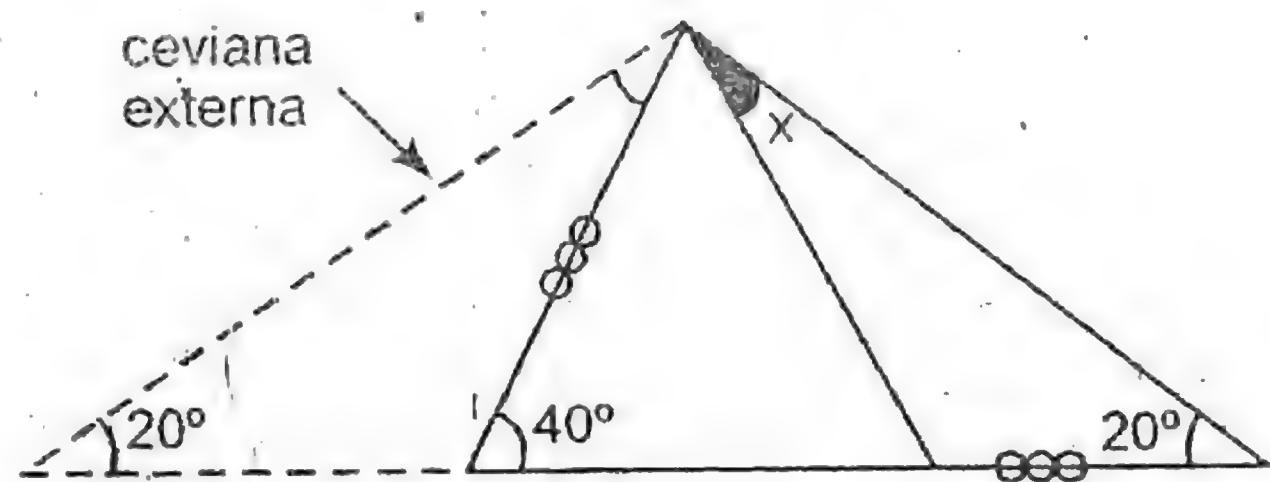
Paso N° 1:

Se observa en el triángulo ángulos internos en la relación de 1 a 2 (20° y 40°)



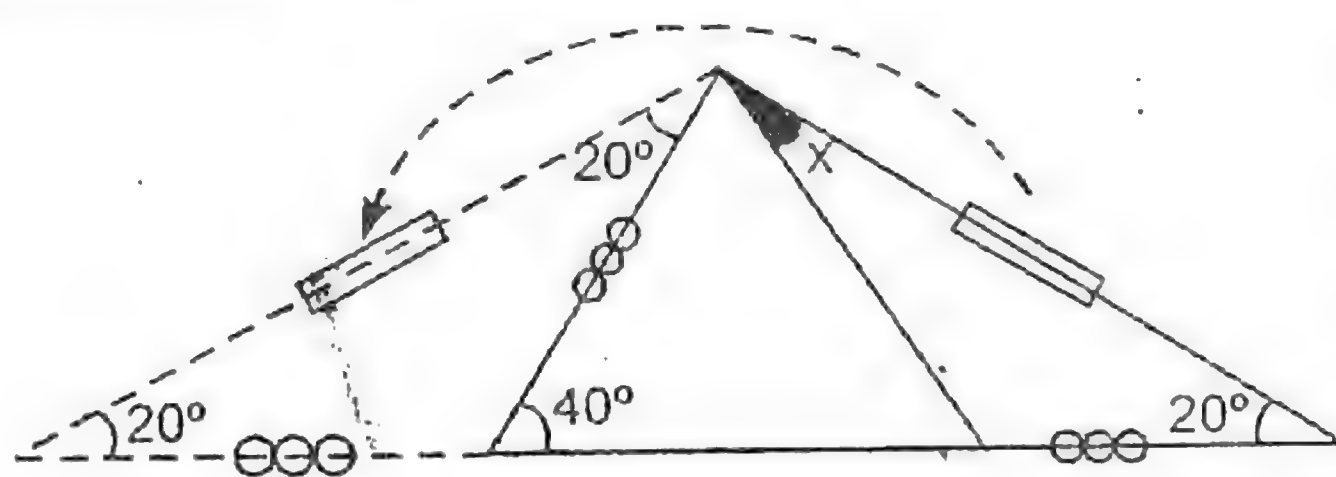
Paso N° 2:

Aplicamos el primer criterio: pero ahora trazamos una ceviana externa de la siguiente manera.



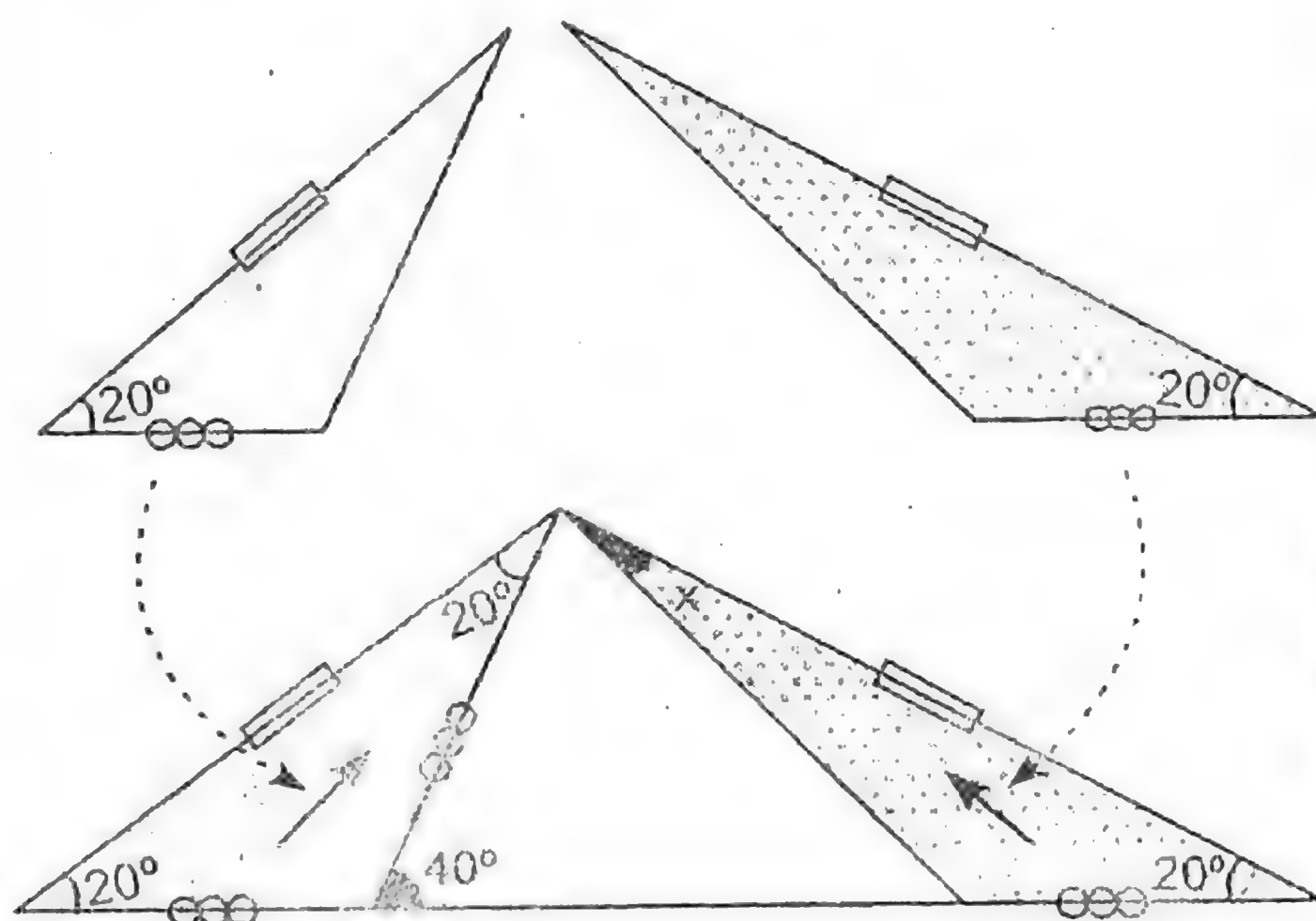
Paso N° 3:

Completamos ángulos y se obtiene triángulos isosceles.



Paso N° 4:

Ahora se observa en la figura, triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



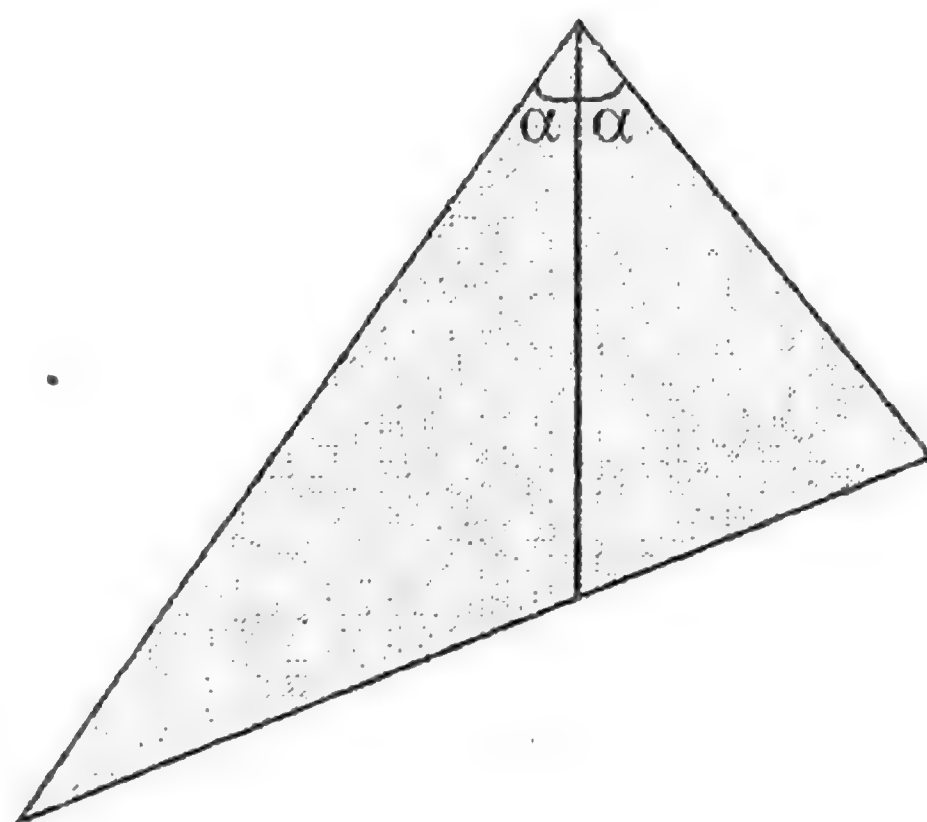
∴ Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

$$\Rightarrow x = 20^\circ$$

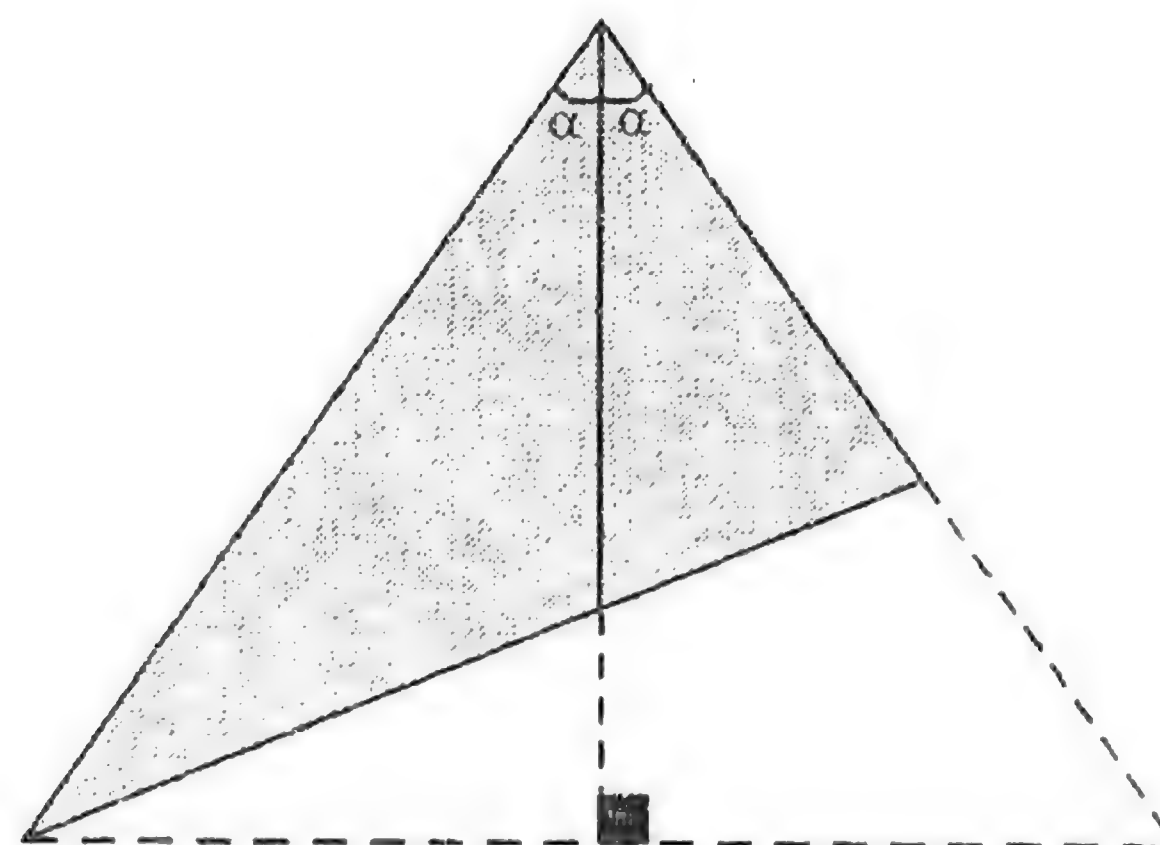
2do. Criterio

“COMPLETANDO A UN TRIÁNGULO ISÓSCELES”

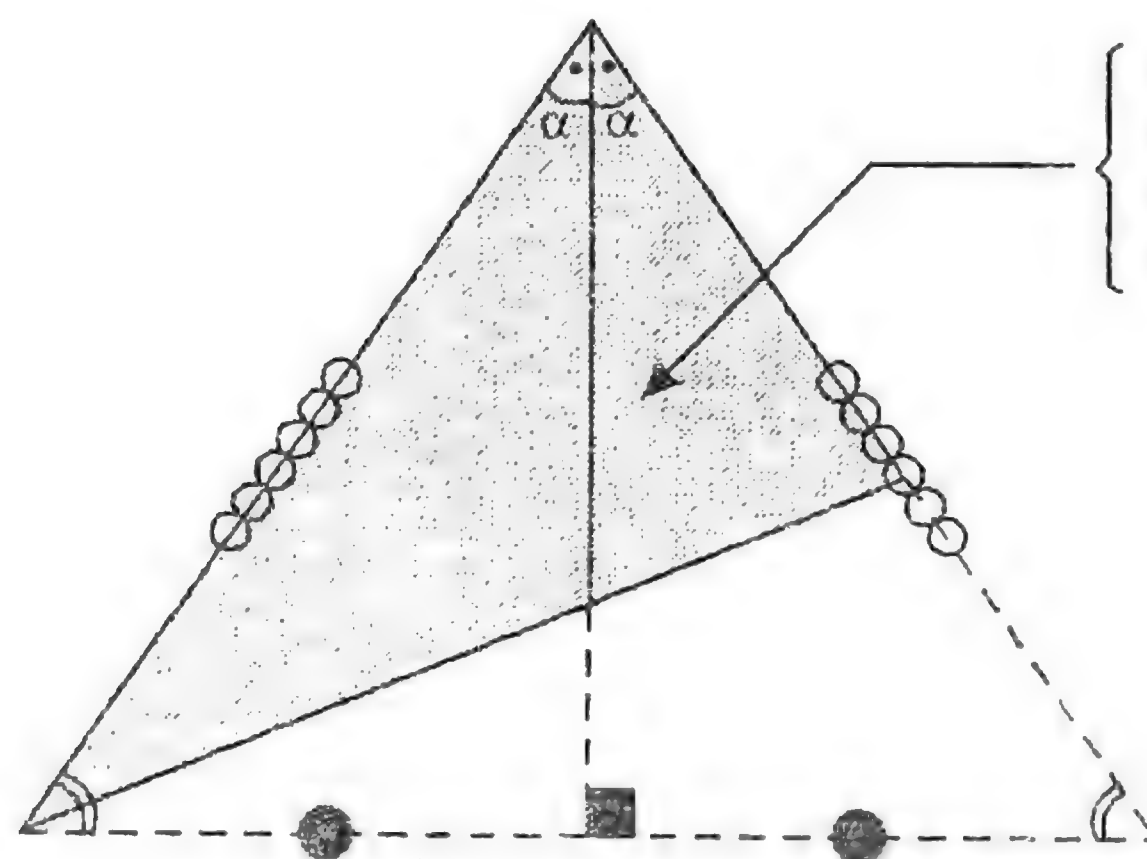
Quando se observe en un triángulo una bisectriz interior, se buscará completarlo a un triángulo isósceles de la siguiente manera:



Se hará



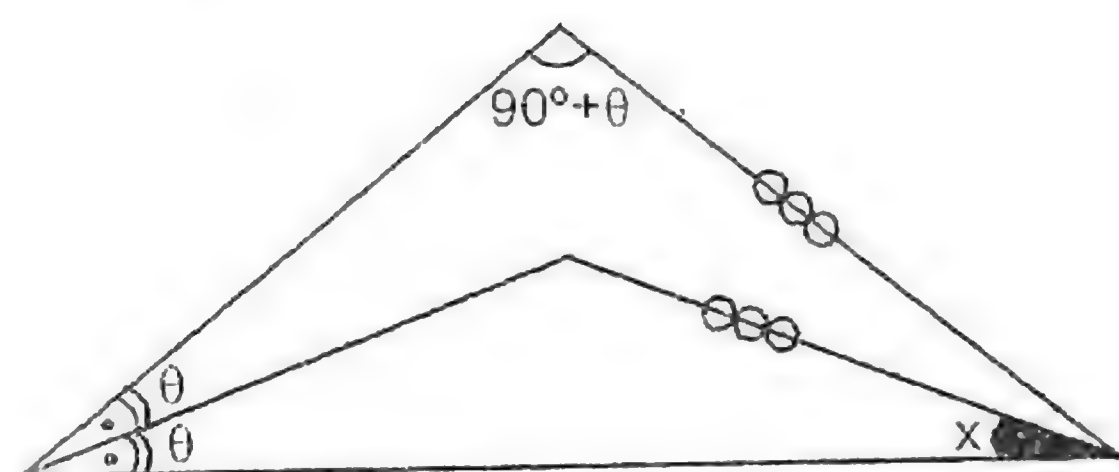
Se obtiene



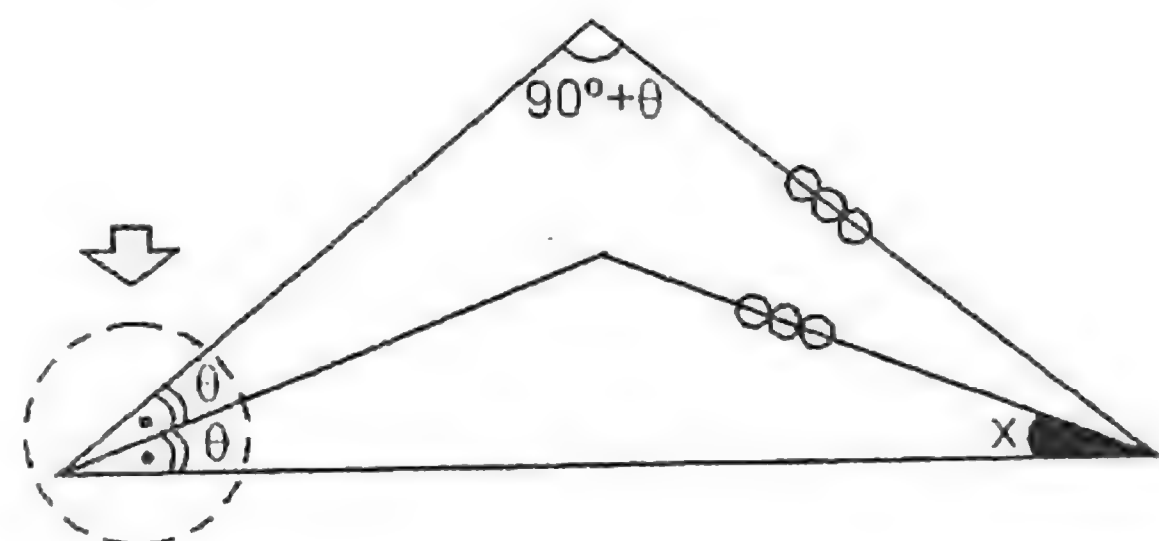
- * Mediana
- * Altura
- * Bisectriz Interior
- * Mediatriz

TEMPO N° 1

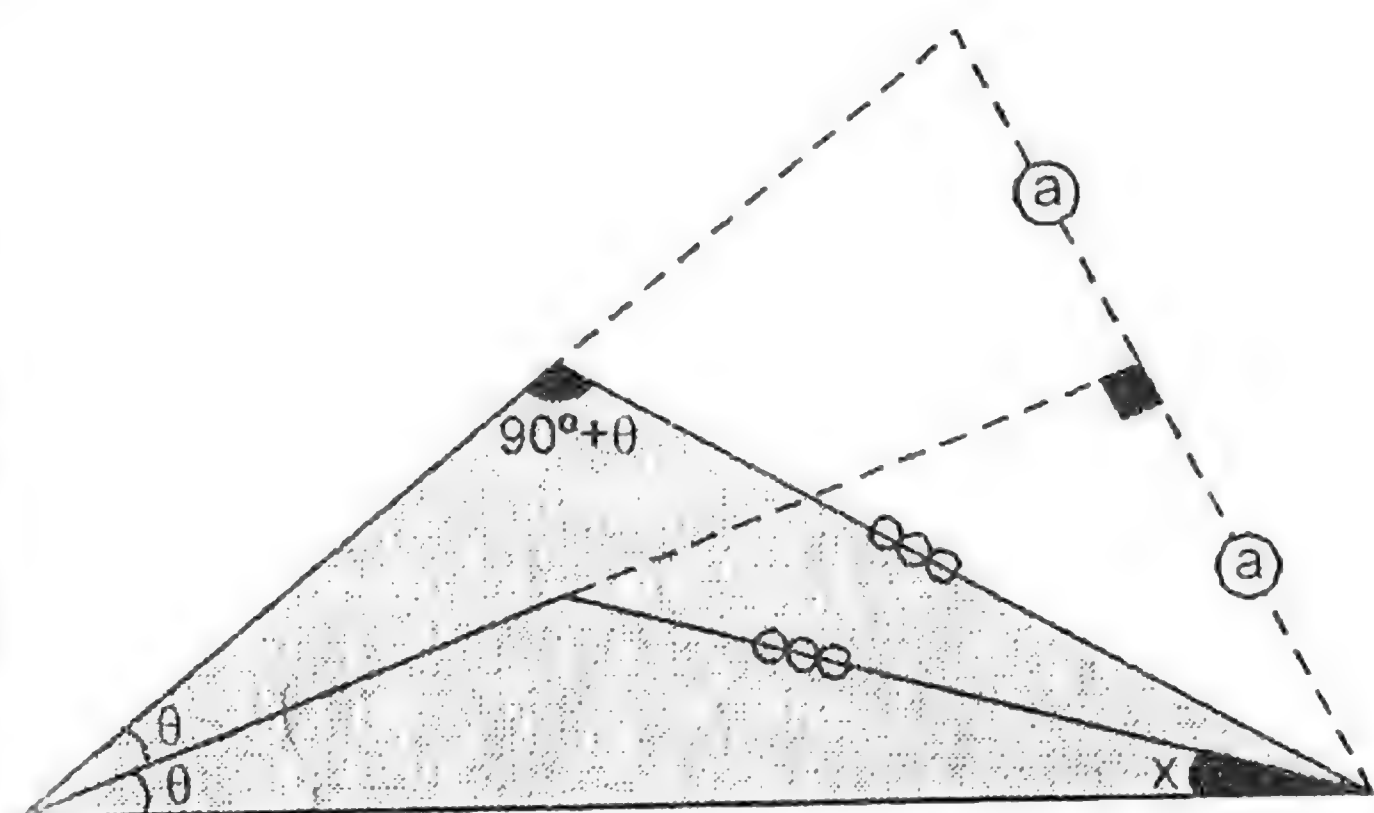
ángulo "x"

**SOLUCIÓN:**

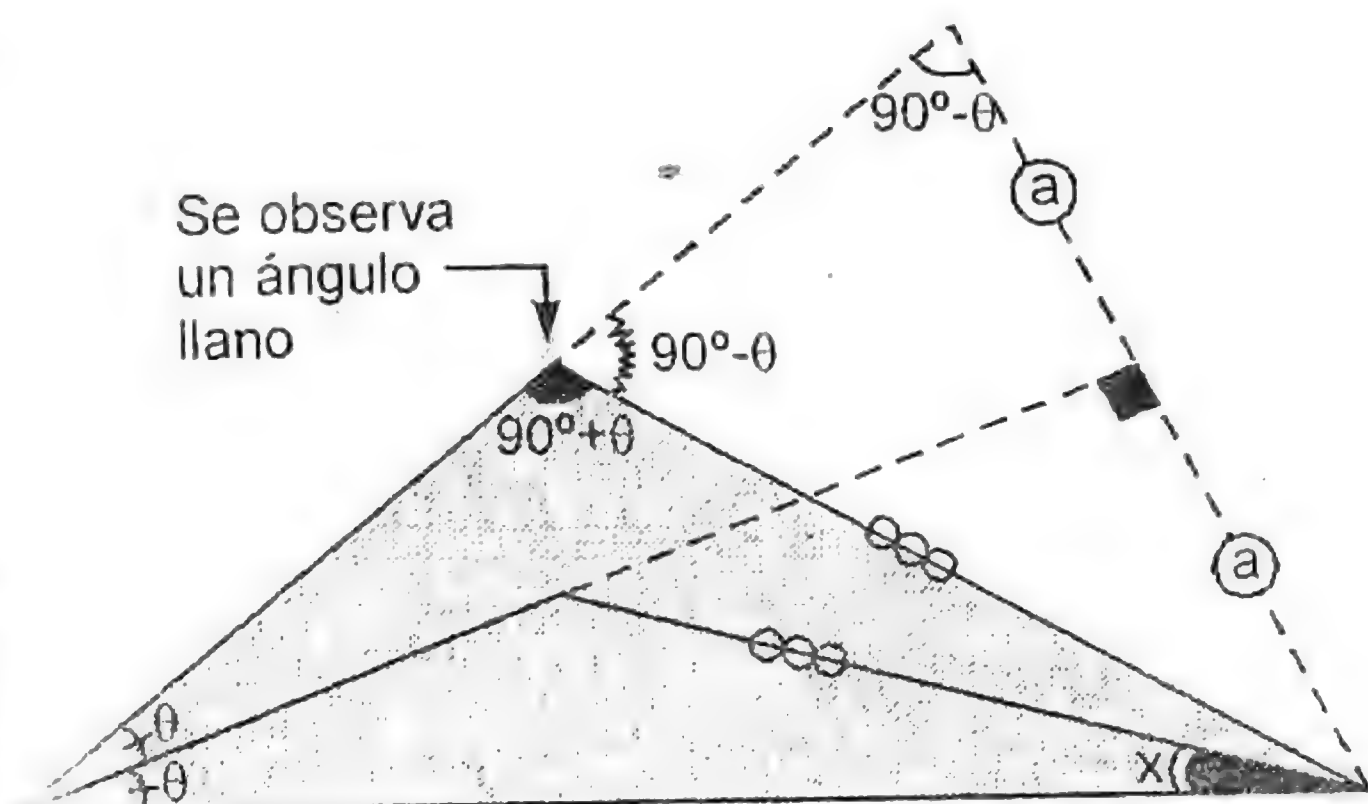
Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.



Paso N° 1: Según el criterio #2, lo completamos para obtener un triángulo isósceles de la siguiente manera.

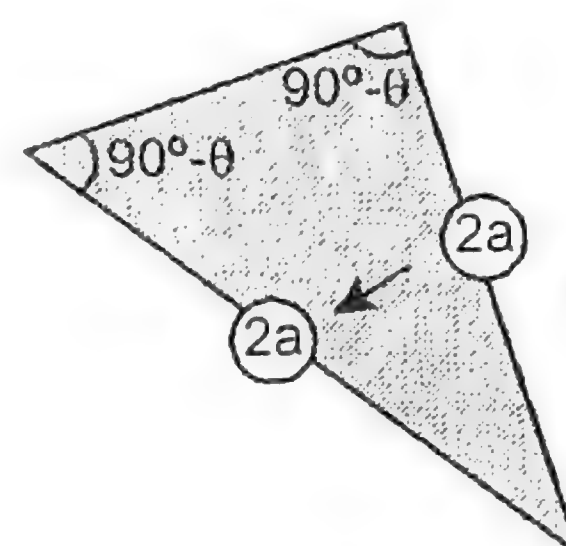
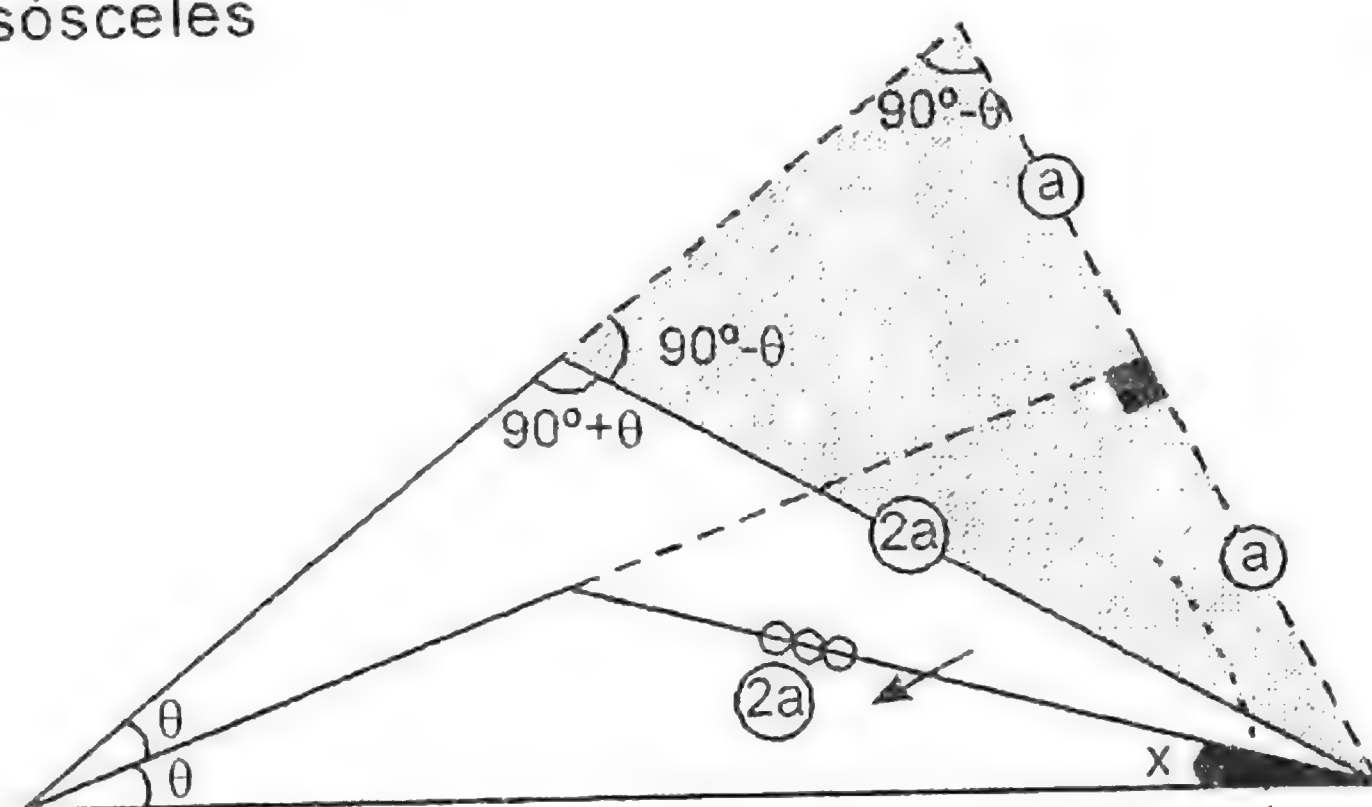


Paso N° 2: Completamos ángulos internos en la figura.

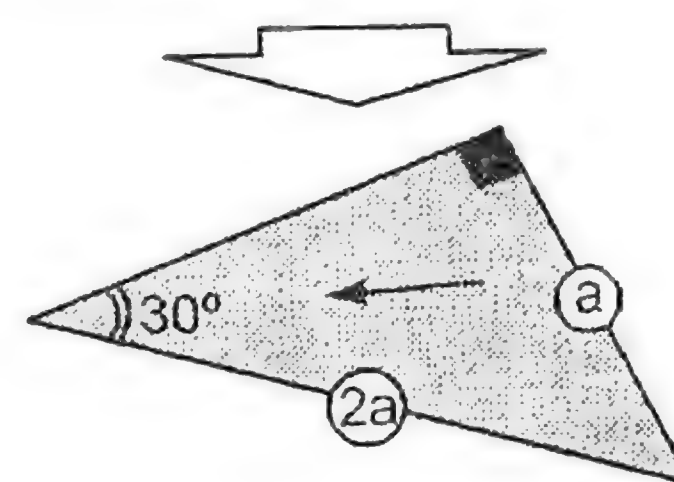
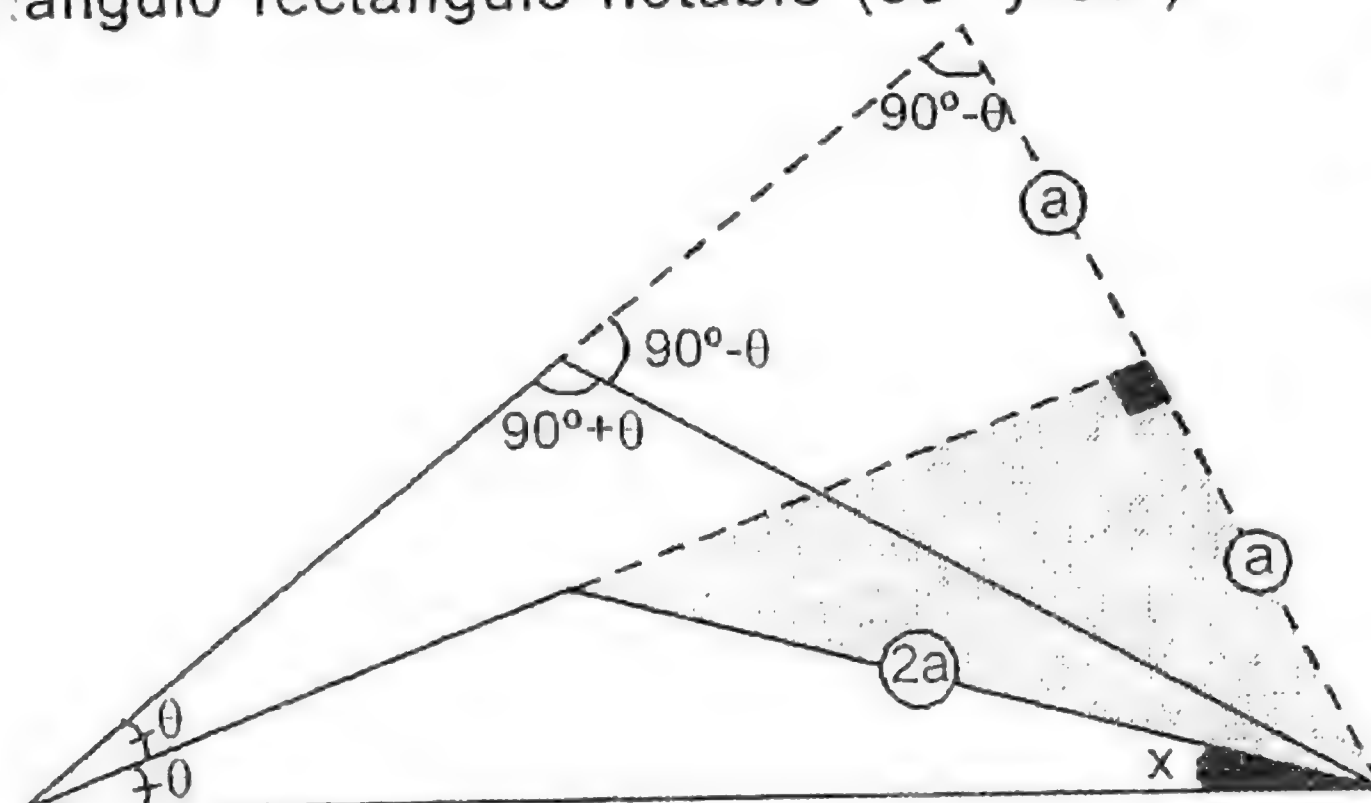


Se observa un ángulo llano

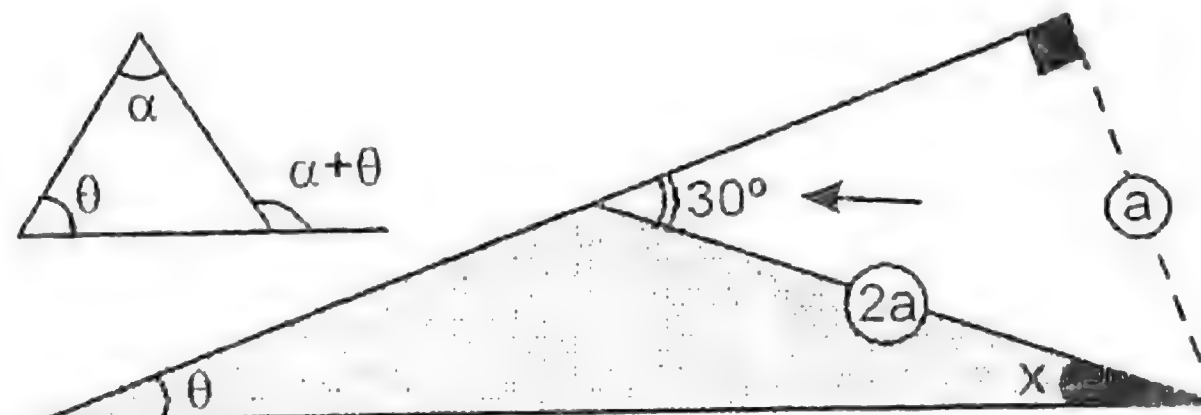
Paso N° 3: En la figura se observa un triángulo isósceles



Paso N° 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)

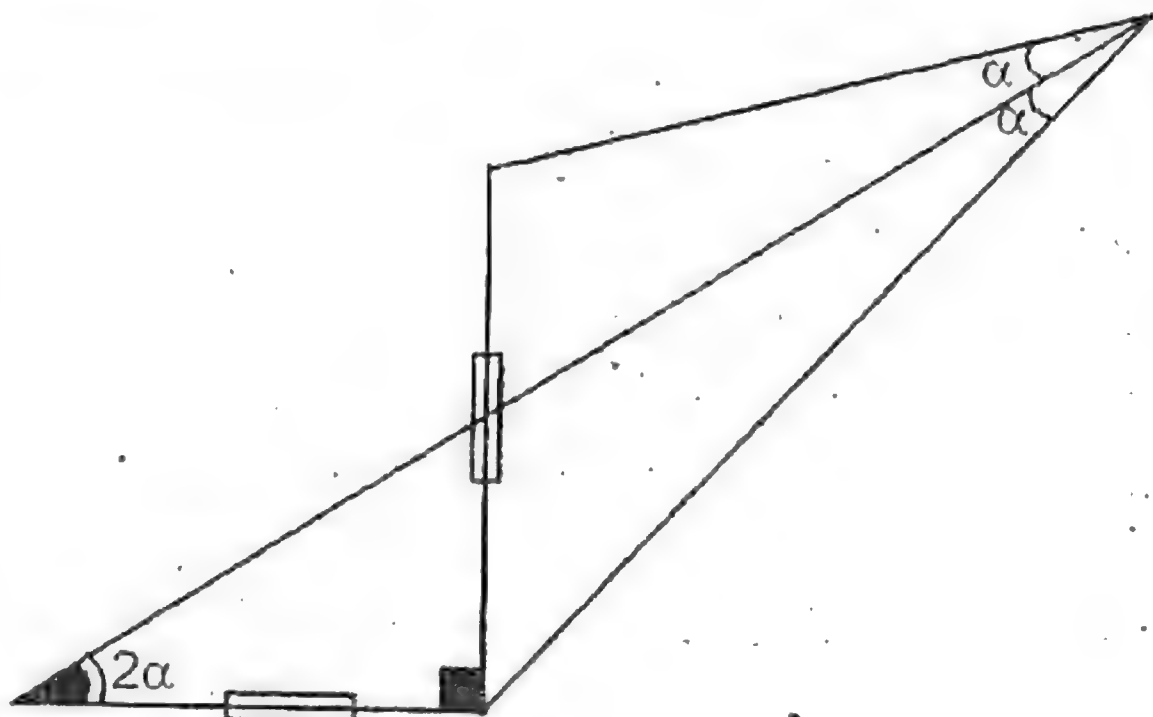


Paso N° 5: Finalmente se tiene en la figura, un triángulo que se presenta como:

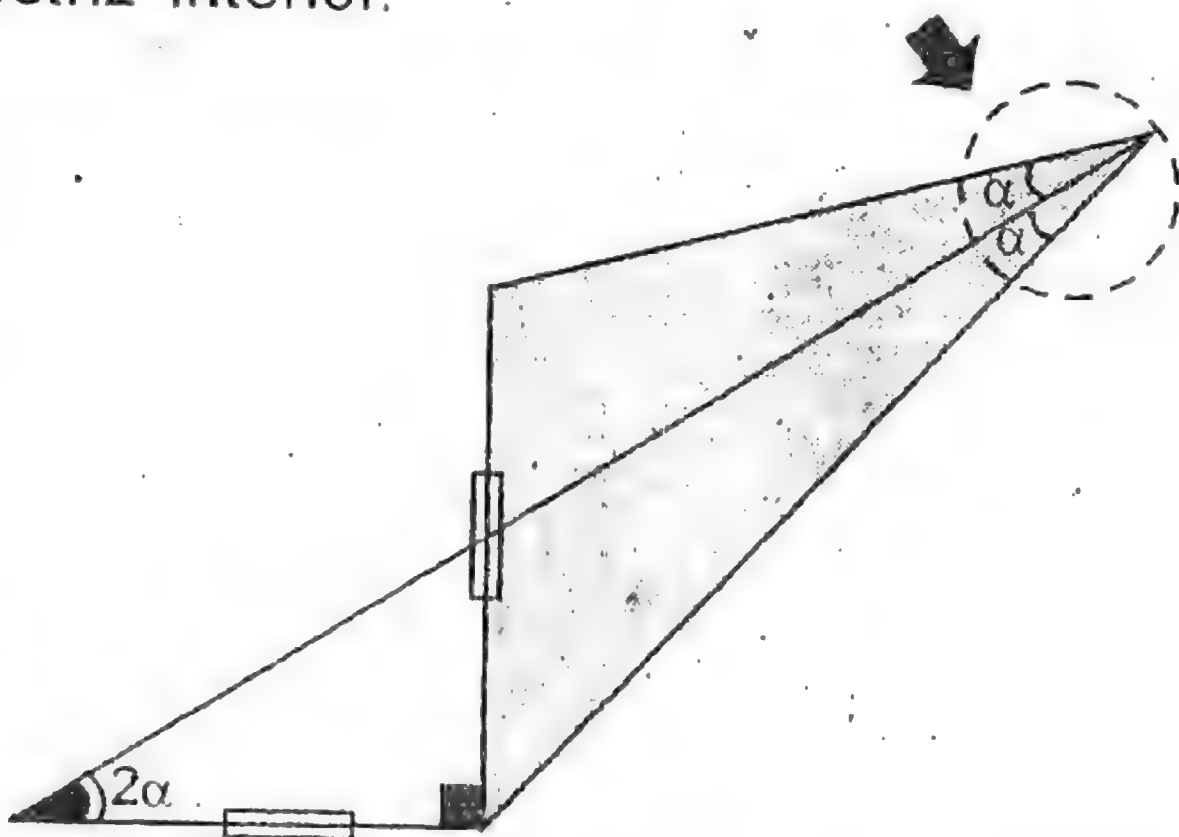
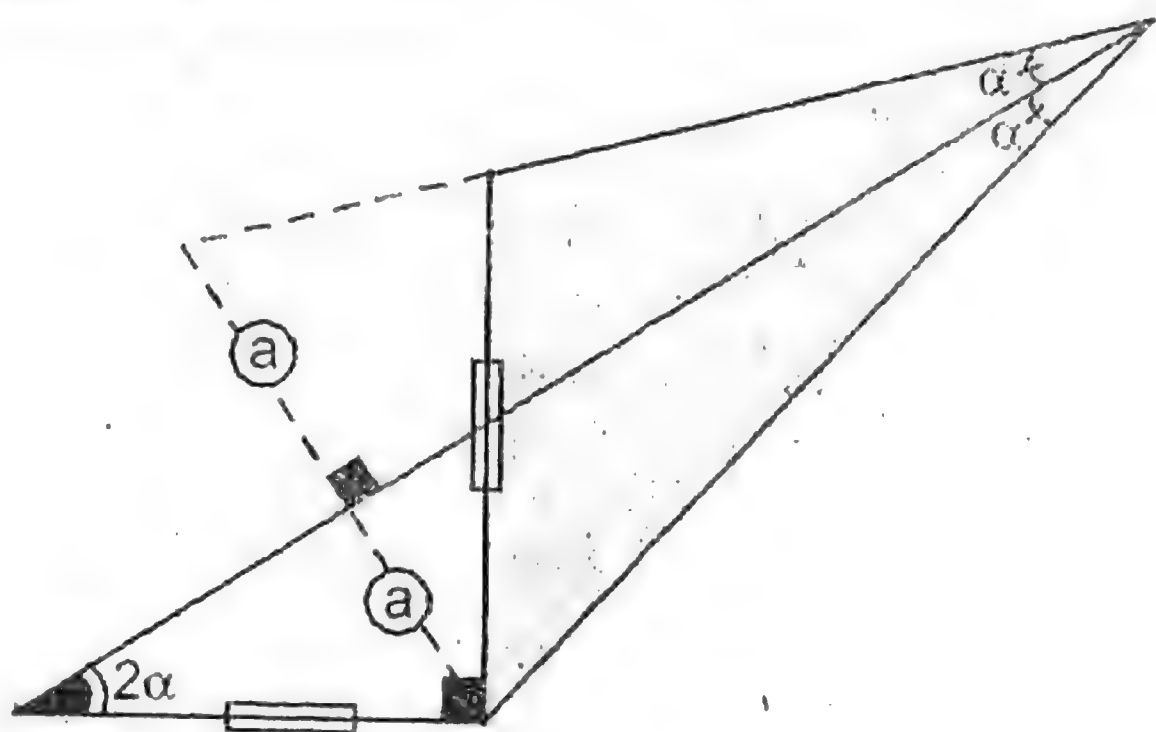
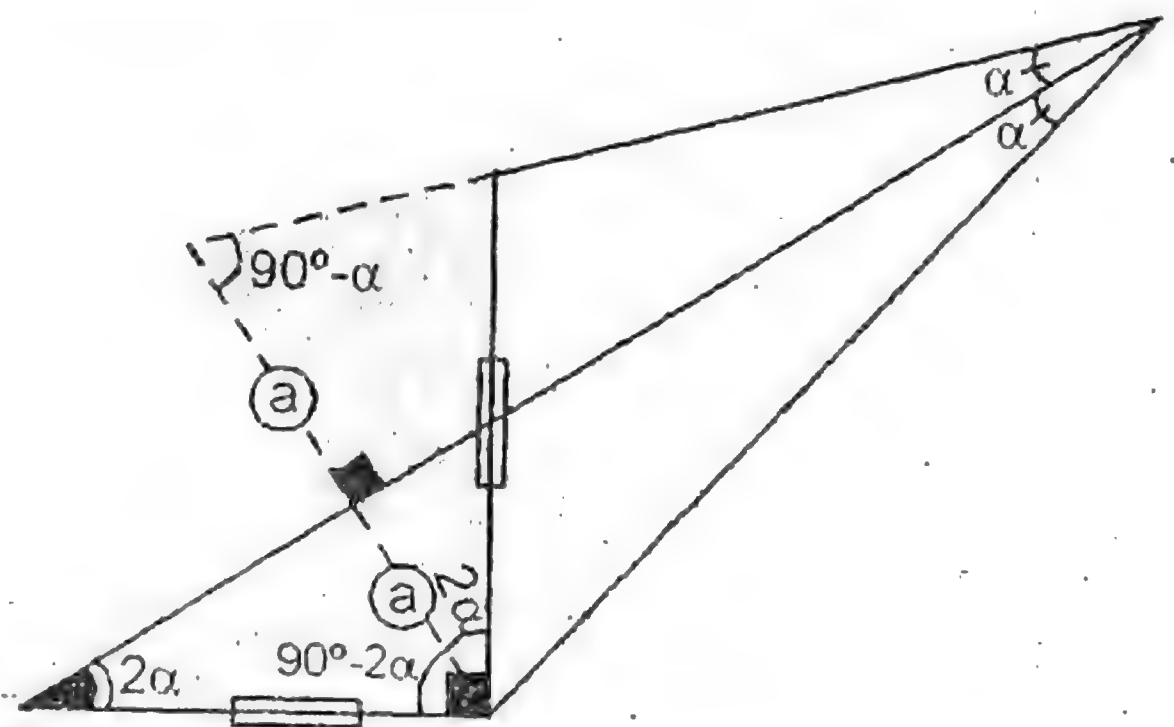
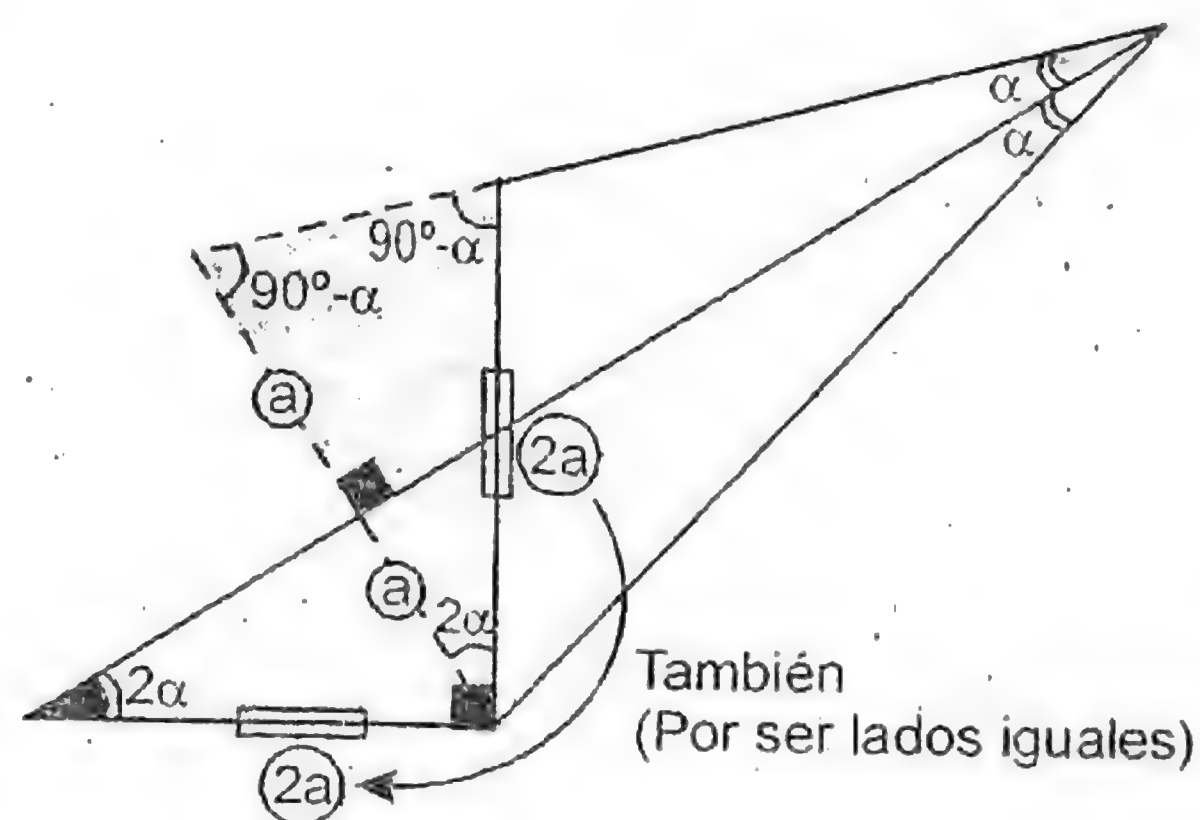
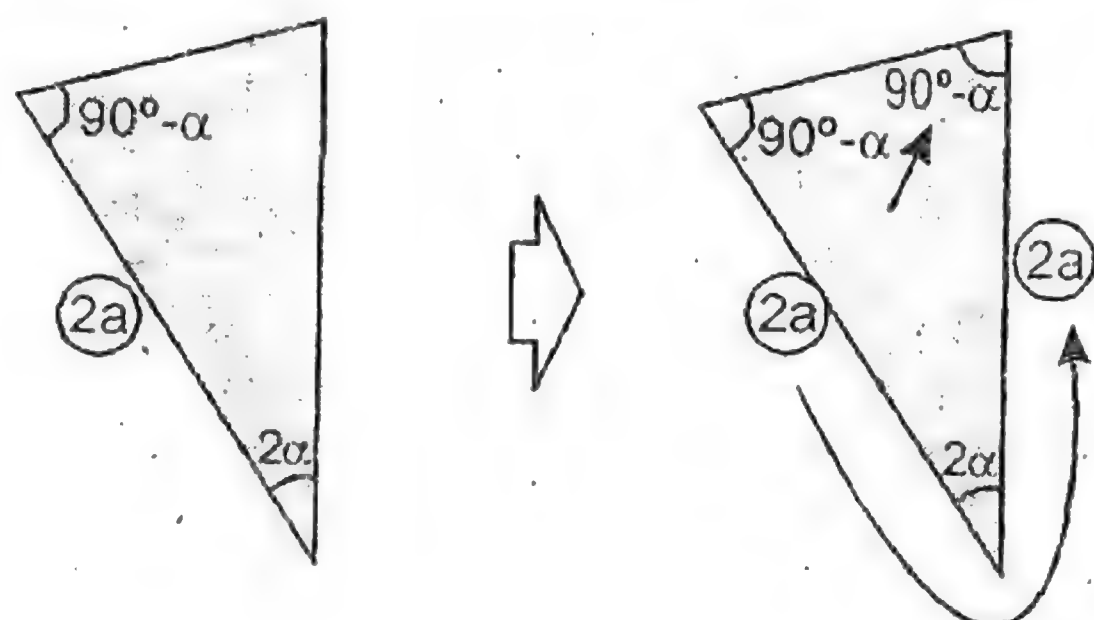
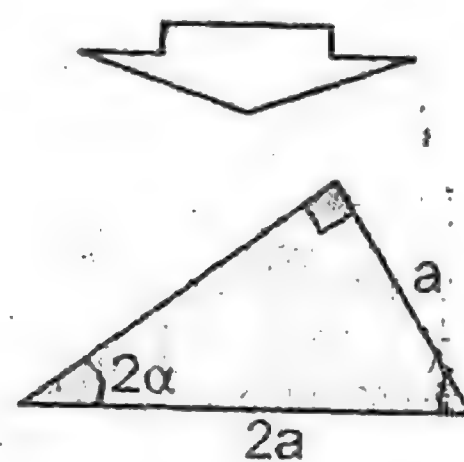
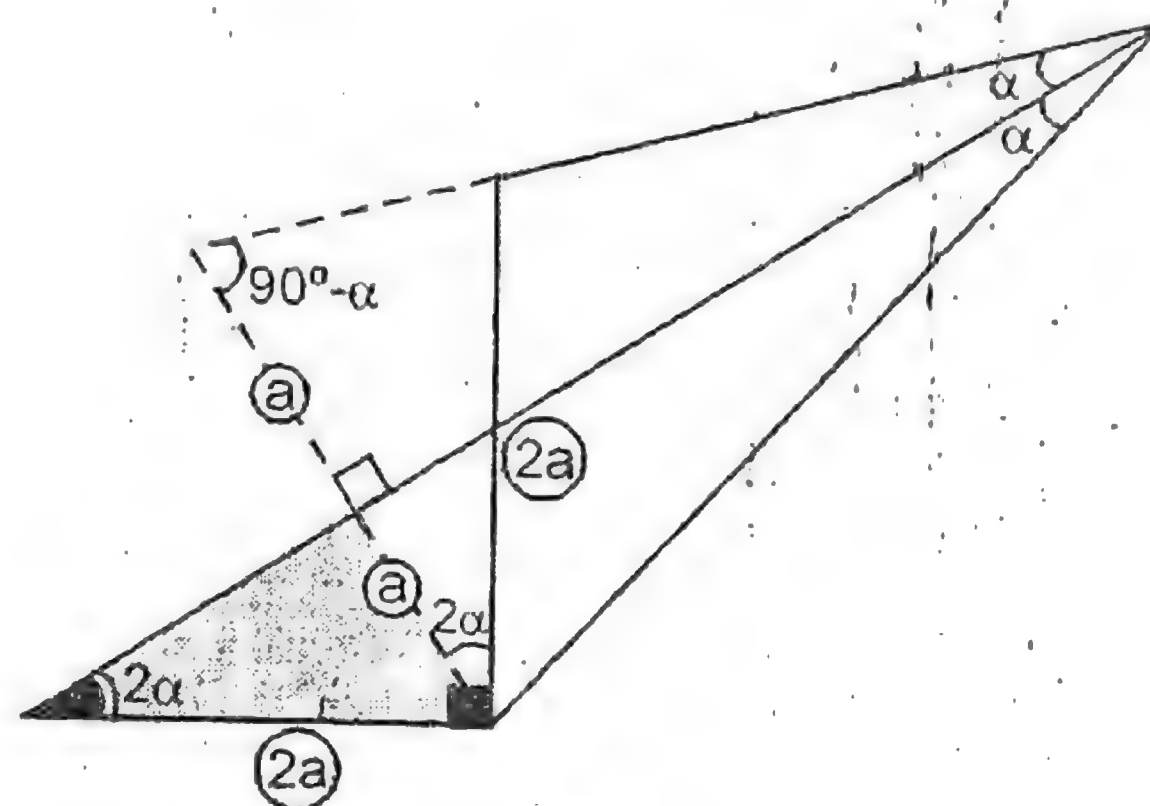
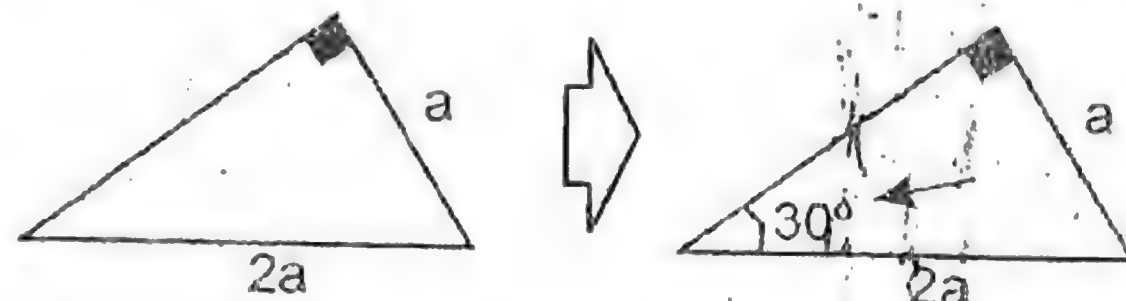


$$\Rightarrow \theta + x = 30^\circ$$

$$x = 30^\circ - \theta$$

EJEMPLO N° 2Calcular " α "**SOLUCIÓN:**

Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.

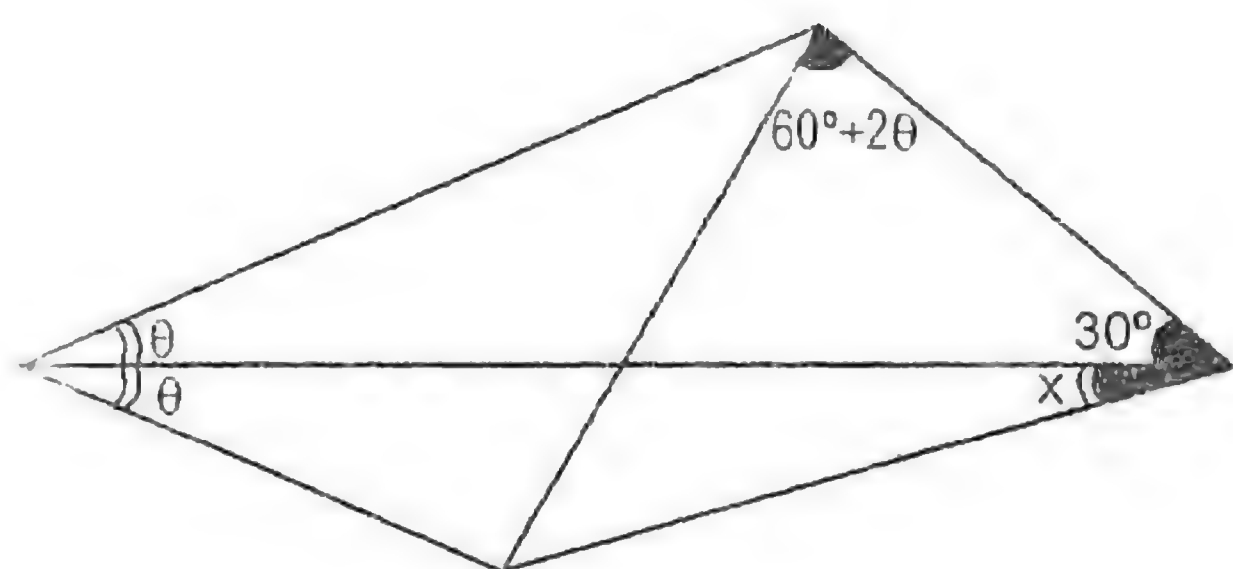
**Paso N° 1:** Completamos para obtener un triángulo isósceles.**Paso N° 2:** Ahora completamos los ángulos internos del triángulo.**Paso N° 3:** En la nueva figura, se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma.**Paso N° 4:** Luego se obtiene un triángulo rectángulo notable: (30° y 60°)

$$\Rightarrow 2\alpha = 30^\circ$$

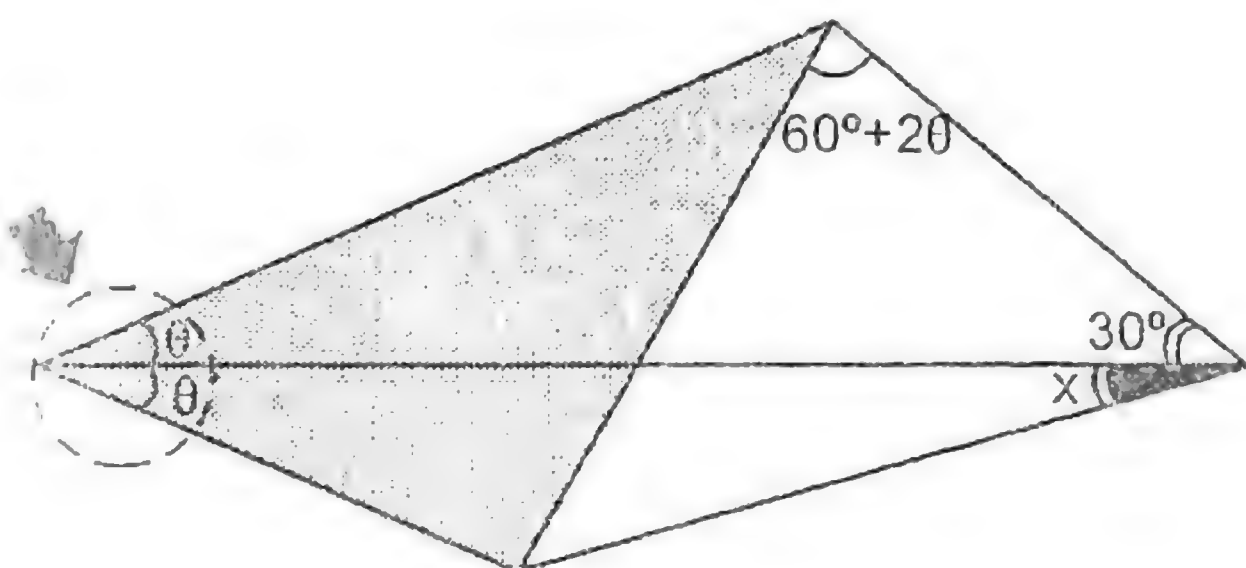
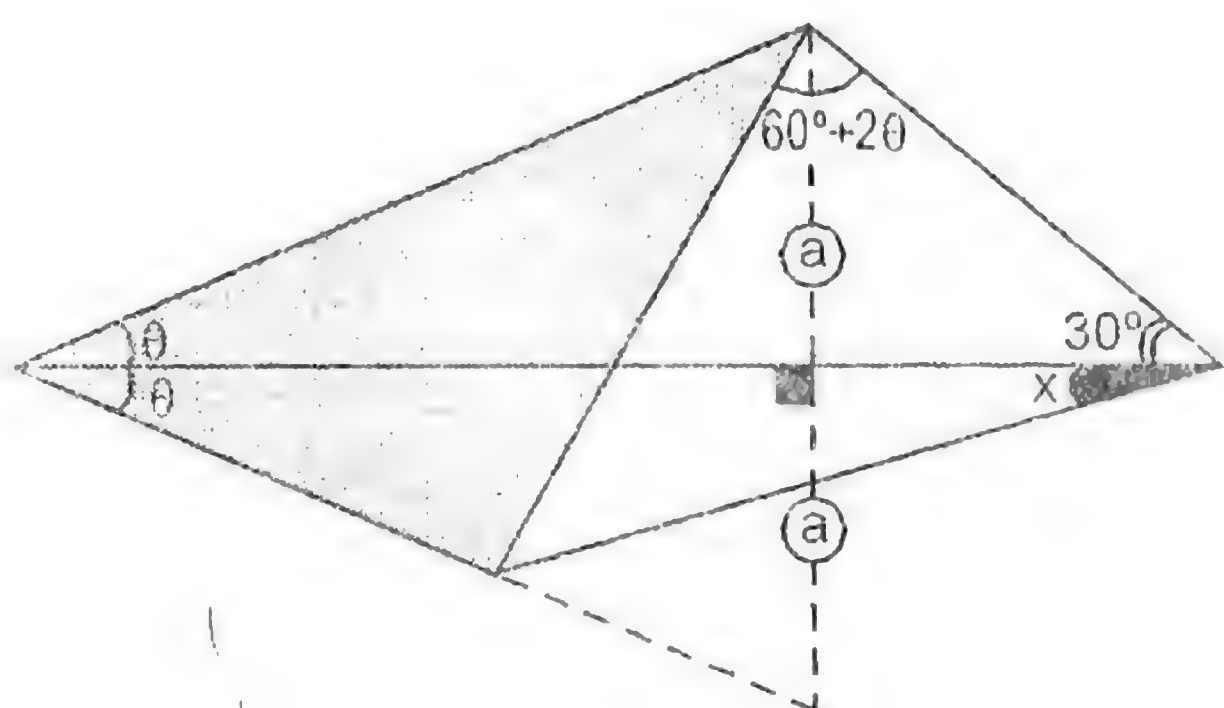
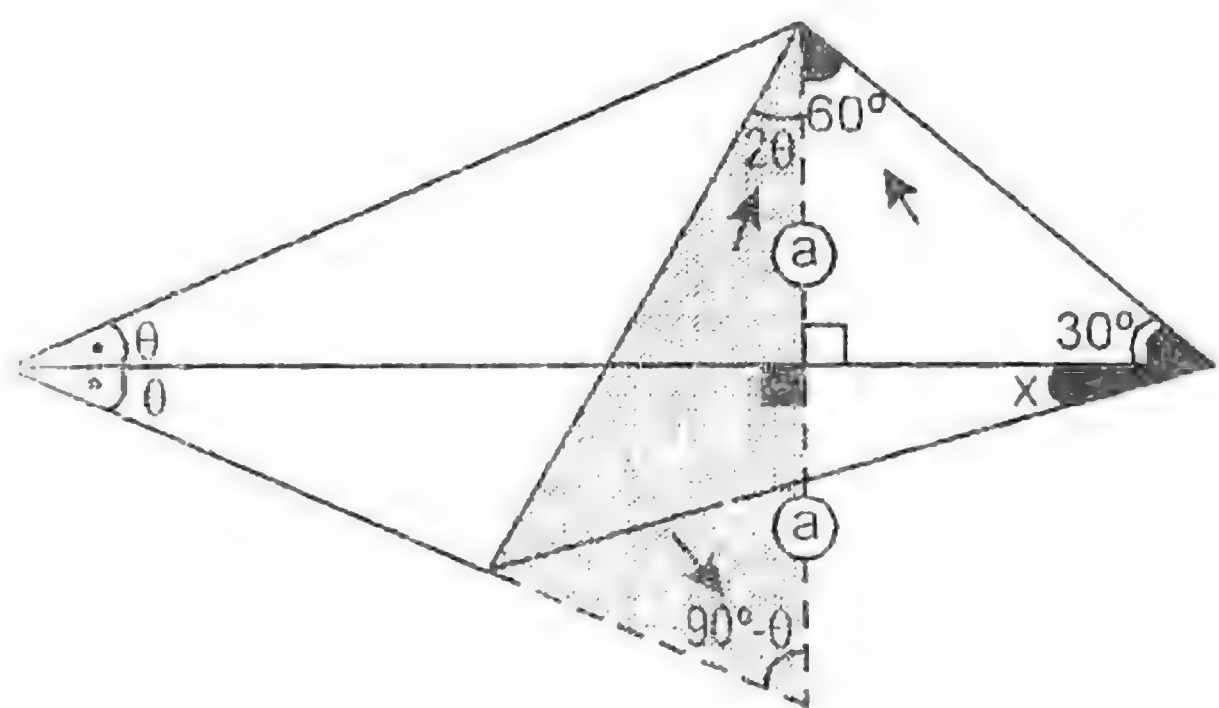
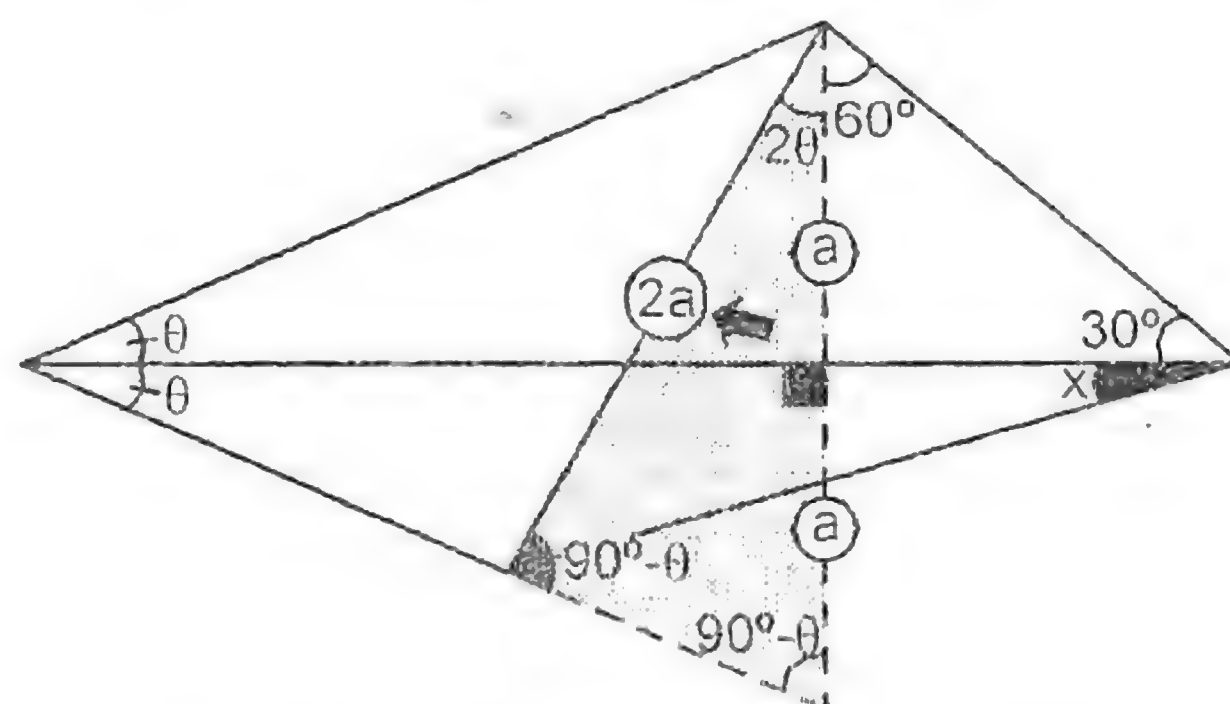
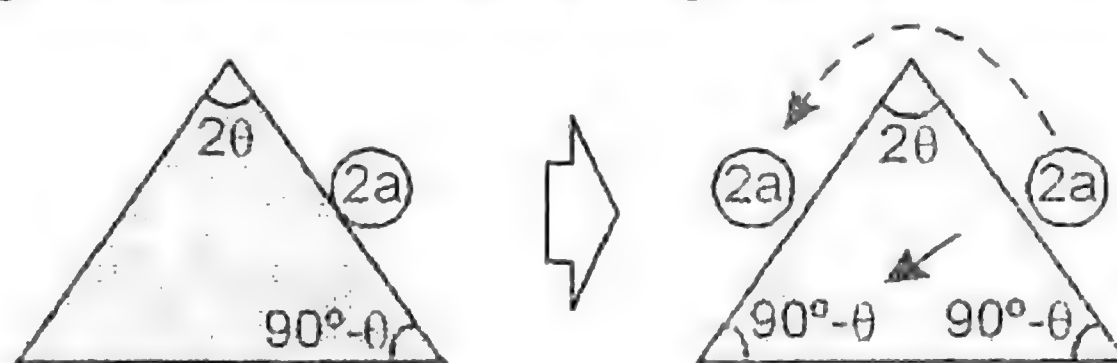
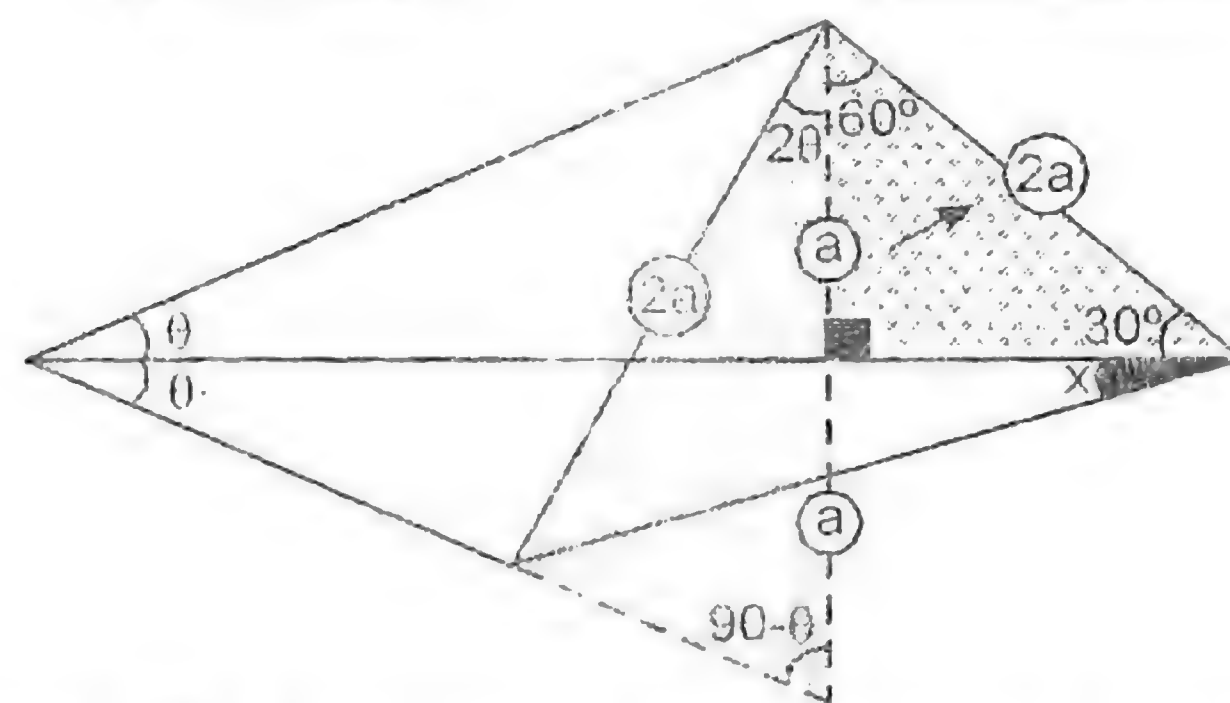
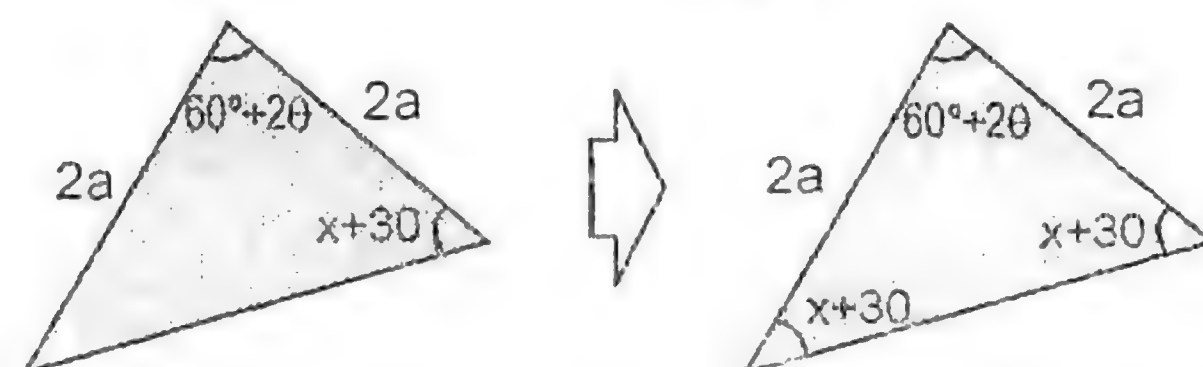
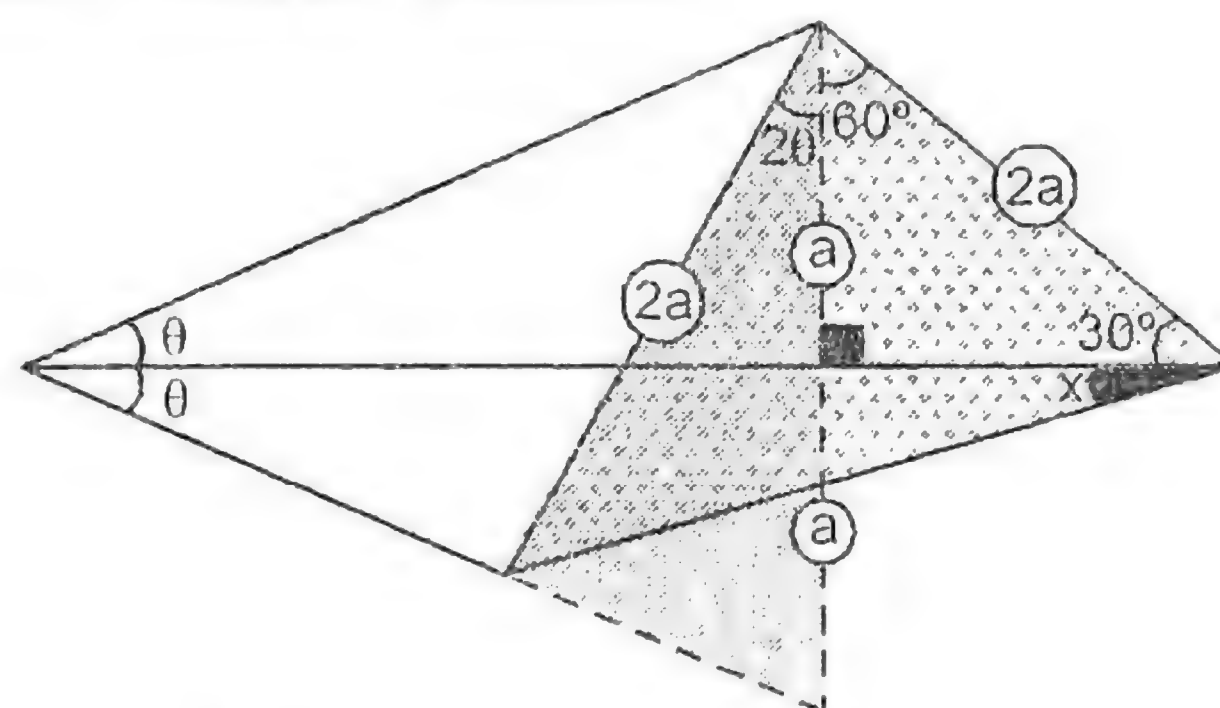
$$\alpha = 15^\circ$$

PROBLEMA N° 3

Calcular "x"

**SOLUCIÓN:**

Se observa, una bisectriz interior en la figura.

**Paso N° 1:** Lo completamos para obtener un triángulo isósceles.**Paso N° 2:** Completamos ángulos internos en la figura.**Paso N° 3:** En la nueva figura se observa, un triángulo isósceles de la siguiente forma:**Paso N° 4:** Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)**Paso N° 5:** También se observa en la figura, un nuevo triángulo isósceles.

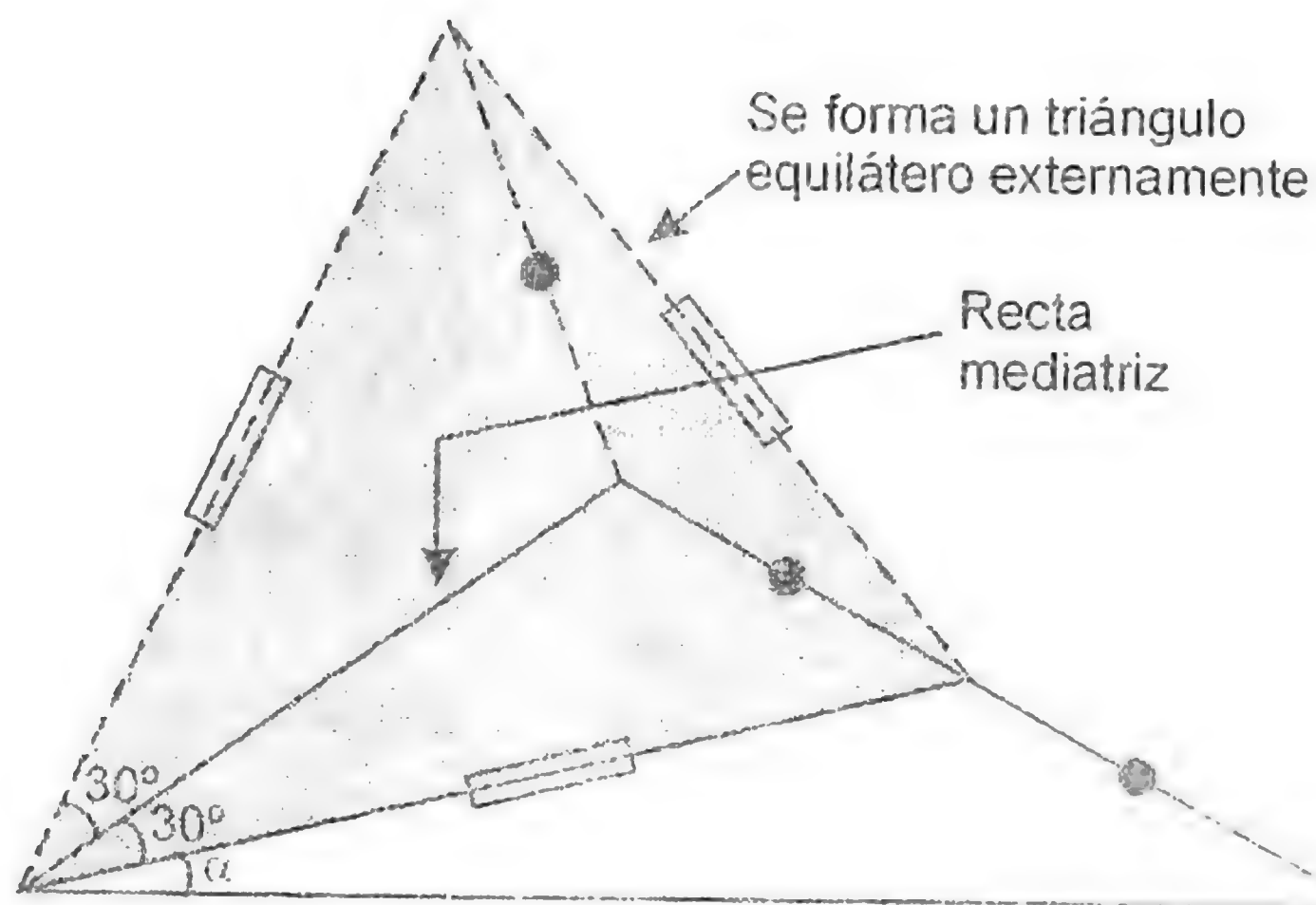
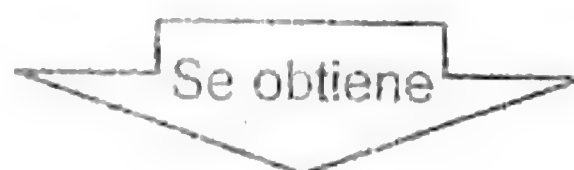
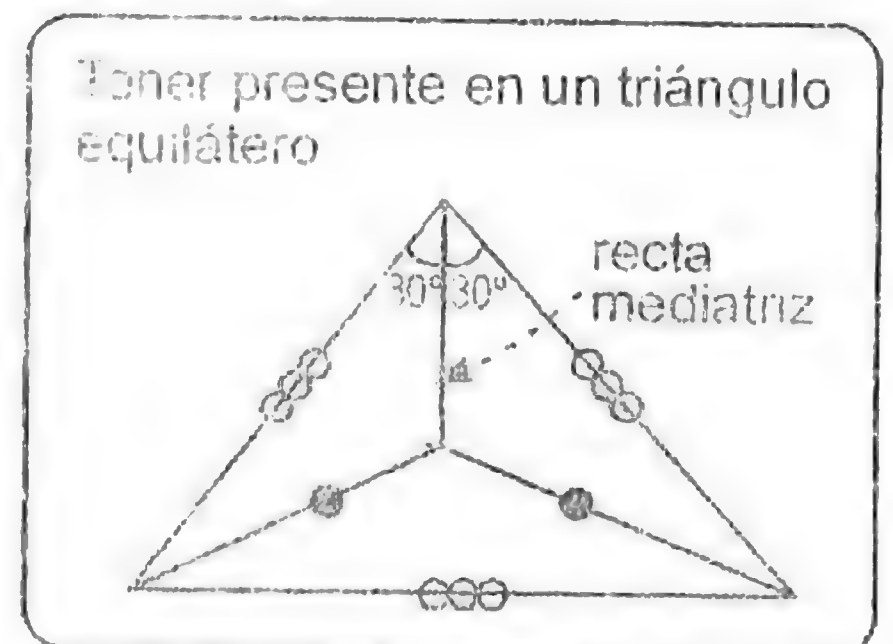
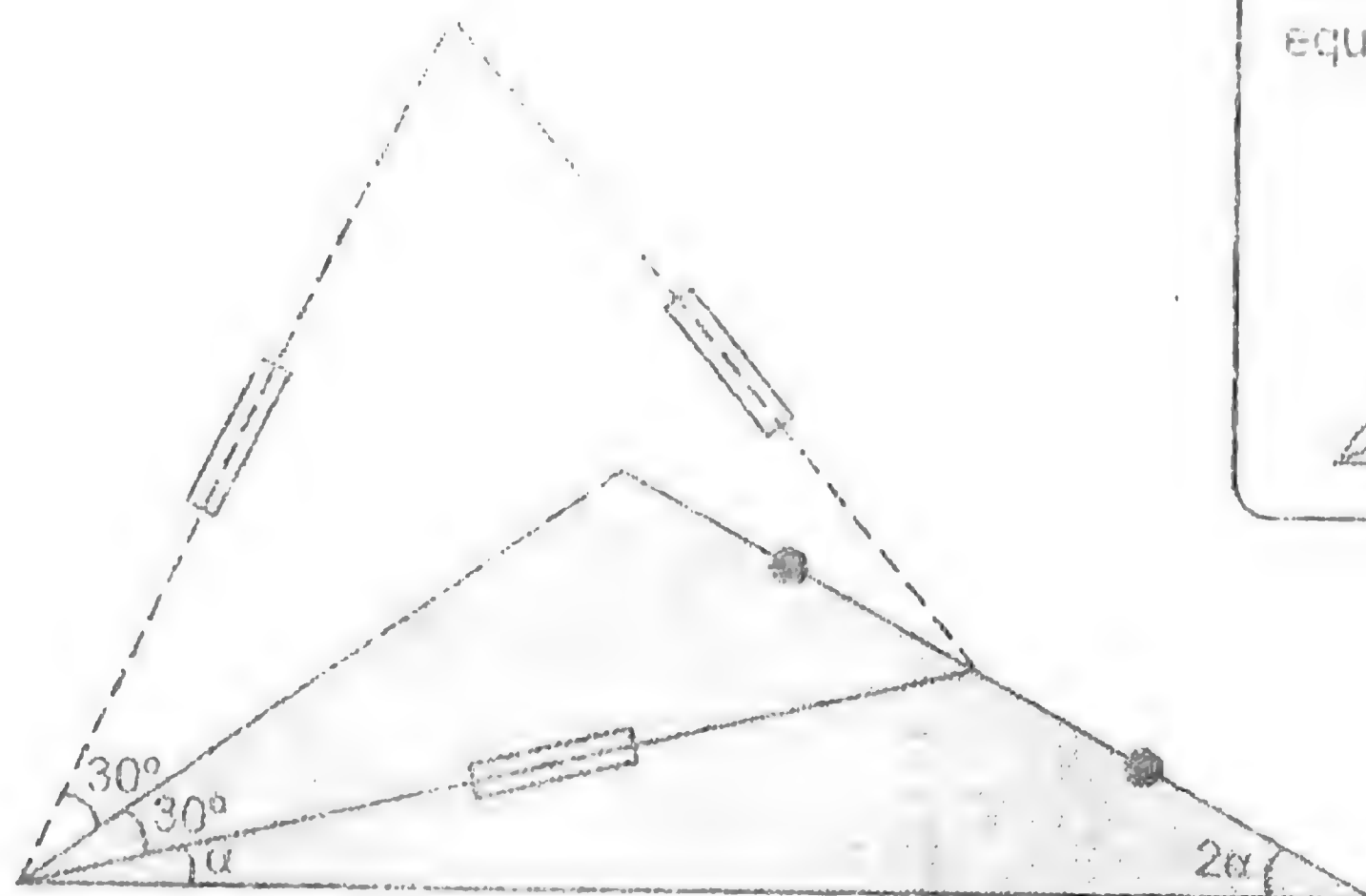
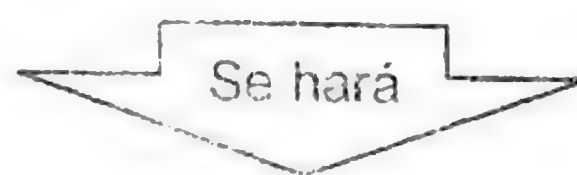
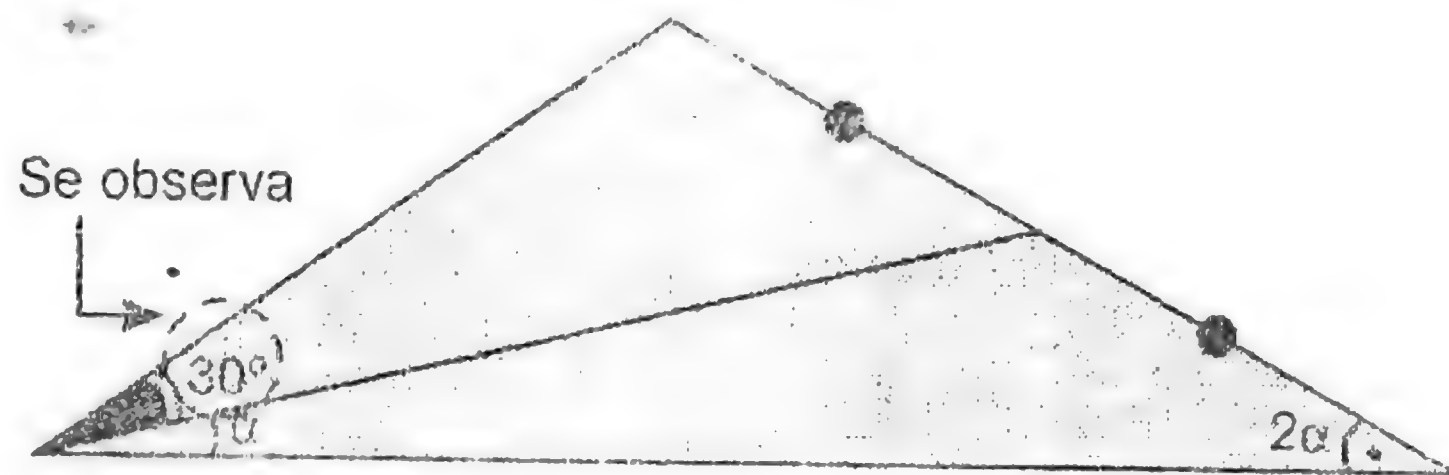
$$\therefore 60^\circ + 2\theta + x + 30^\circ + x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$2\theta + 2x = 60^\circ$$

$$x = 30^\circ - \theta$$

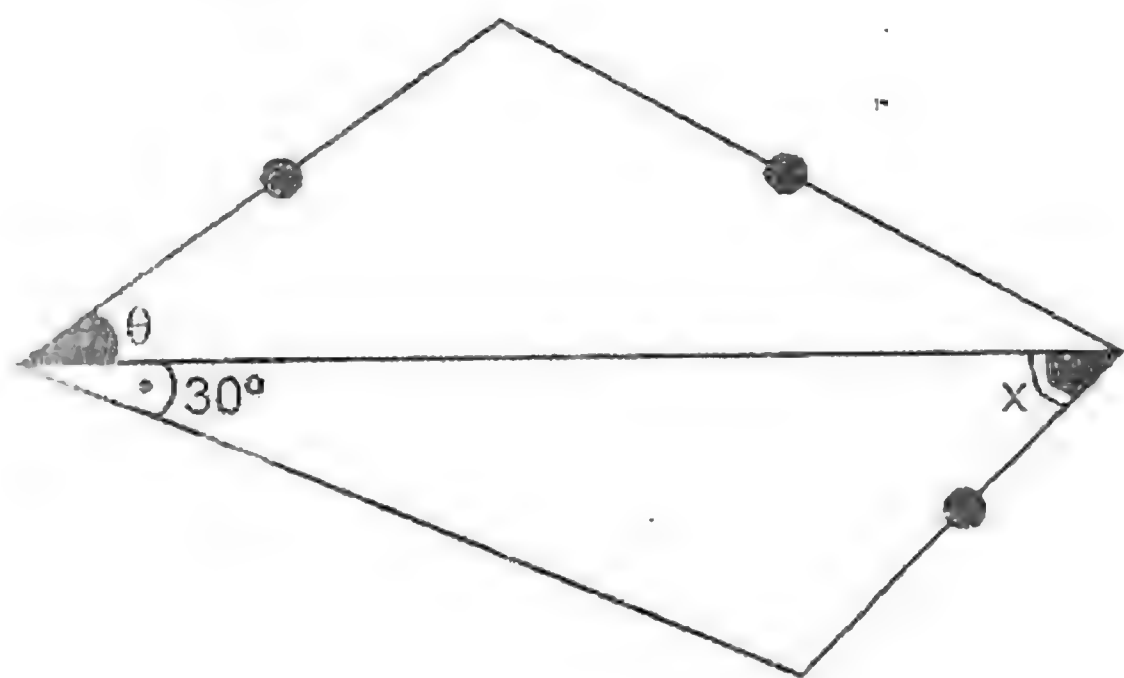
*3er Criterio***"COMPLETANDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO"**

Cuando se observa en un triángulo un ángulo de 30° y como éste valor es la mitad de 60° , se buscará formar externamente un triángulo equilátero, de la siguiente manera.



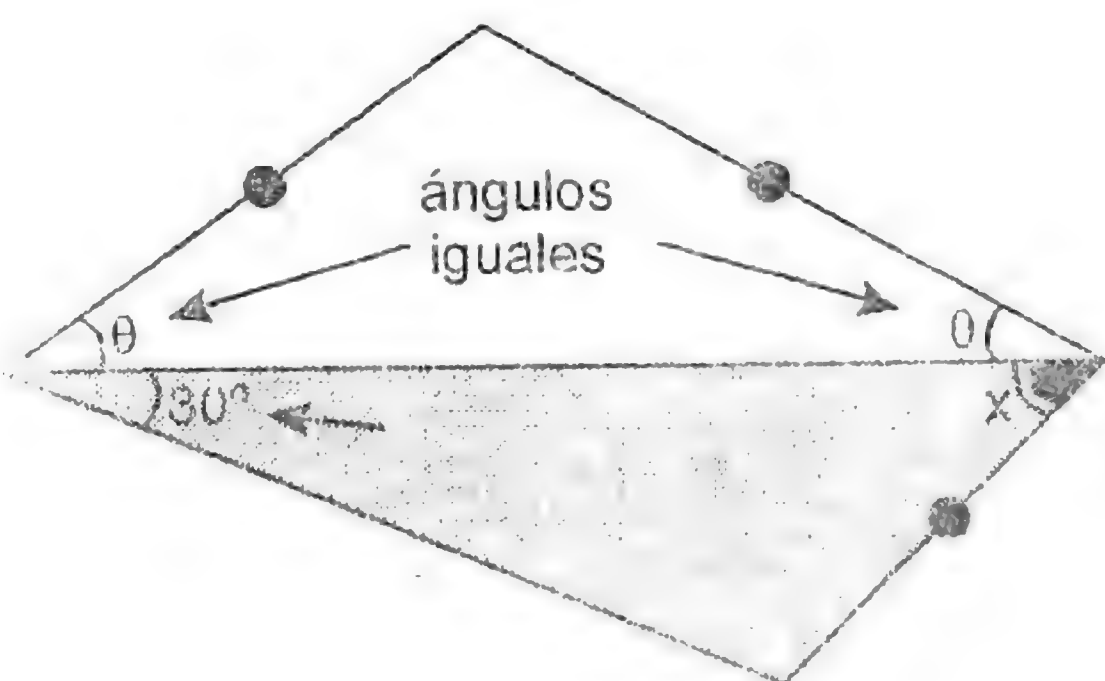
EMPLO N° 1

ángulo "x"

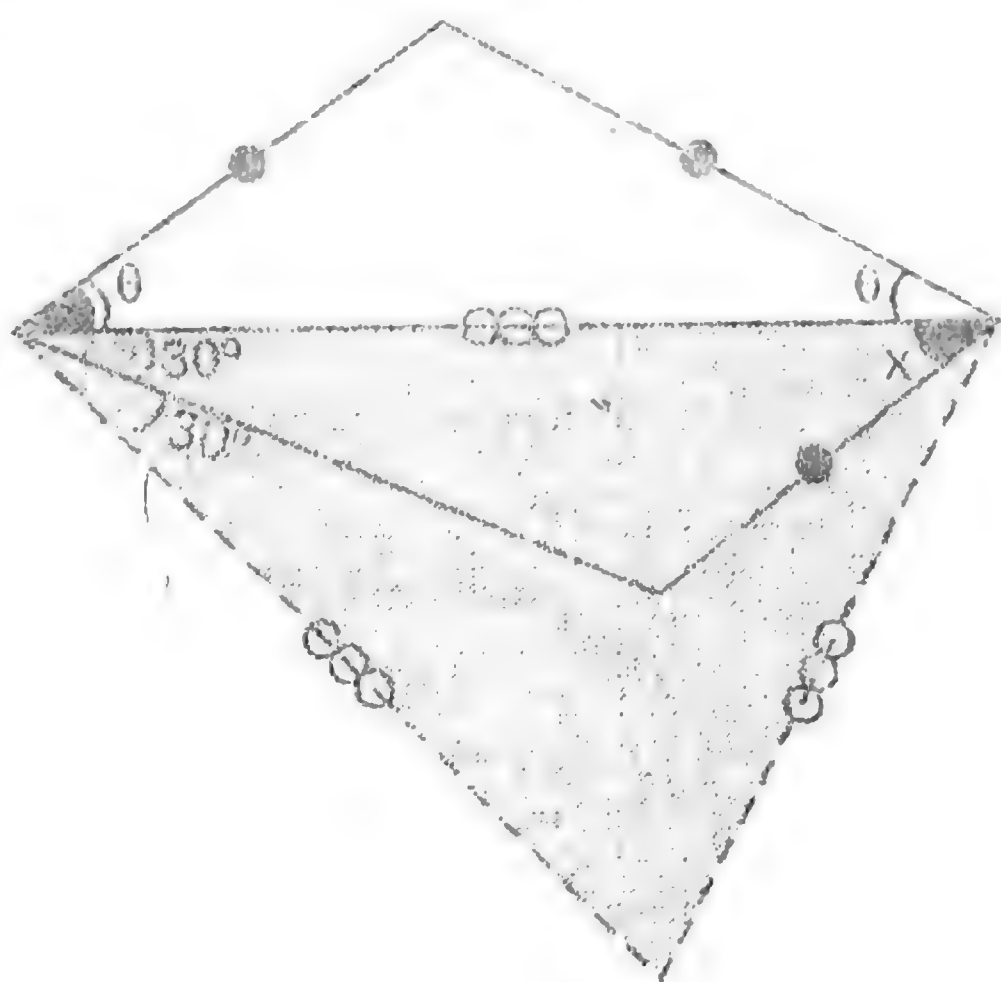


CONCLUSIÓN:

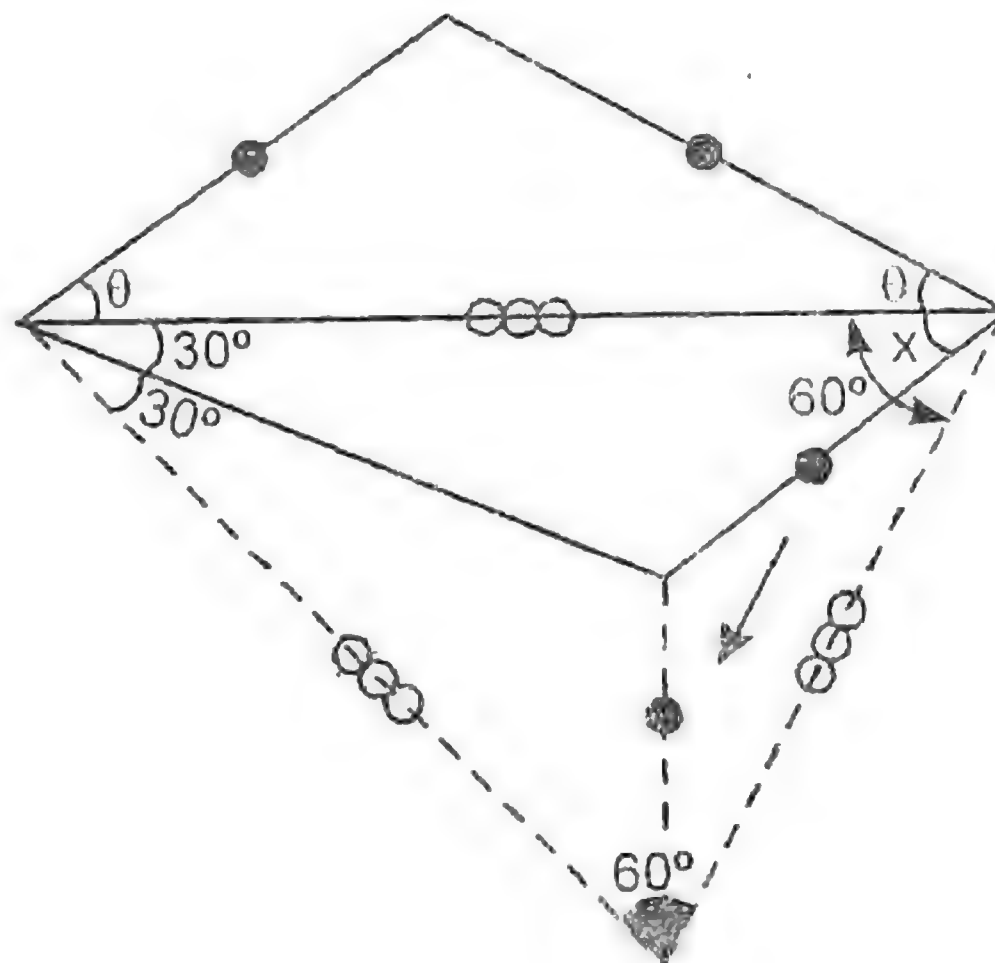
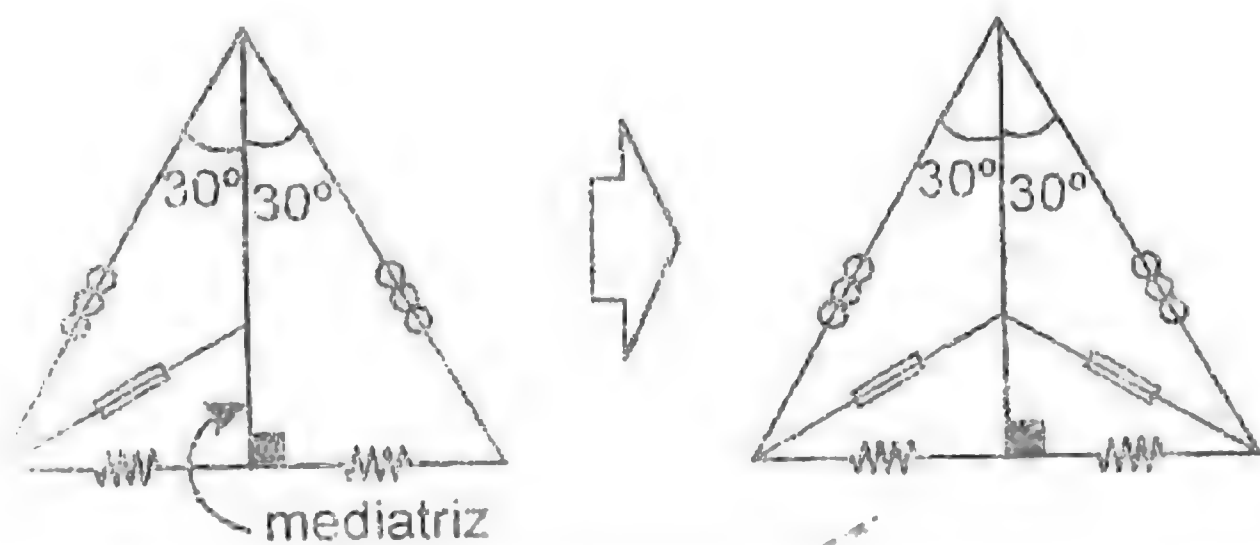
observa en la figura, un ángulo de 30°



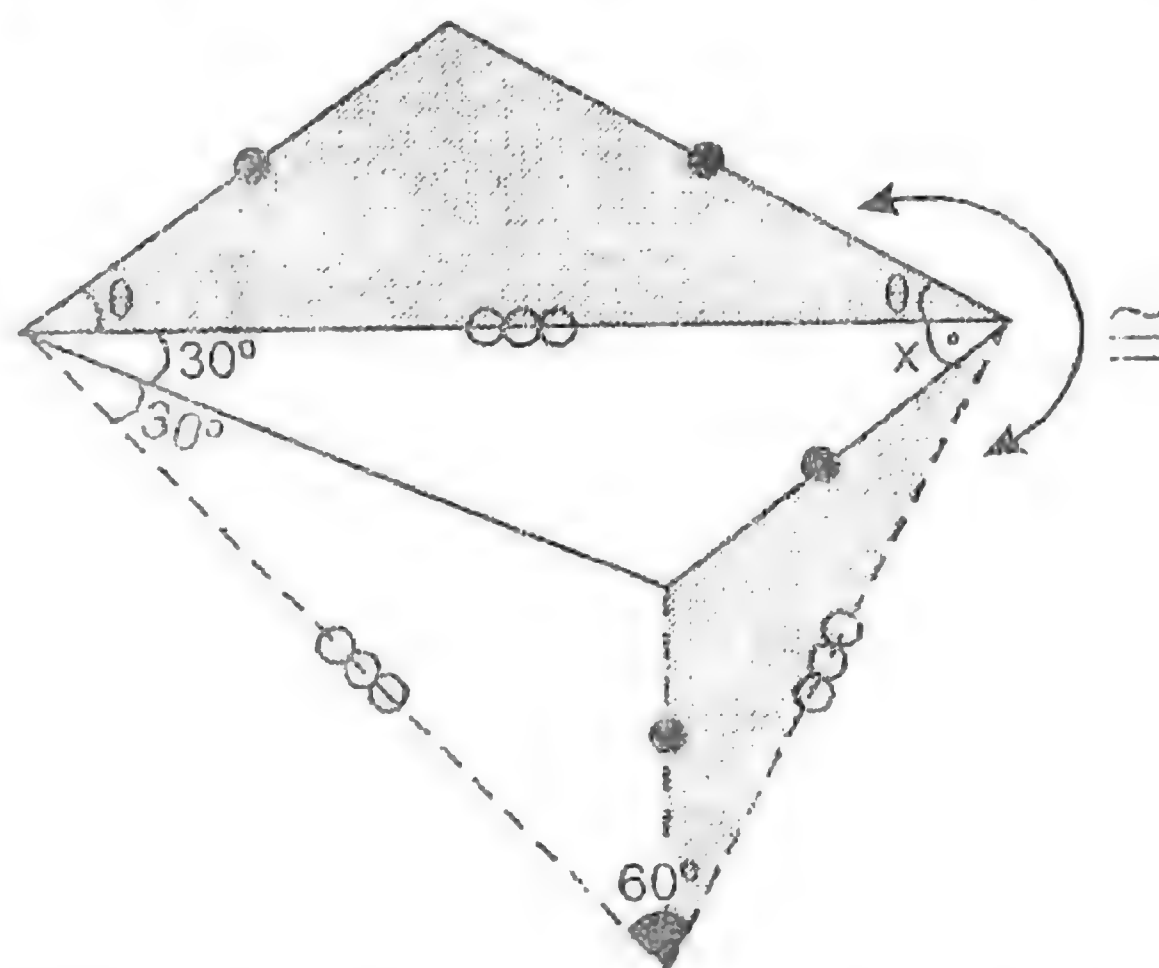
Paso N° 1: Según el criterio N° 3: formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.



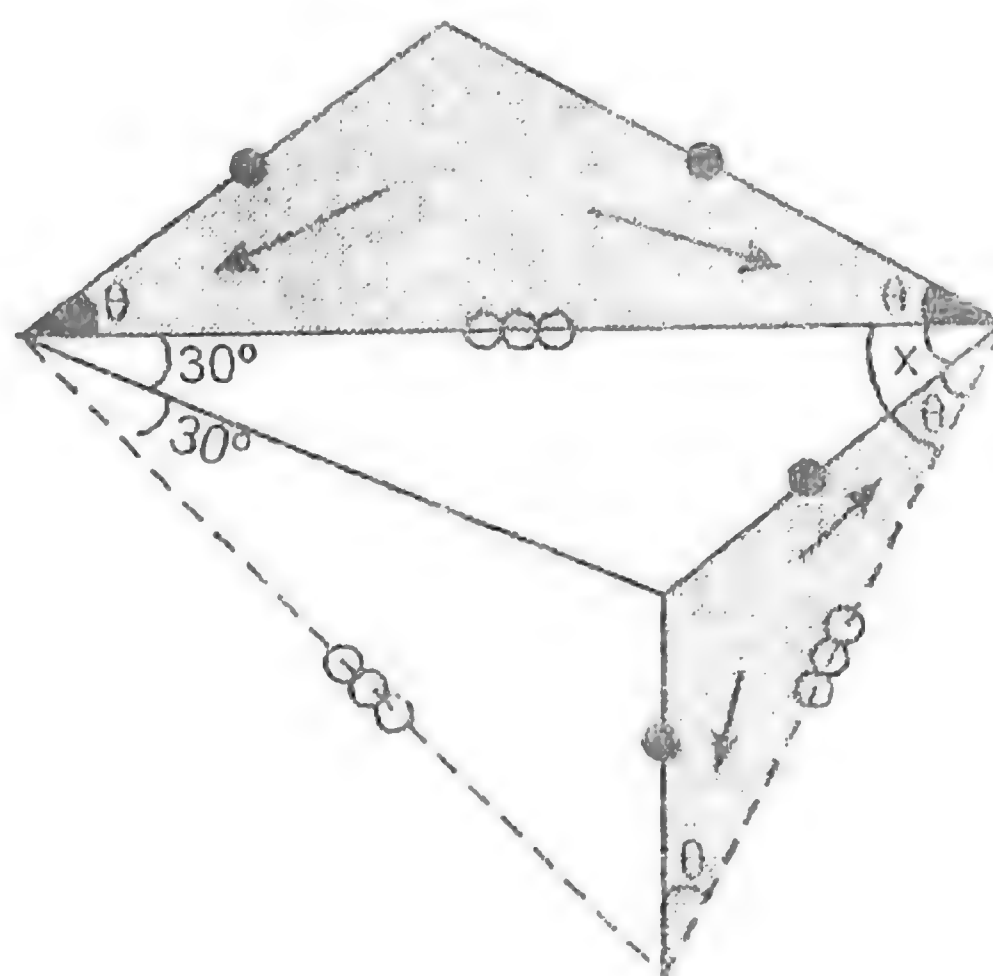
Paso N° 2: Sabemos que en todo triángulo equilátero, se cumple:



Paso N° 3: Se observa que se obtiene dos triángulos congruentes, caso (lado-lado-lado)



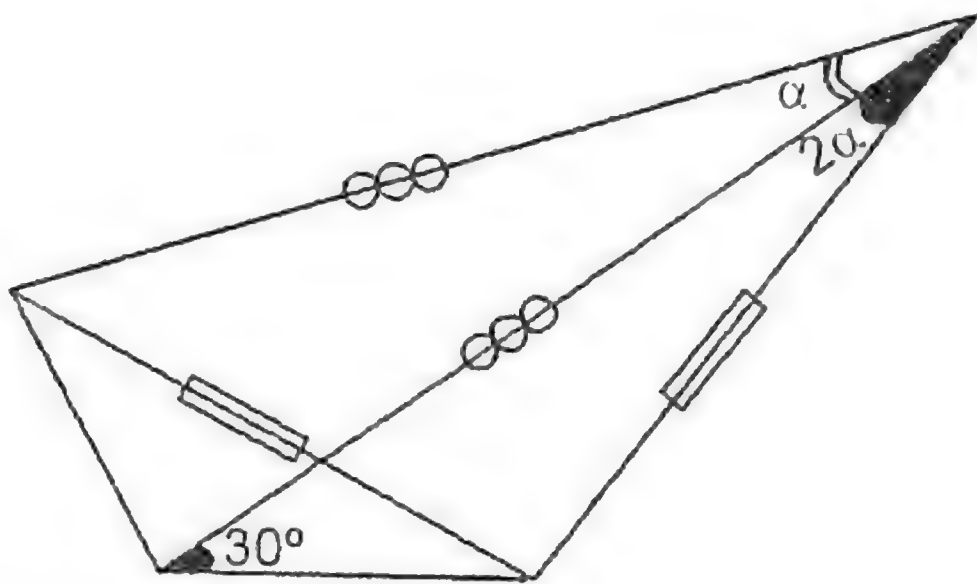
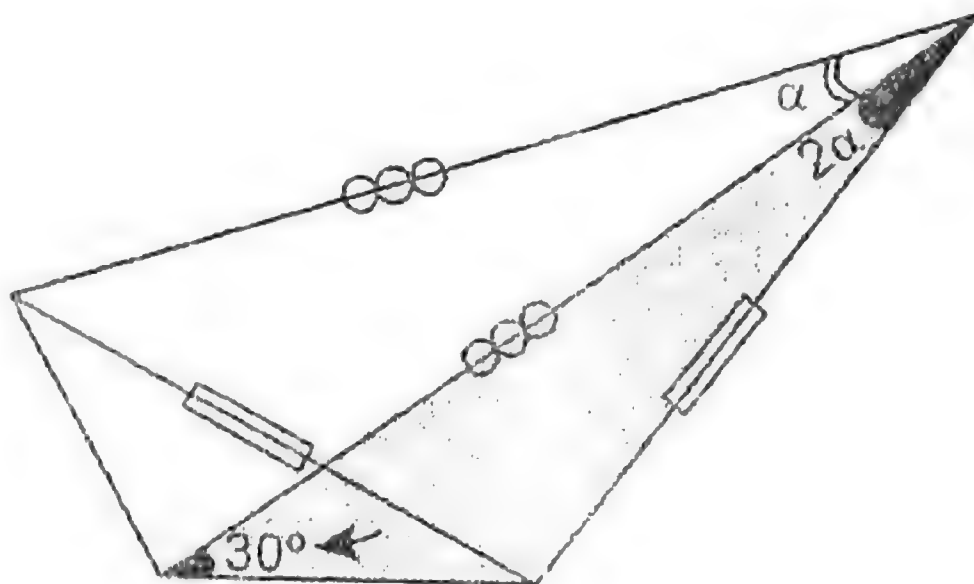
Entonces se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



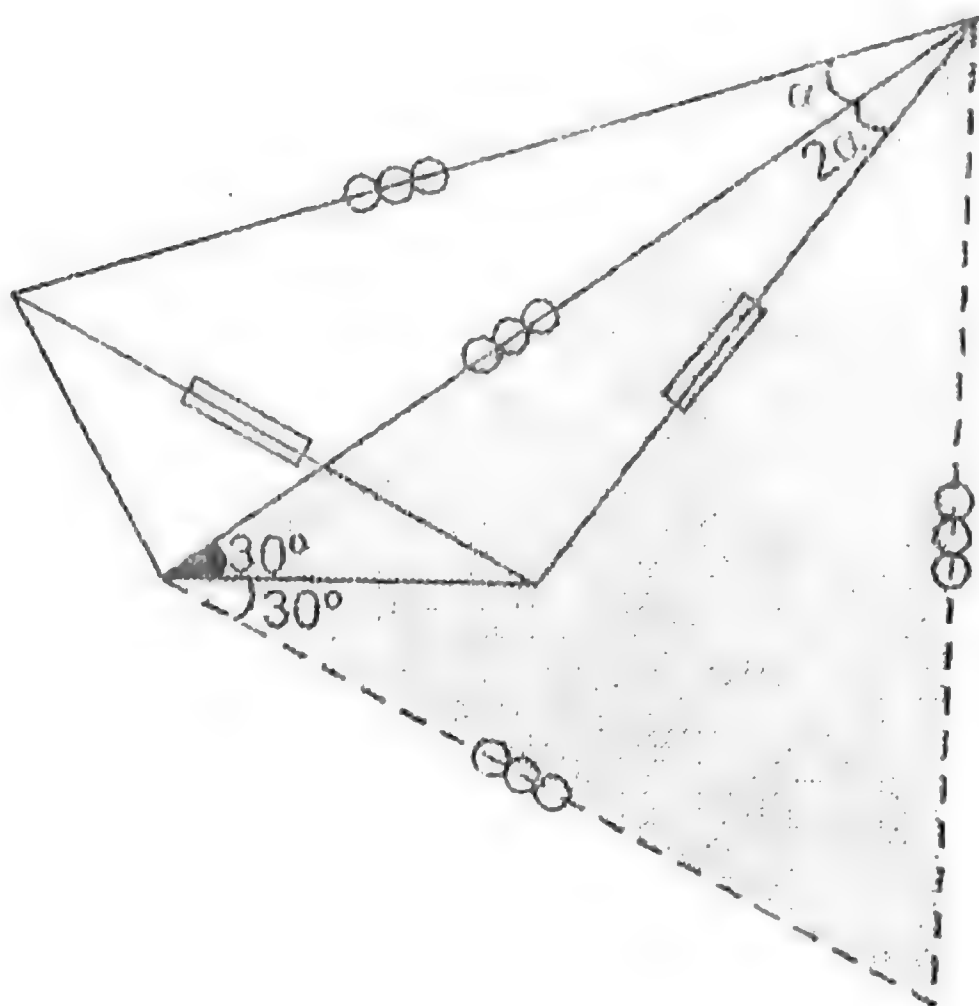
De la figura se tiene que:

$$\therefore x + \theta = 60^\circ$$

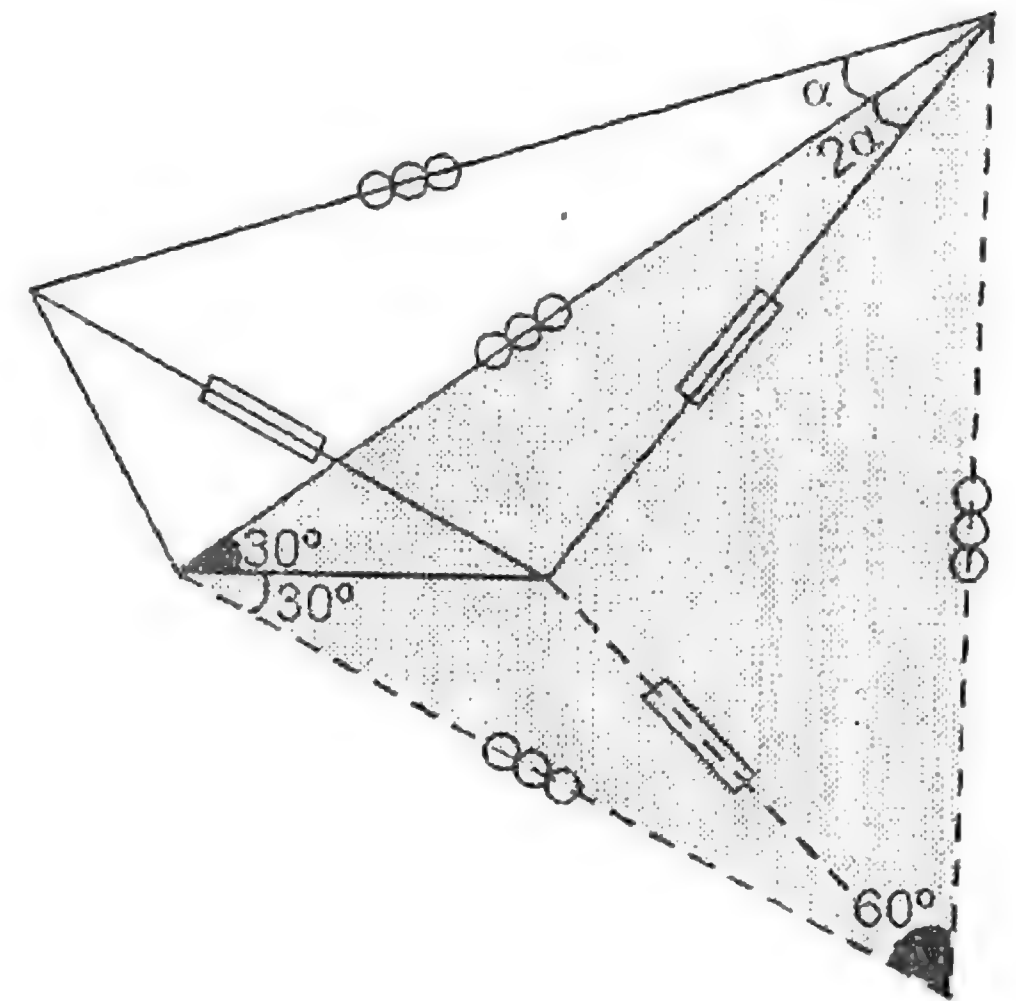
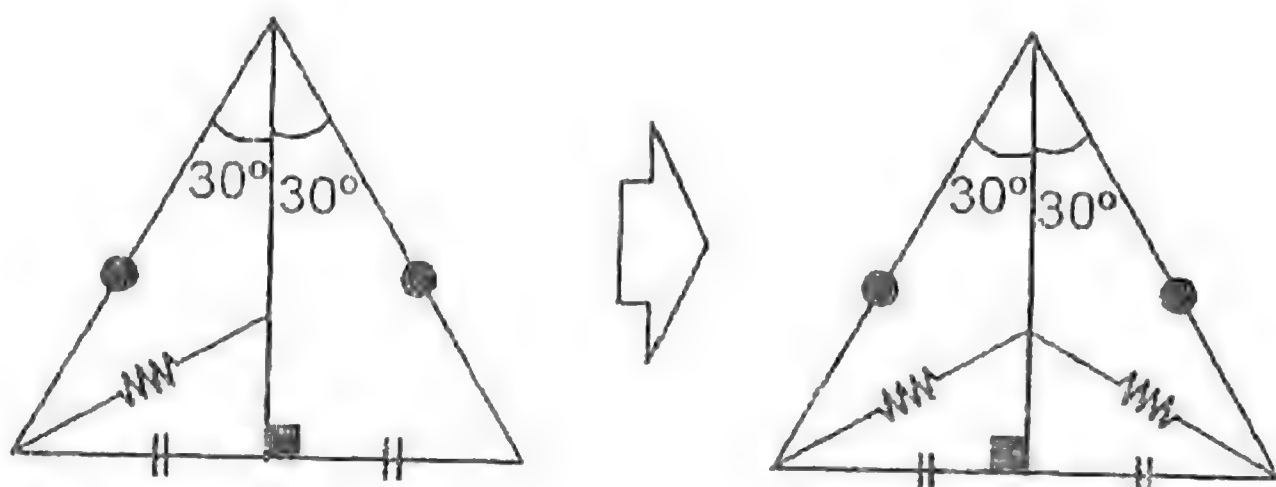
$$\Rightarrow x = 60^\circ - \theta$$

EJEMPLO Nº 2Calcular " α "**SOLUCIÓN:**Se tiene en la figura, un ángulo de 30° 

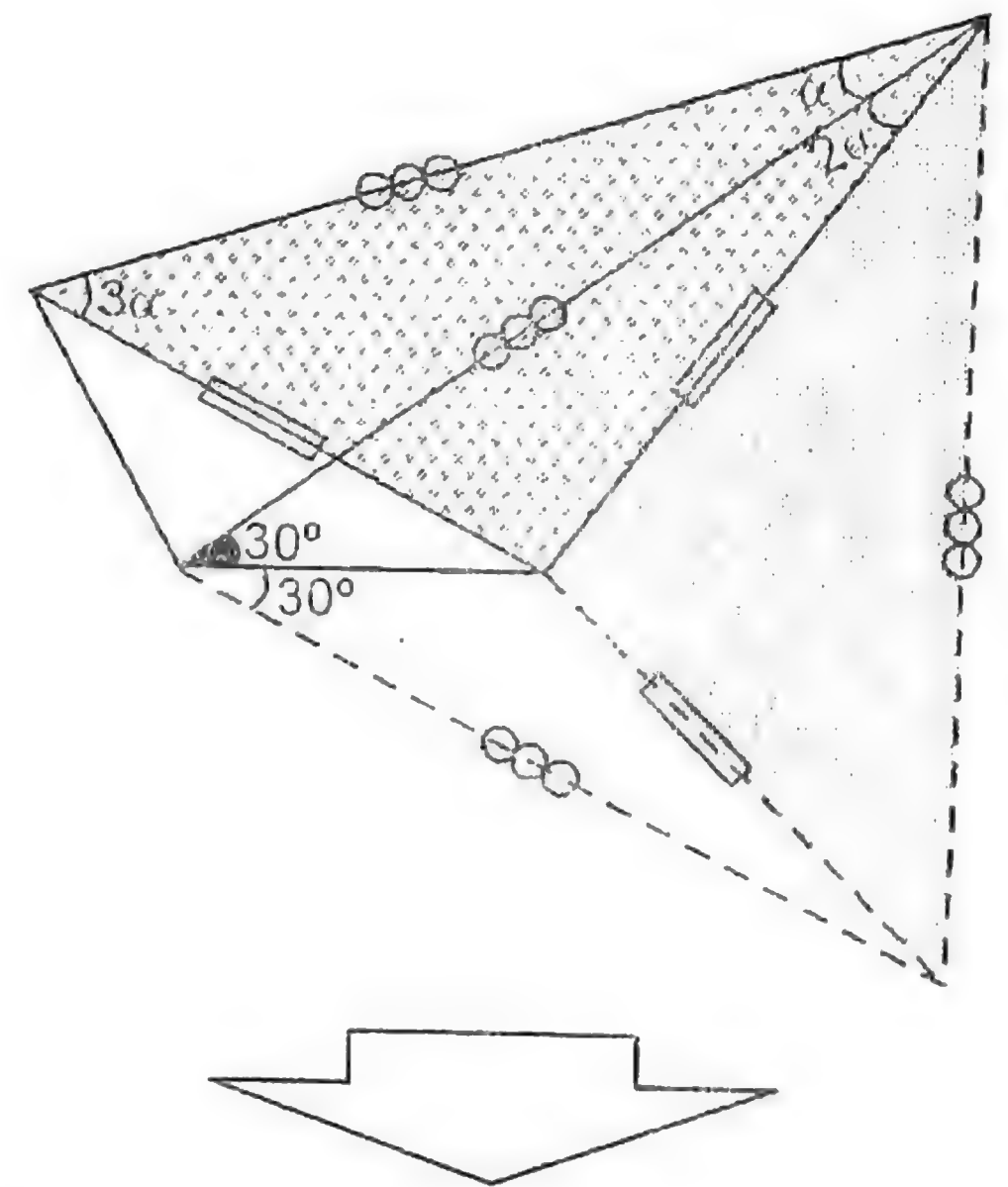
Paso Nº 1: Entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.



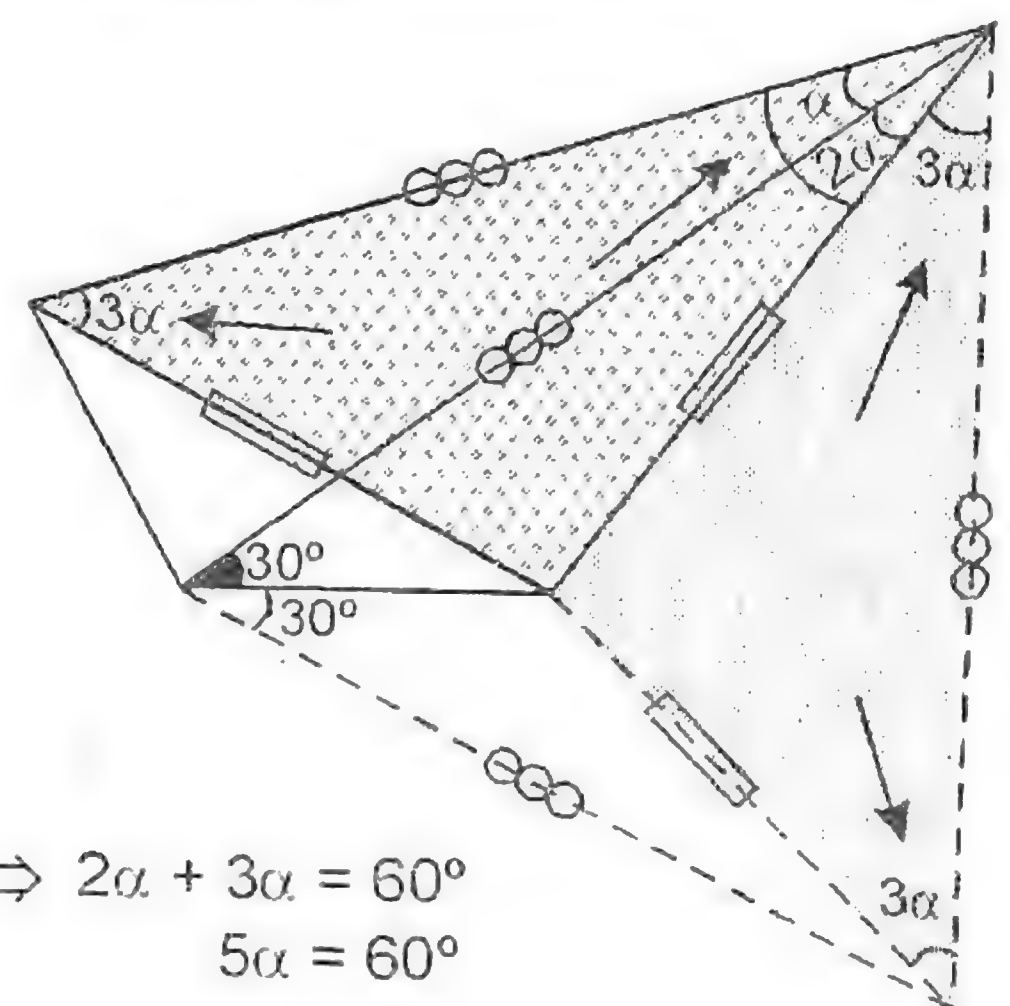
Paso Nº 2: Se sabe que en todo triángulo equilátero se cumple.



Paso Nº 3: Se observa en la figura que se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.L.L)

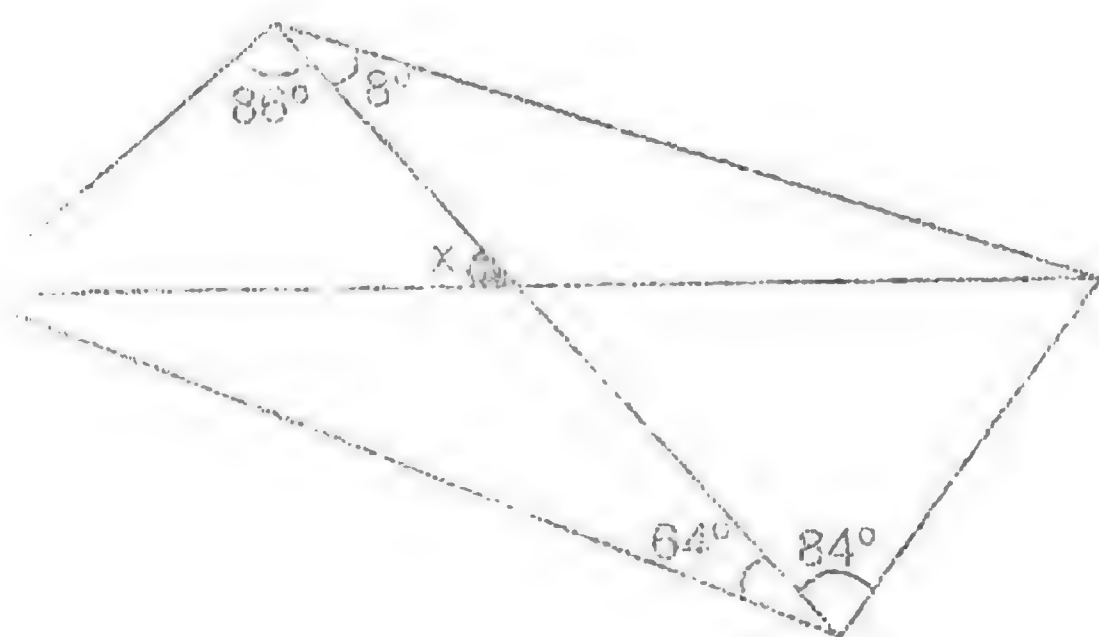


Aquí se cumple:
"A lados iguales se oponen ángulos iguales"

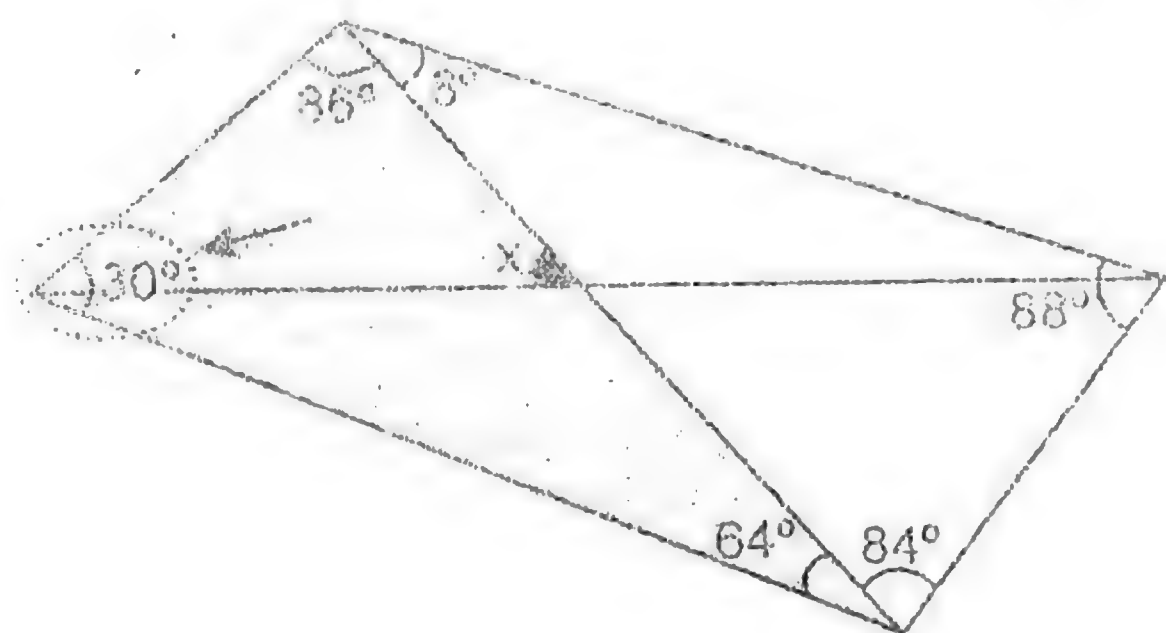


$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\alpha + 3\alpha &= 60^\circ \\ 5\alpha &= 60^\circ \\ \alpha &= 12^\circ\end{aligned}$$

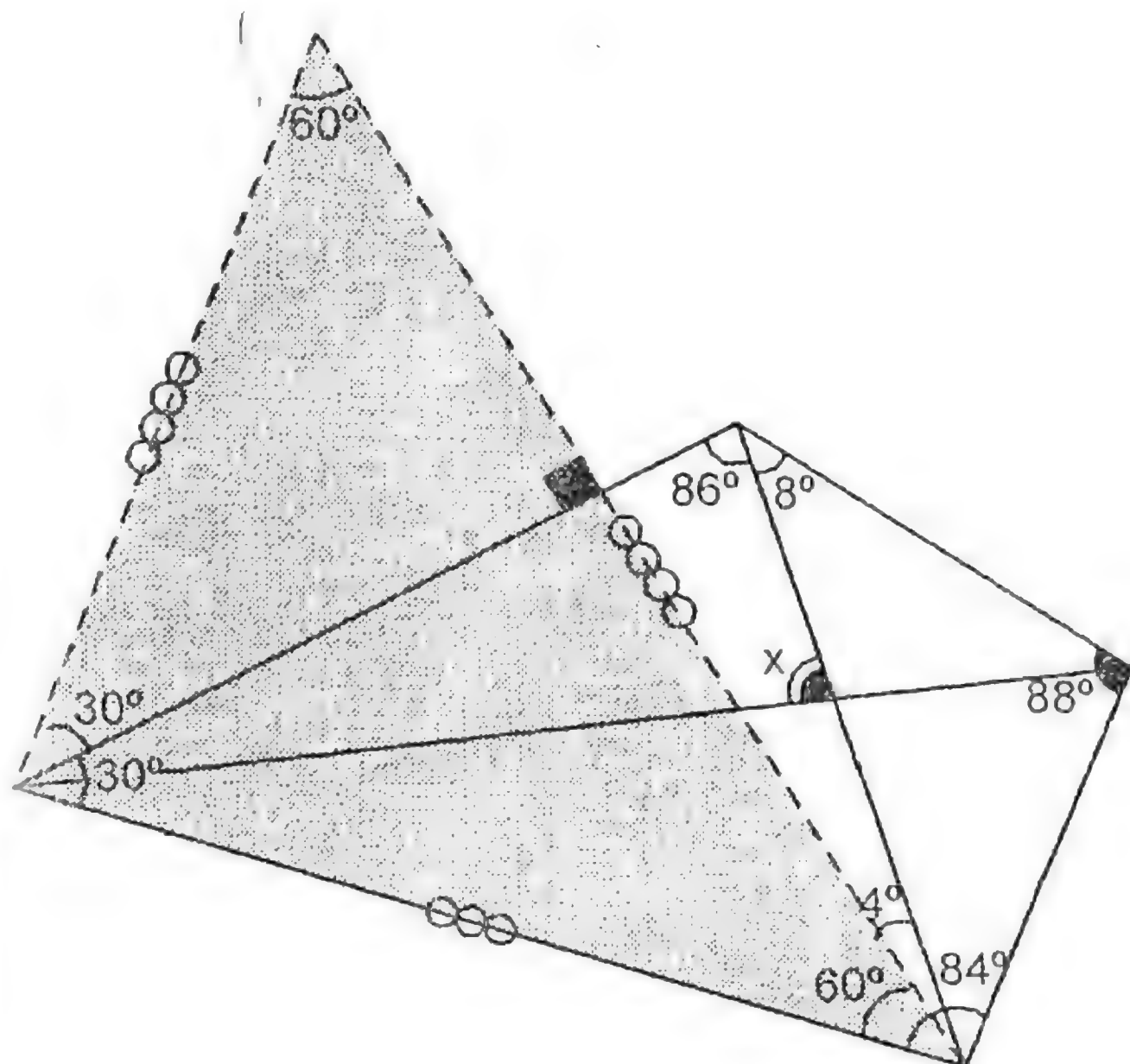
Paso N° 3



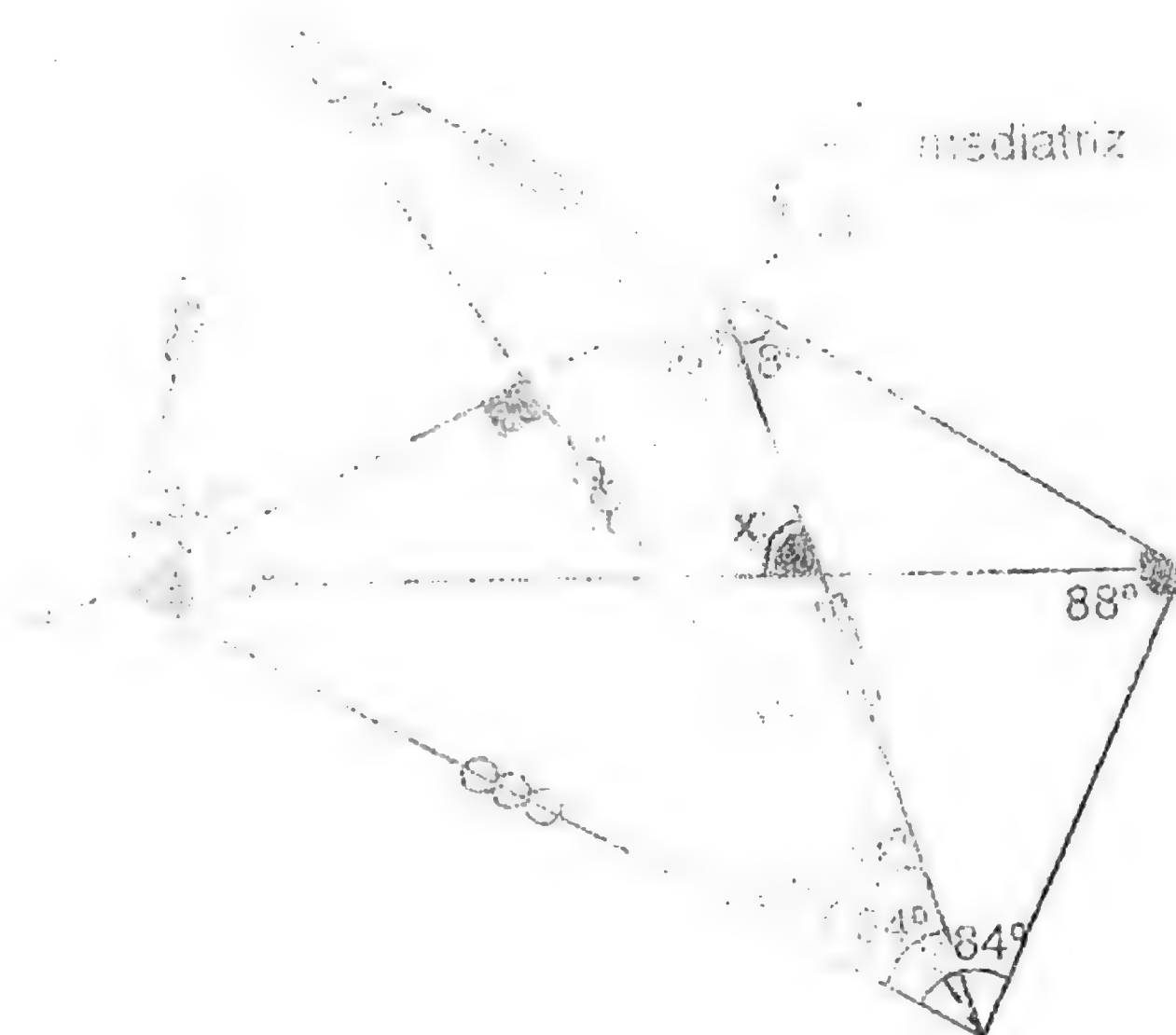
CONSTRUCCIÓN:
 Para completamos los ángulos de la figura y observamos un ángulo de 30°



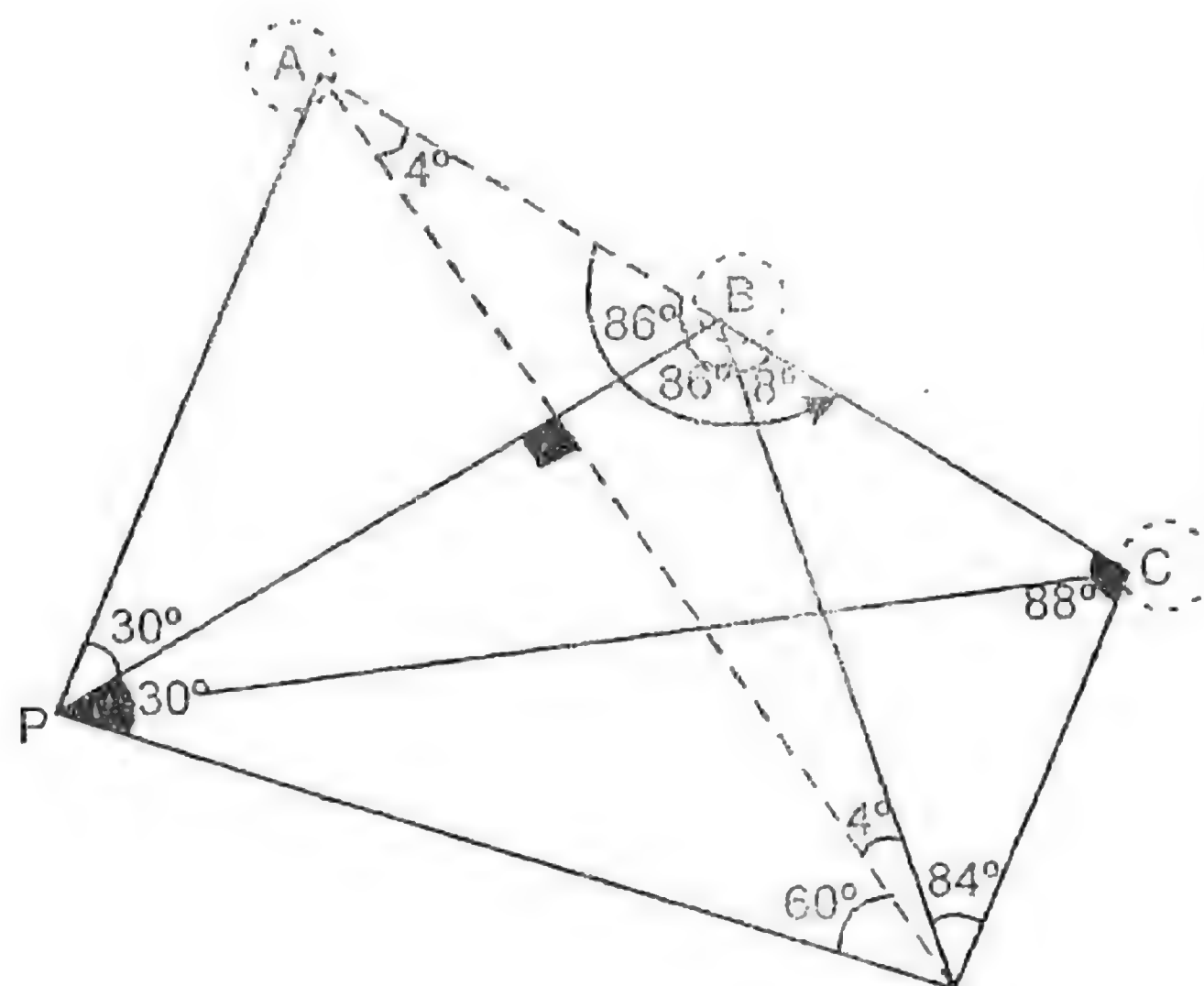
Paso N° 1: Como observamos un ángulo de 30° , construimos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.



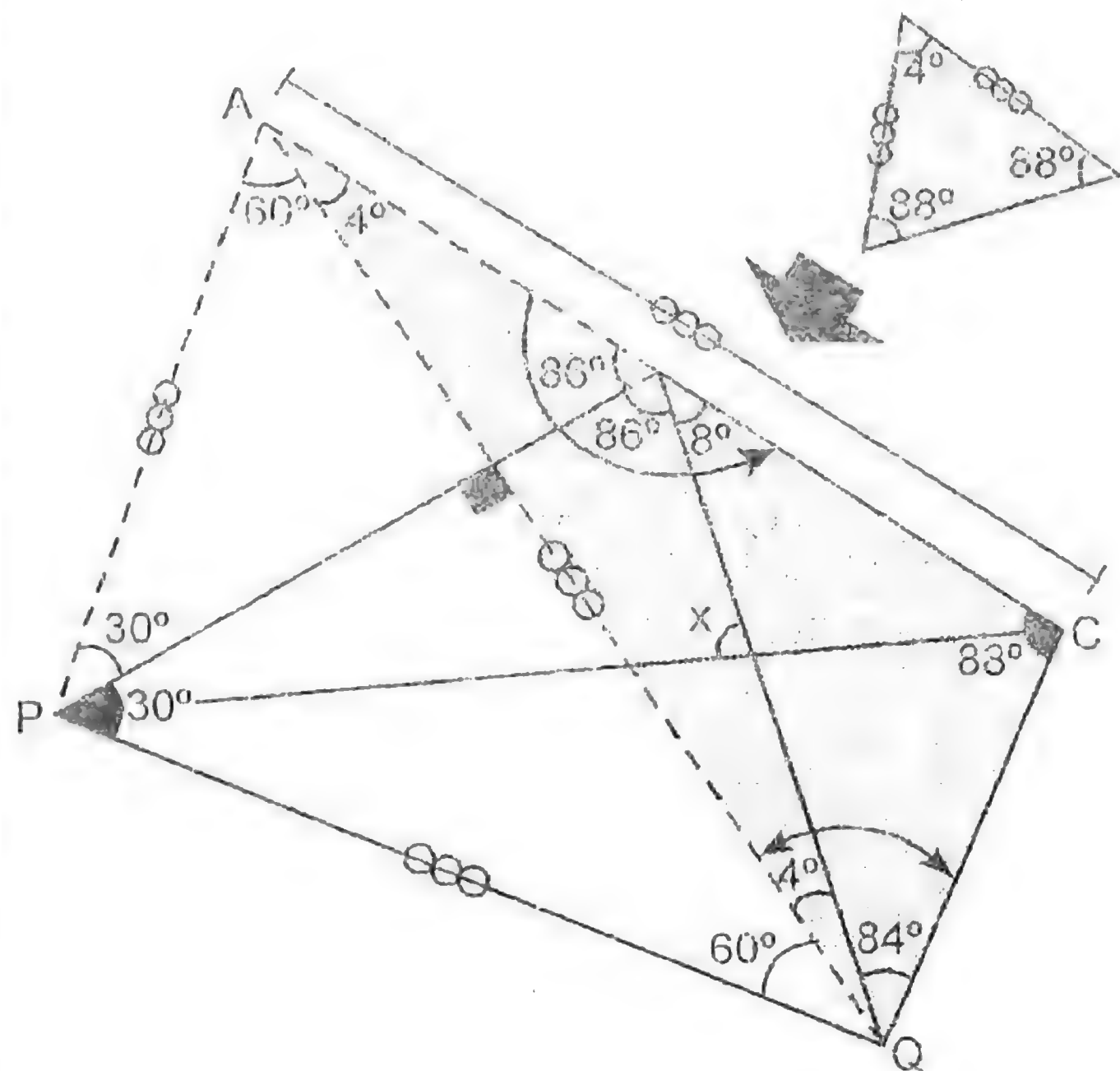
Paso N° 2: Se observa en la figura la mediatriz.



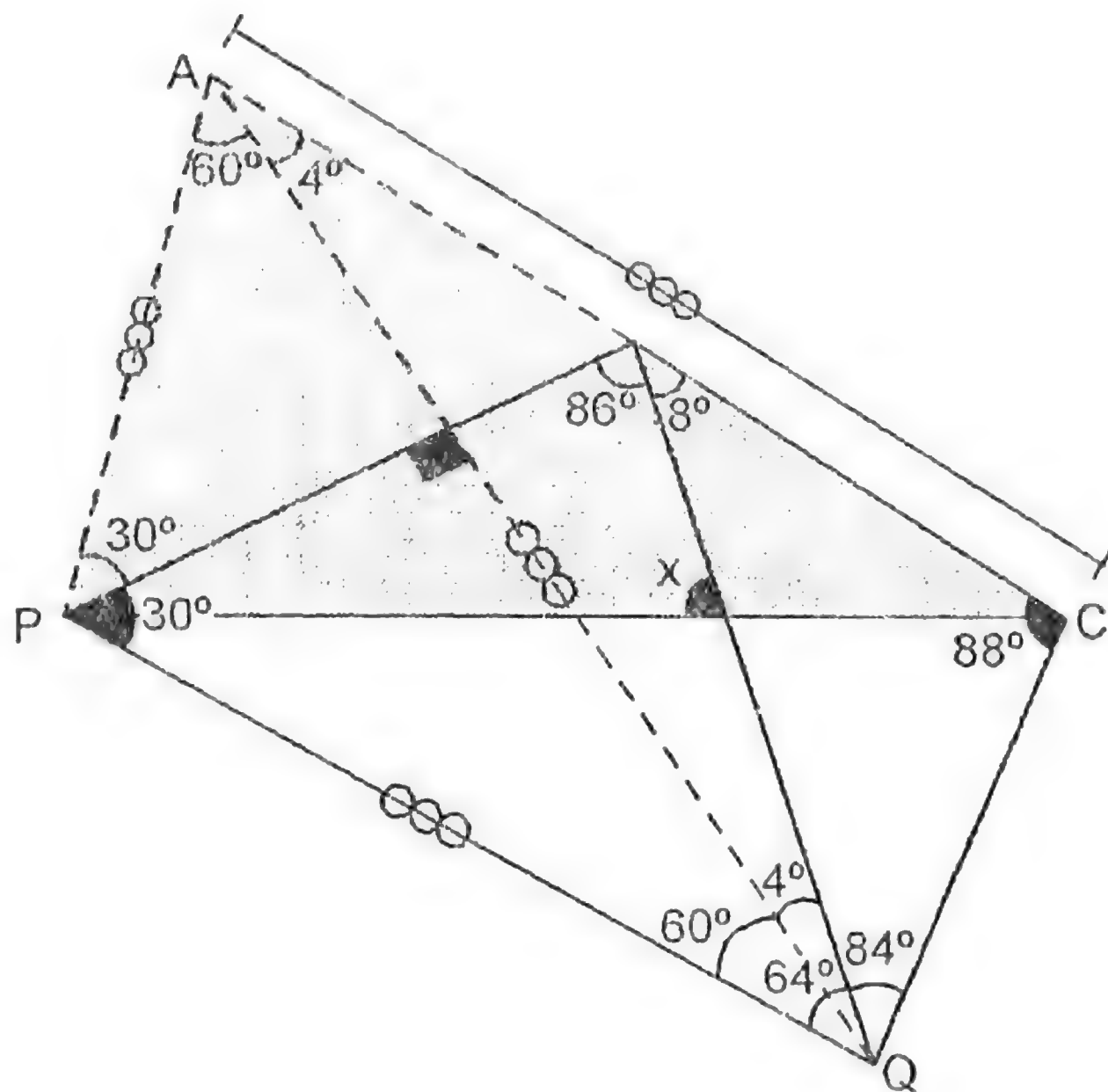
Paso N° 3: Luego se observa un ángulo llano en "B" ($86^\circ + 86^\circ + 8^\circ = 180^\circ$) lo cual nos indica que los vértices A, B y C son colineales.



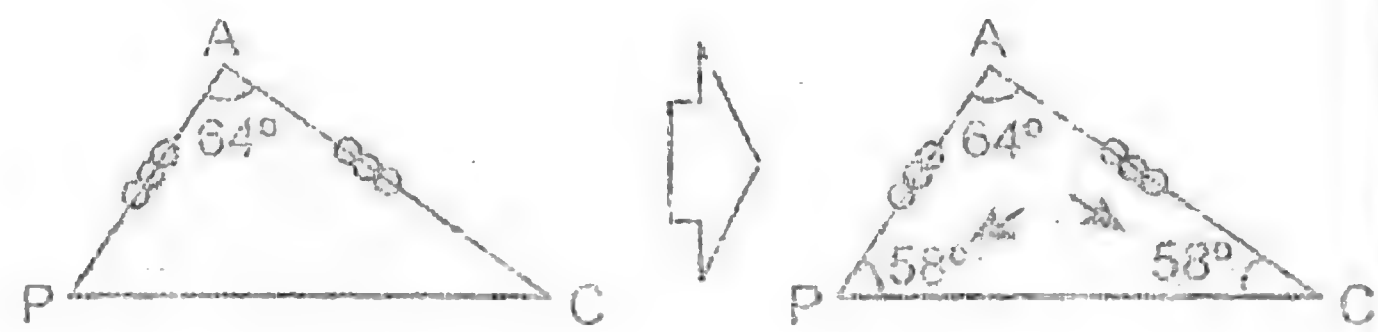
Paso N° 4: Luego se observa un triángulo isósceles donde $AQ = AC$.



Paso N° 5: Se observa ahora un nuevo triángulo isósceles PAC donde $(PA = AC)$

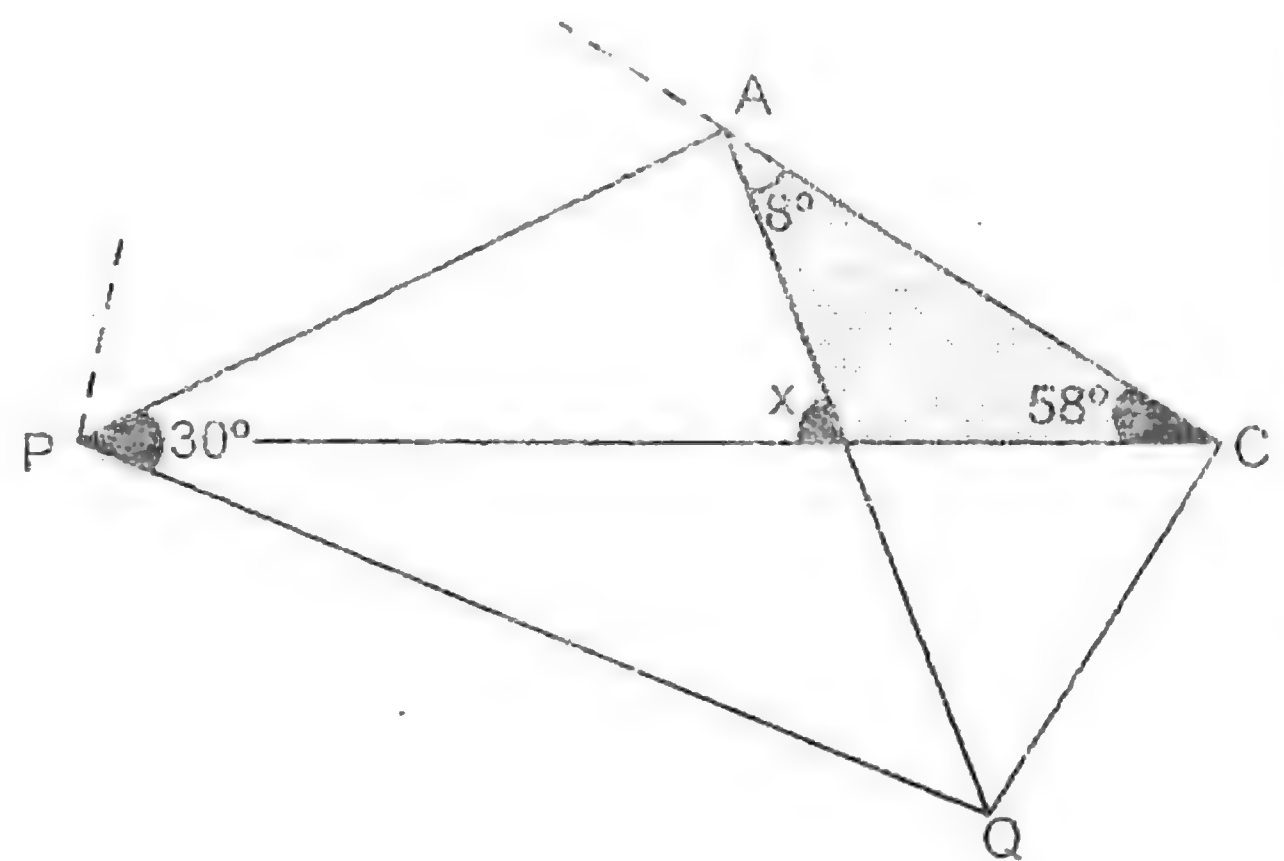


De aquí:



Paso N° 6: Ahora interiormente de la figura se tiene un triángulo donde cumple:

$$m \angle ACP = 58^\circ$$



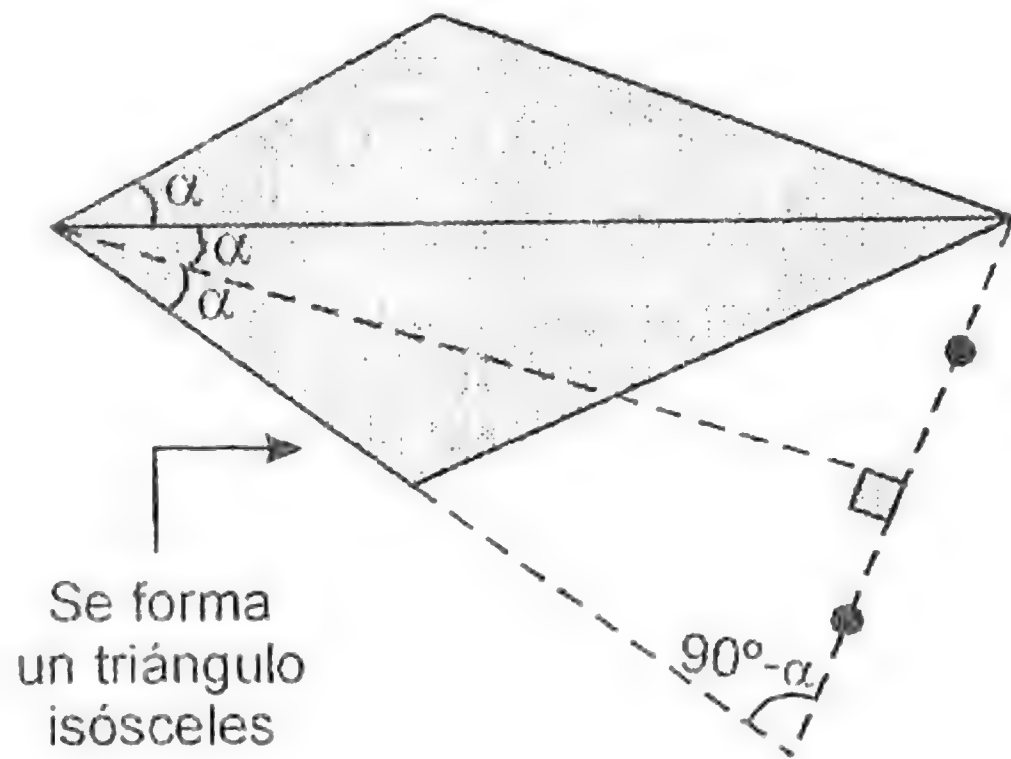
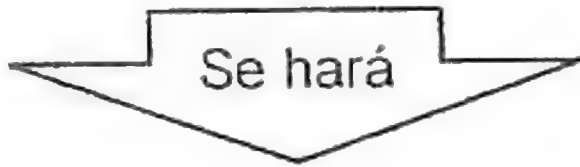
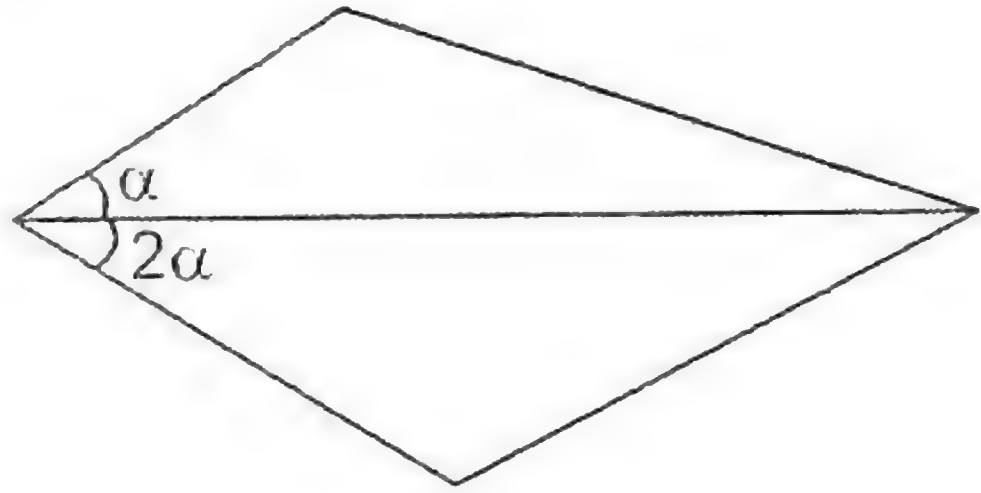
$$\Rightarrow x = 58^\circ + 8^\circ$$

$$x = 66^\circ$$

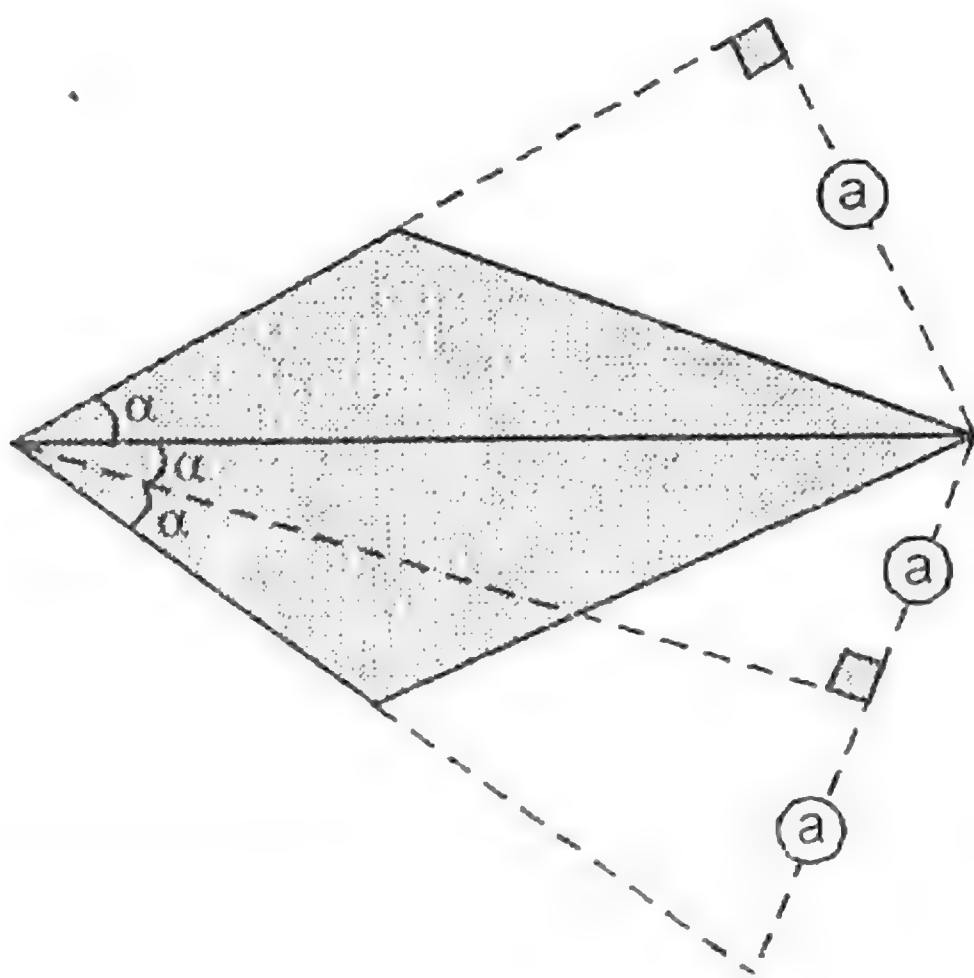
4to Criterio

"PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ"

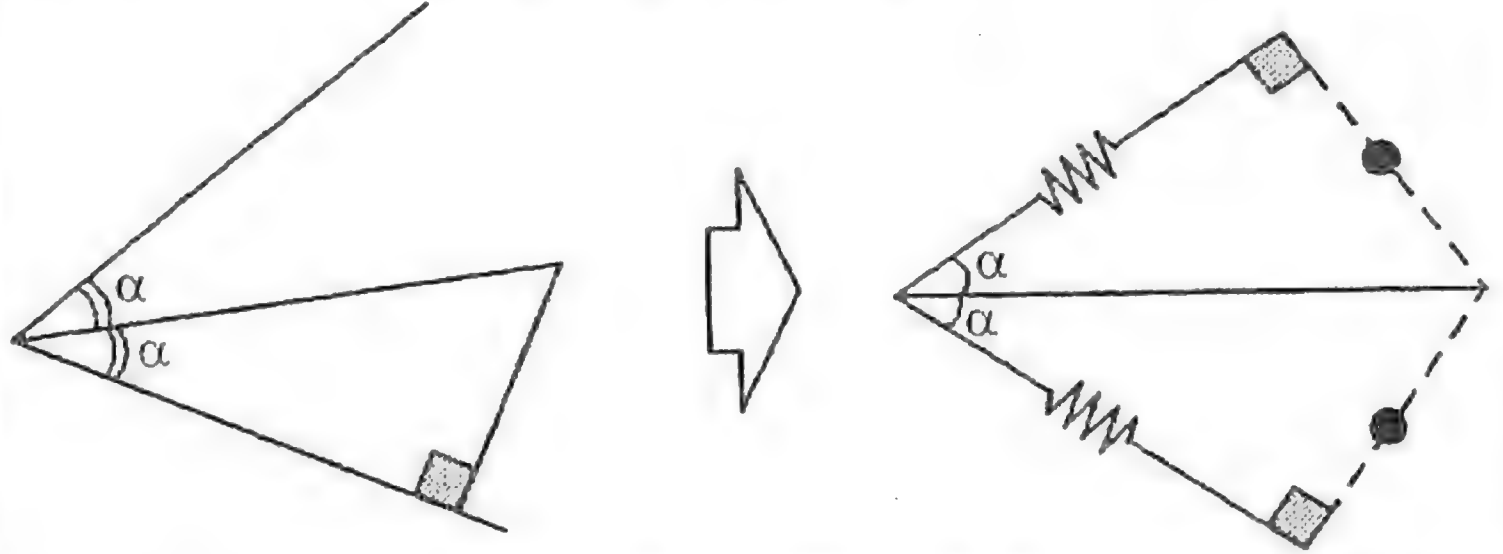
Quando se observa en una figura de la siguiente forma se realizará el siguiente trazo:



Se realiza el siguiente trazo para obtener la siguiente figura:

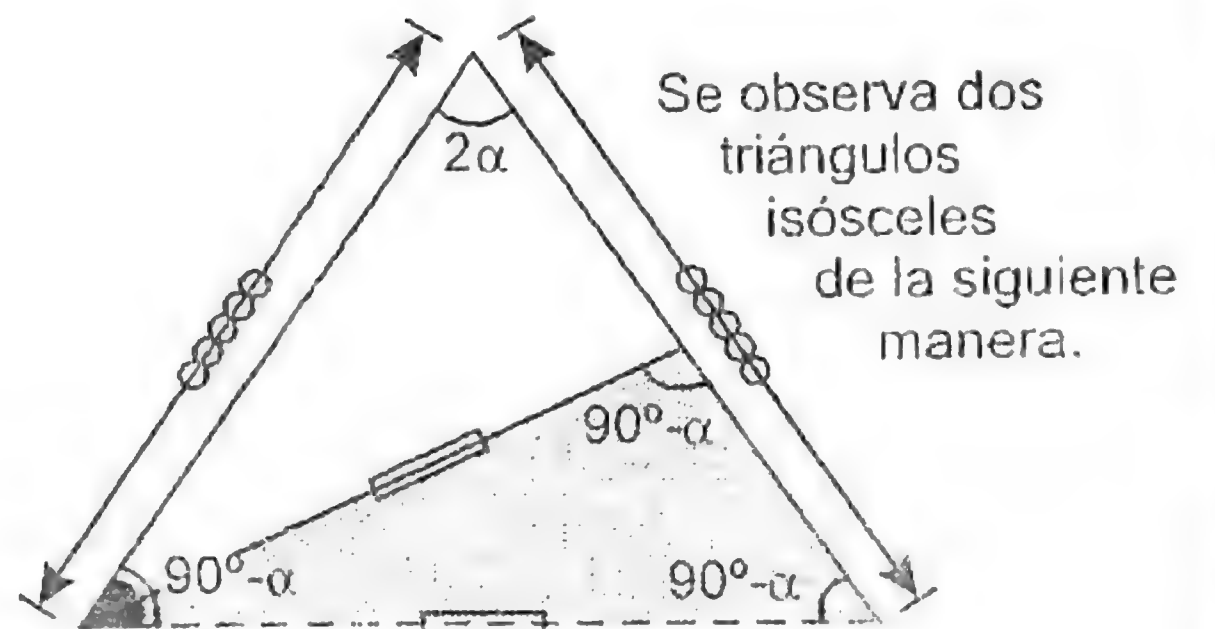
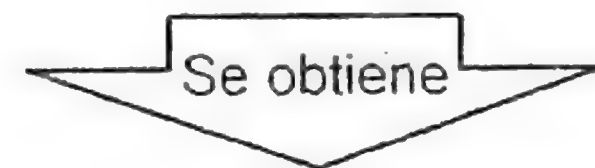
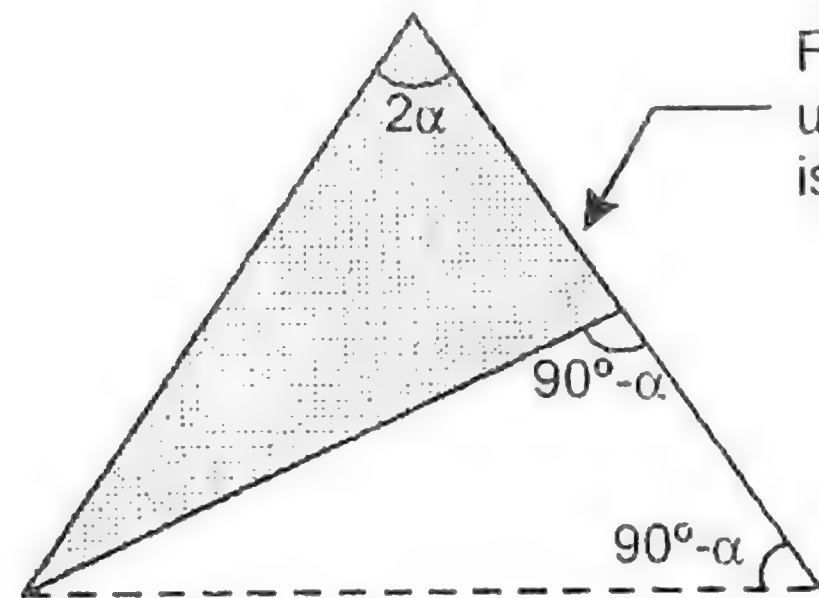
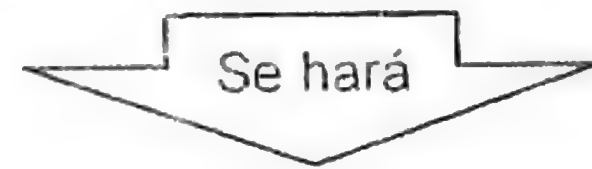
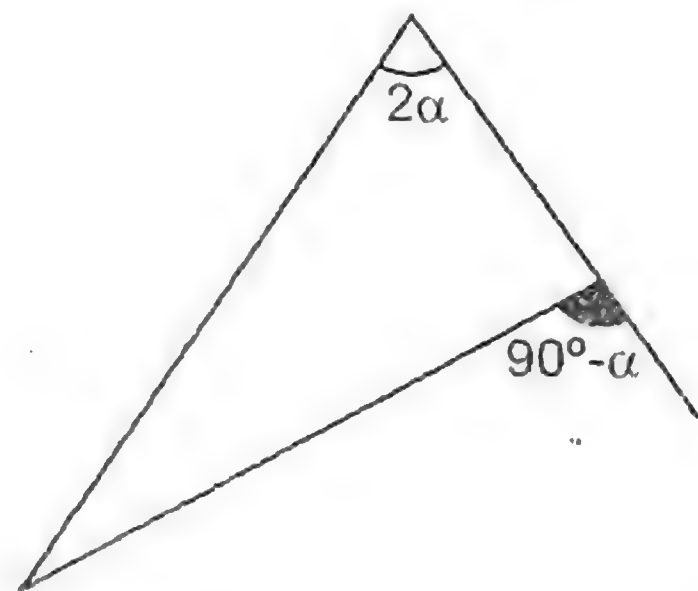


Se sabe: PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ:



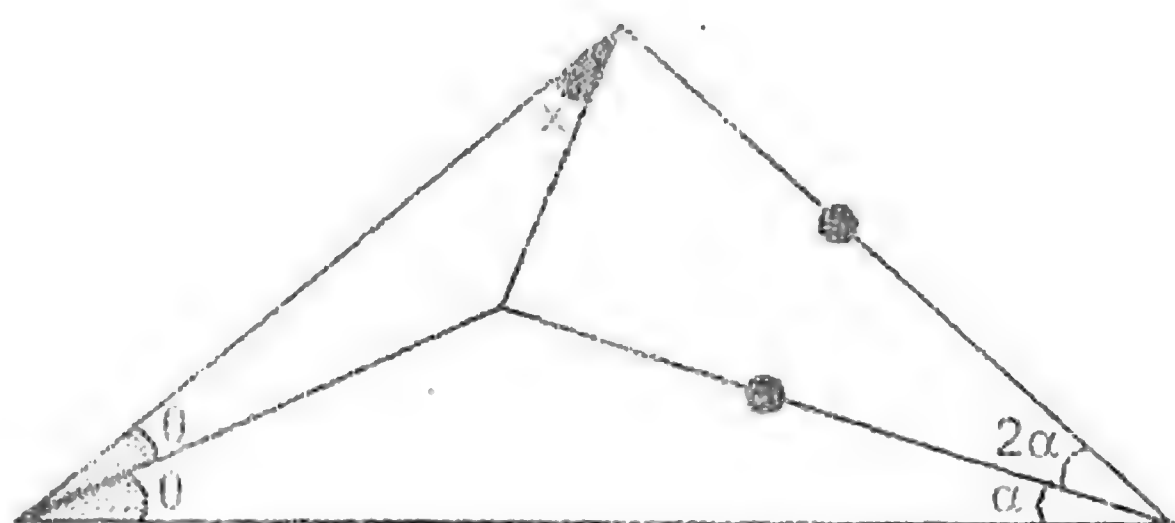
Tener presente:

Si se observa la siguiente figura:



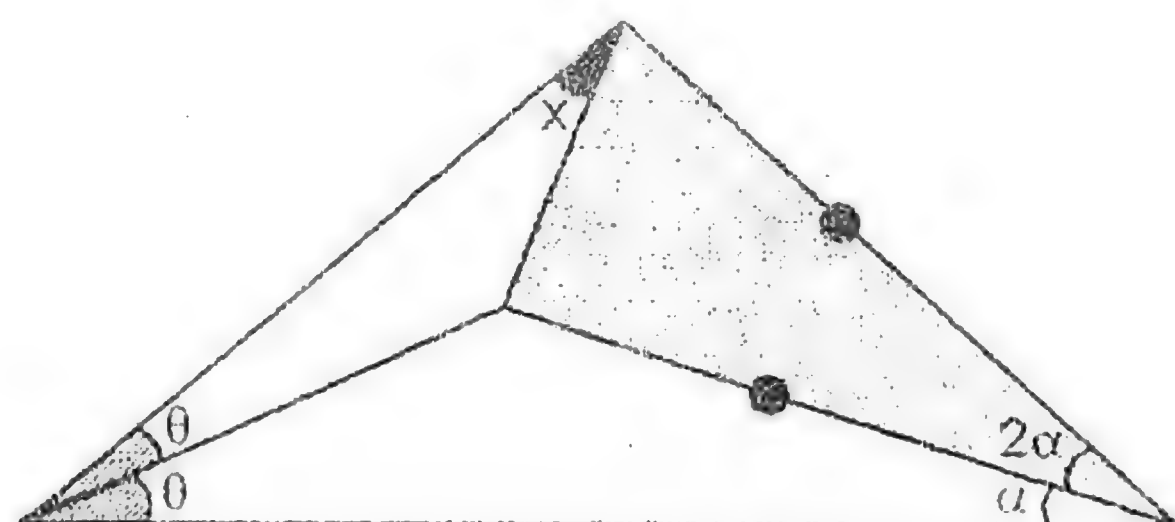
EJEMPLO N° 1

Calcular "x"

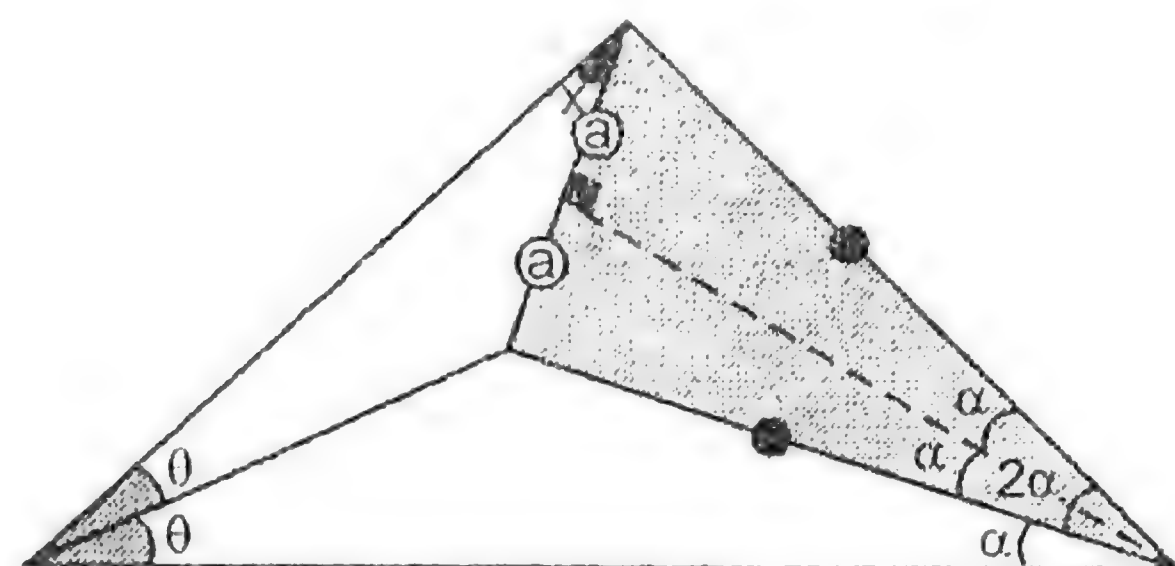


SOLUCIÓN:

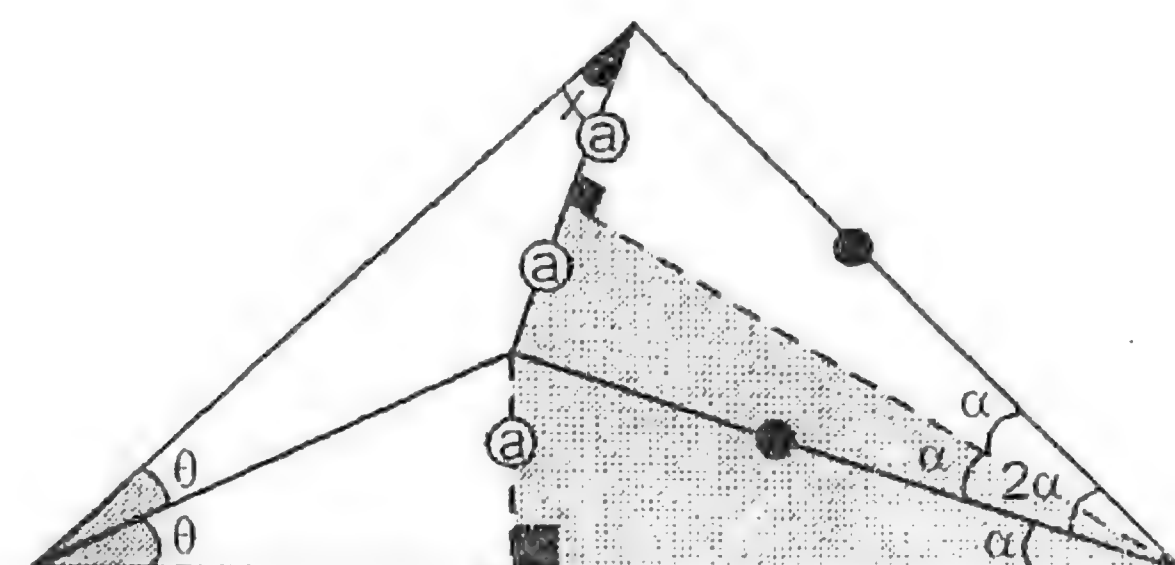
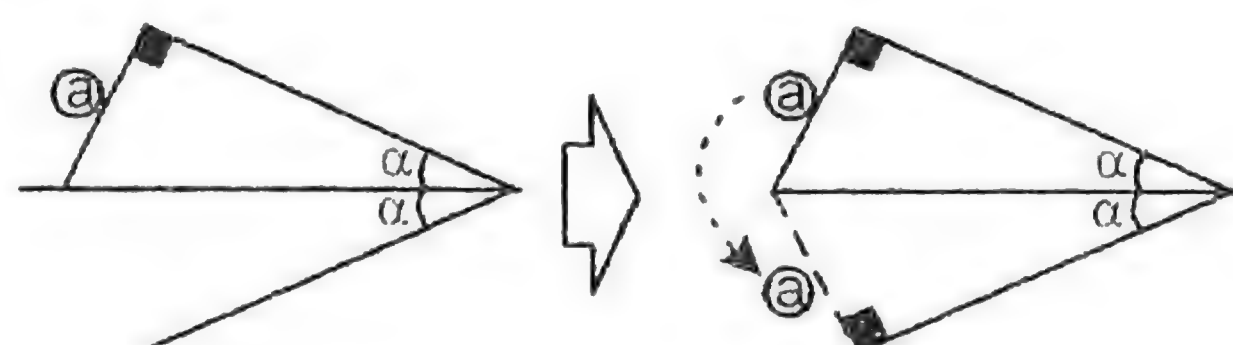
Se observa un triángulo isósceles.



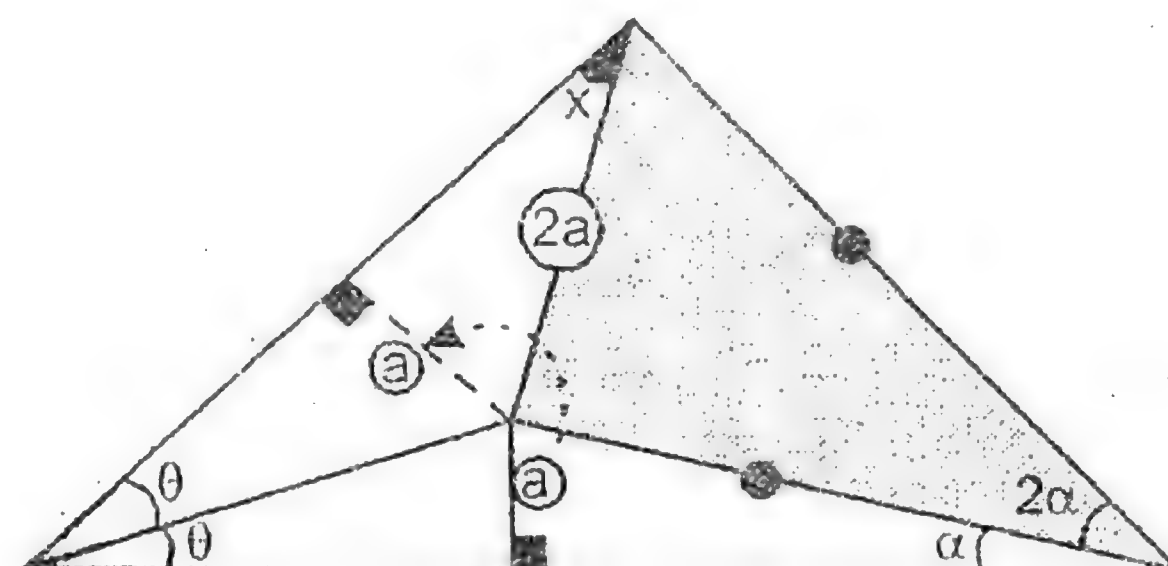
Paso N° 1: Aquí se realiza el siguiente trazo:



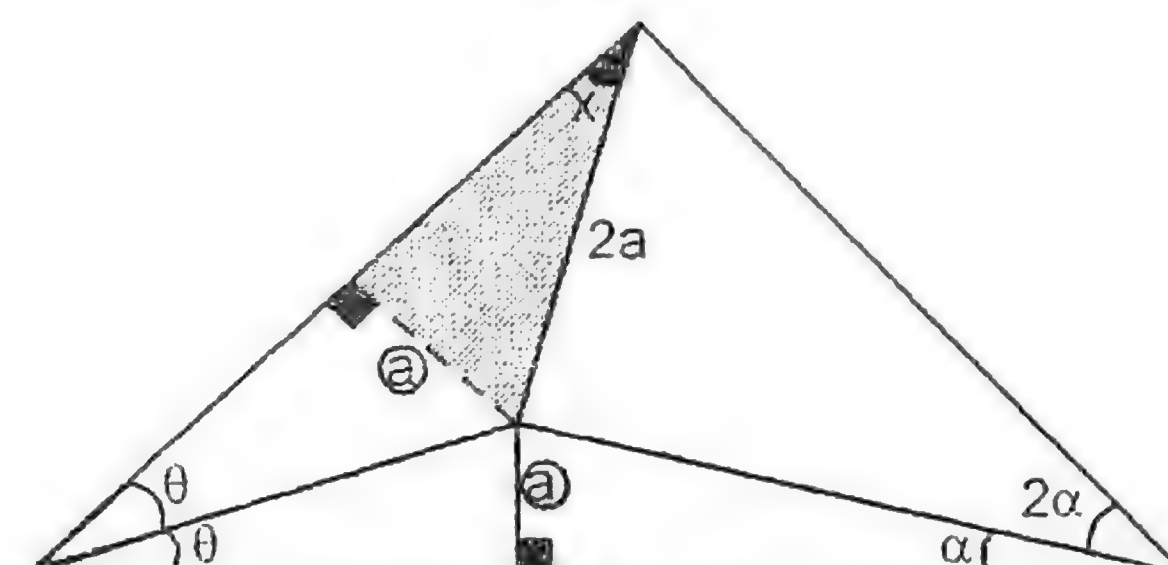
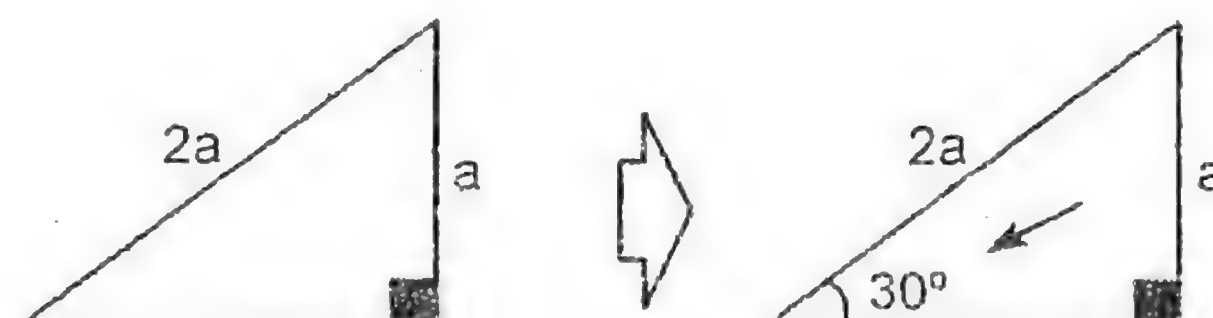
Paso N° 2: Luego se observa en la figura que se obtiene:



Paso N° 3: De la misma manera se obtiene:



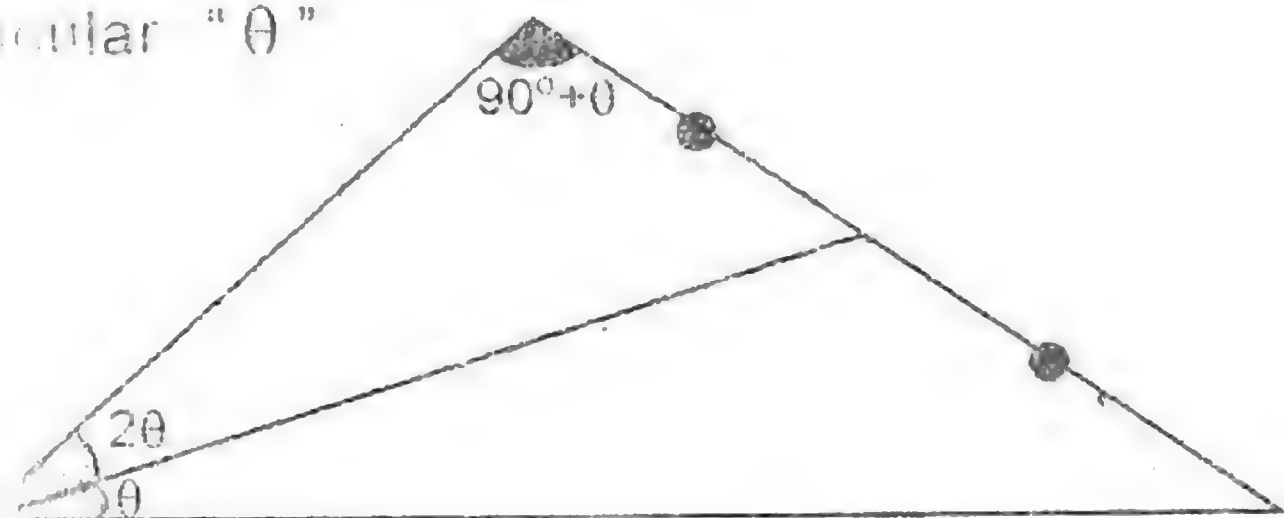
Paso N° 4: Se observa un triángulo rectángulo.



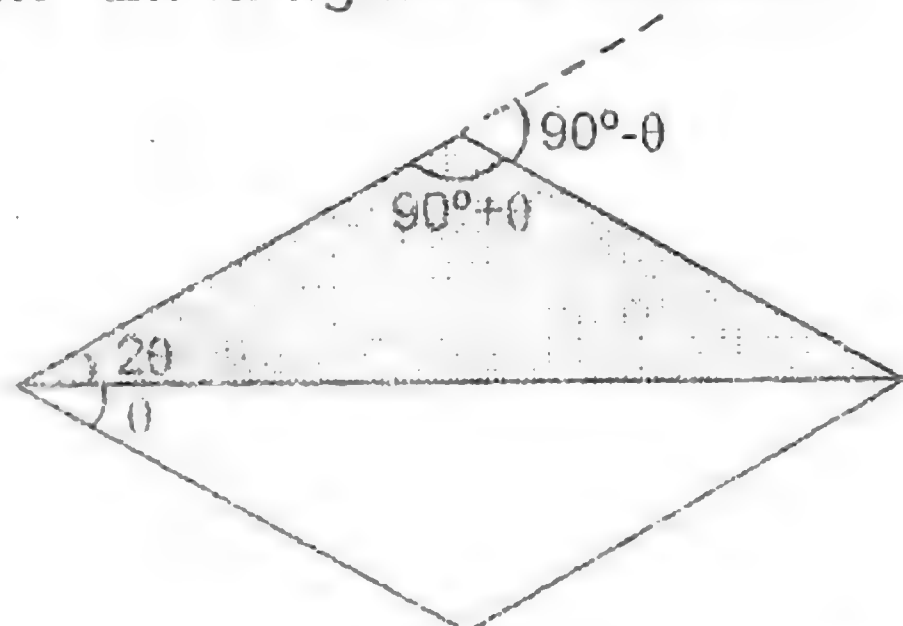
$$\Rightarrow x = 30^\circ$$

PILO N° 2

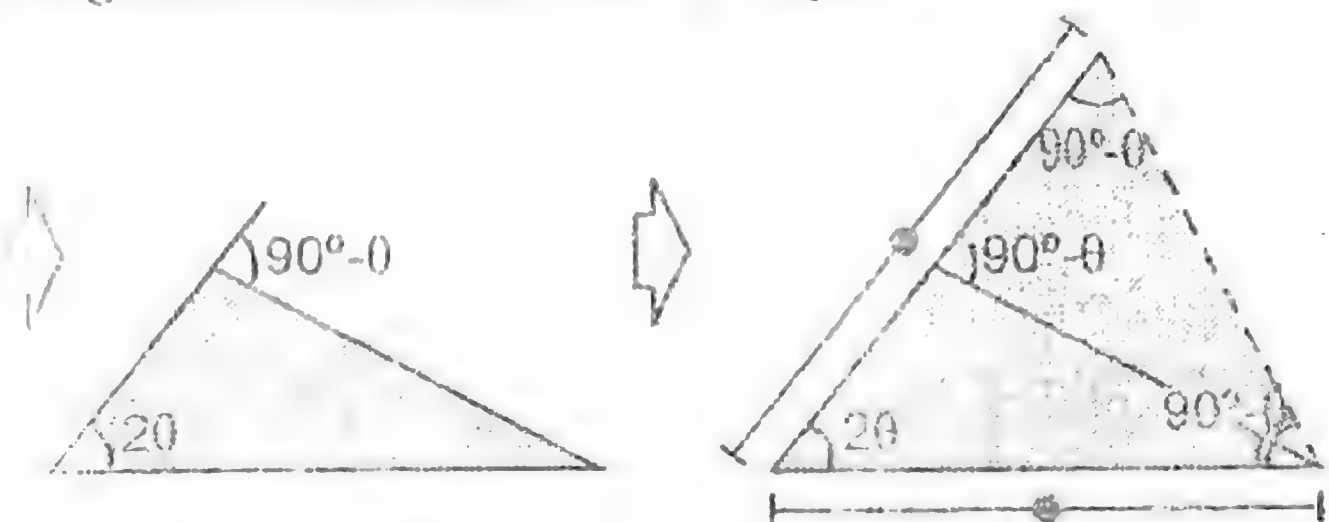
ángulo "θ"



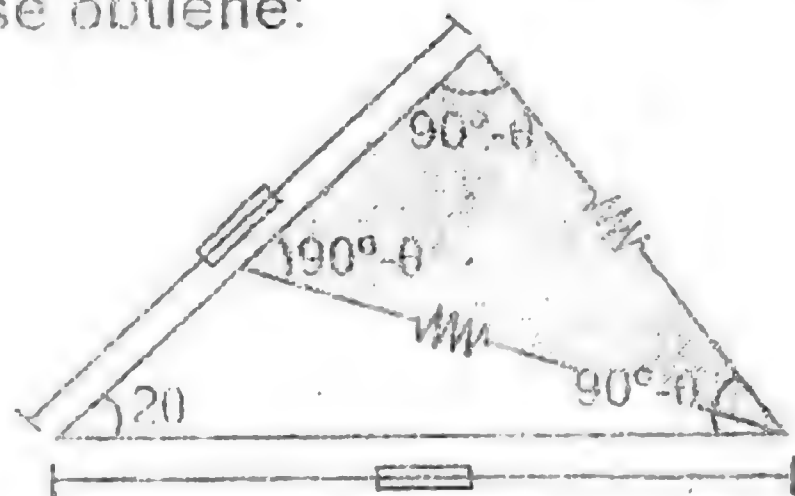
Observación: En la figura se observa:



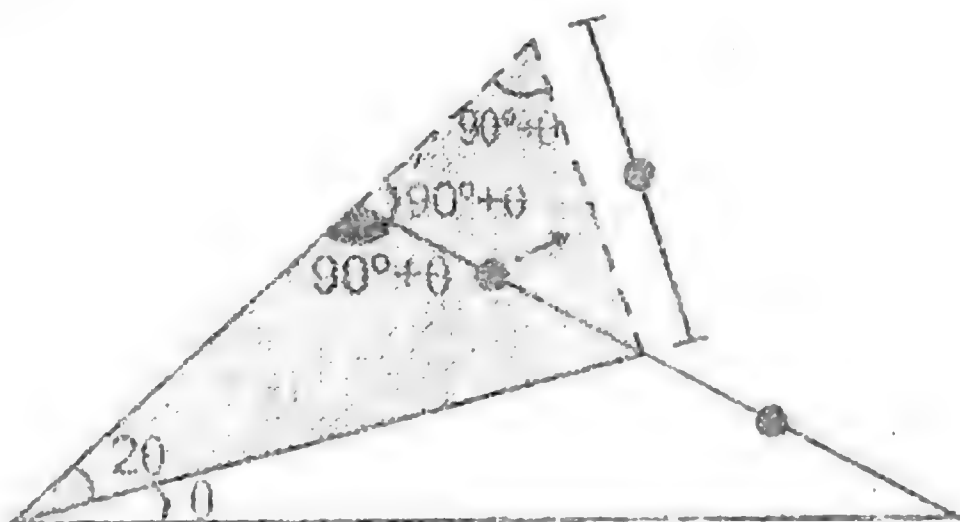
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.



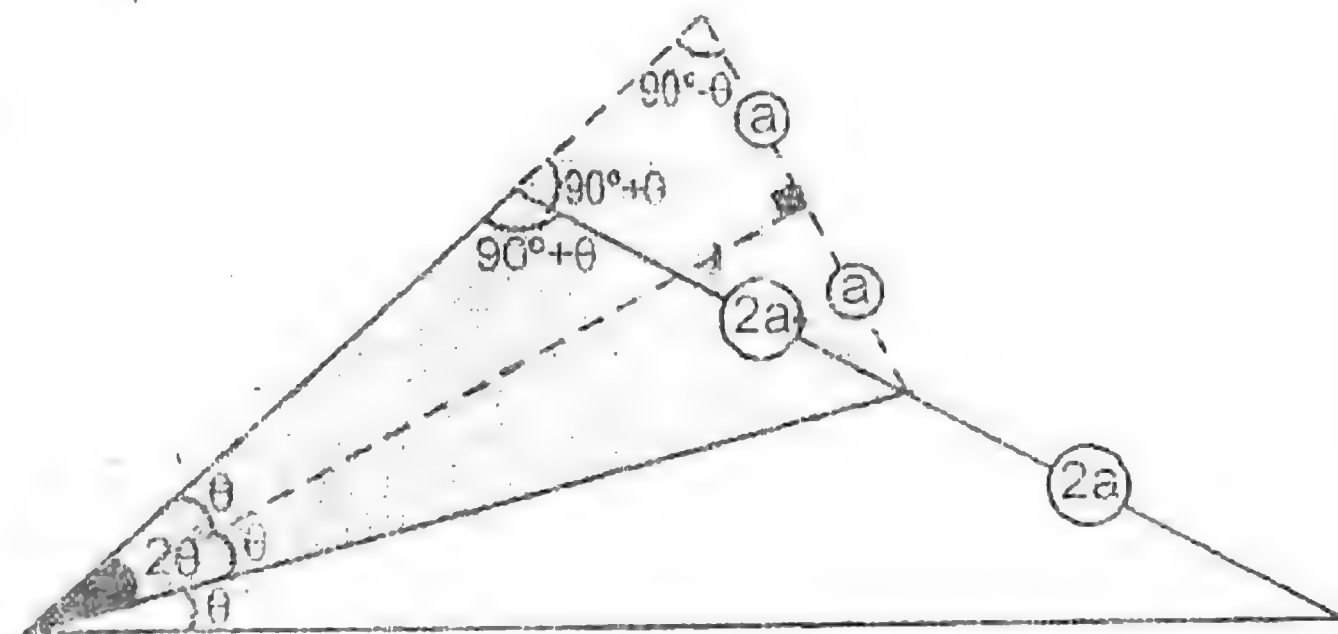
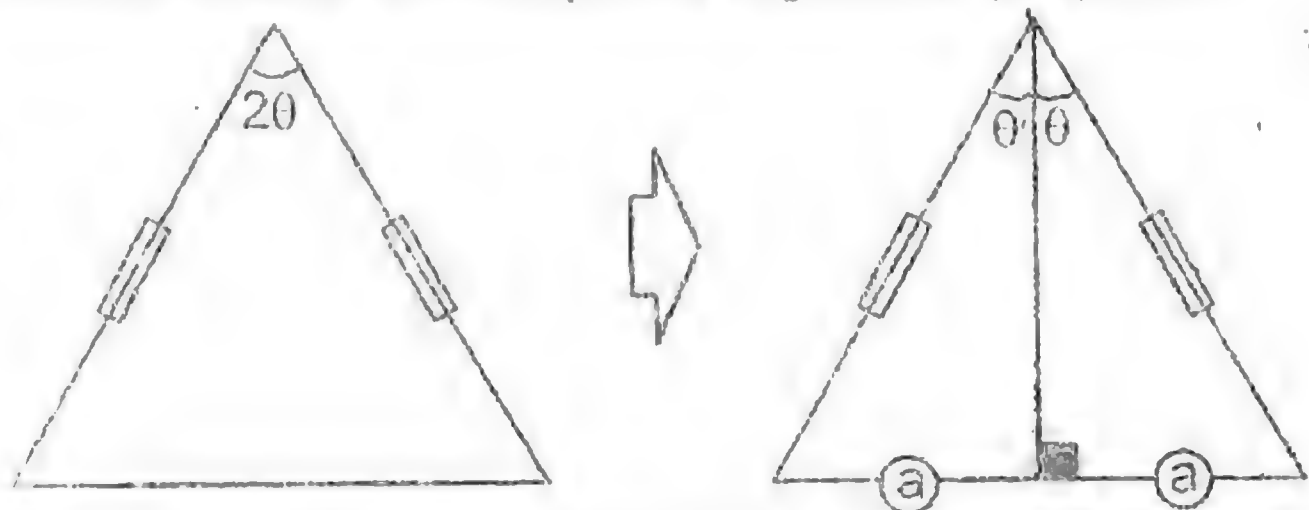
También se obtiene:



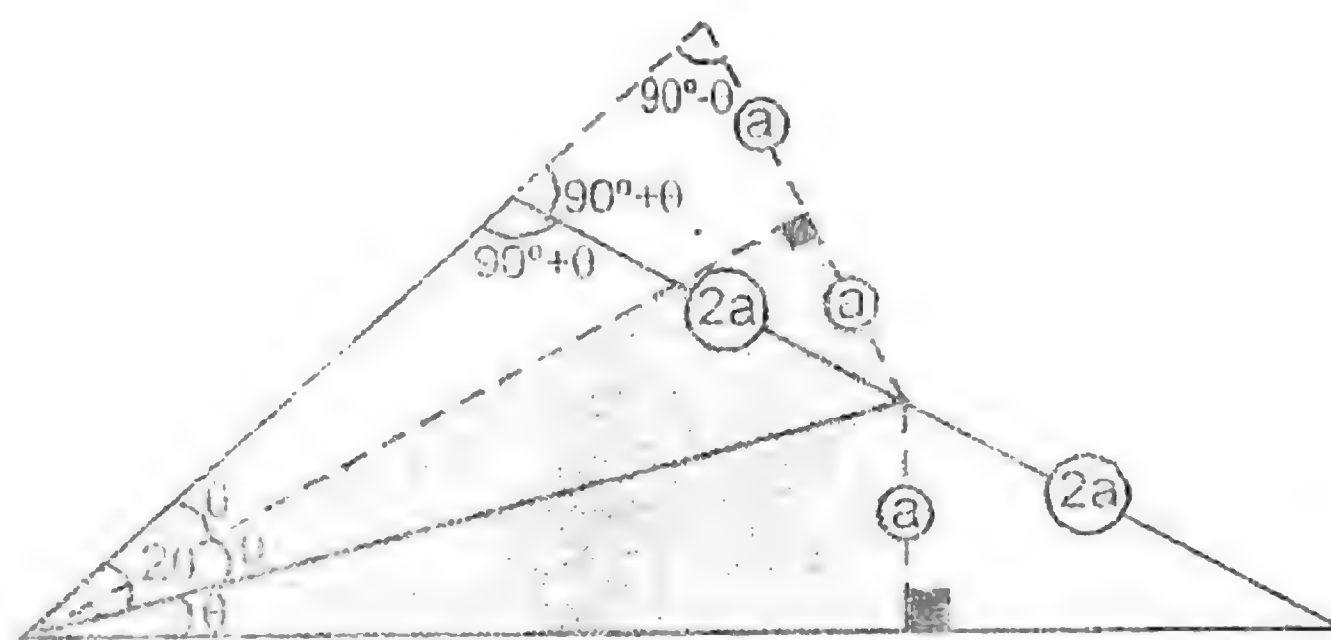
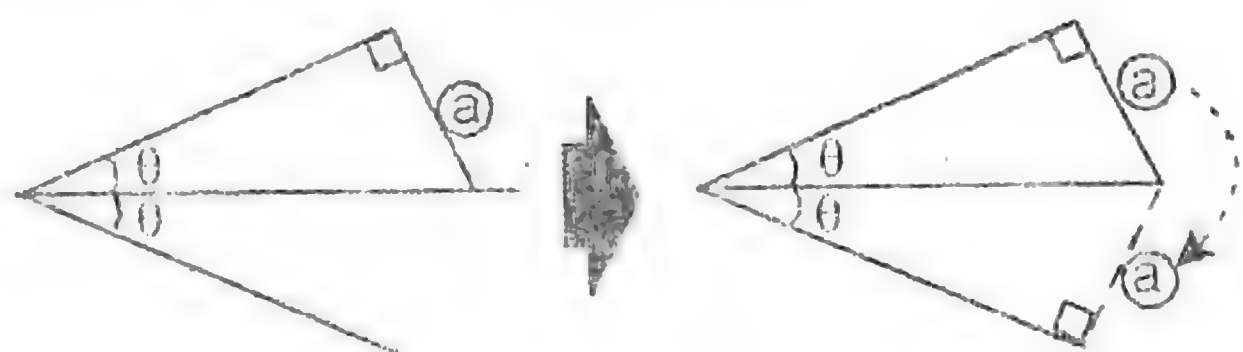
Paso N° 1: Realizamos en la figura inicial el trazo sugerido:



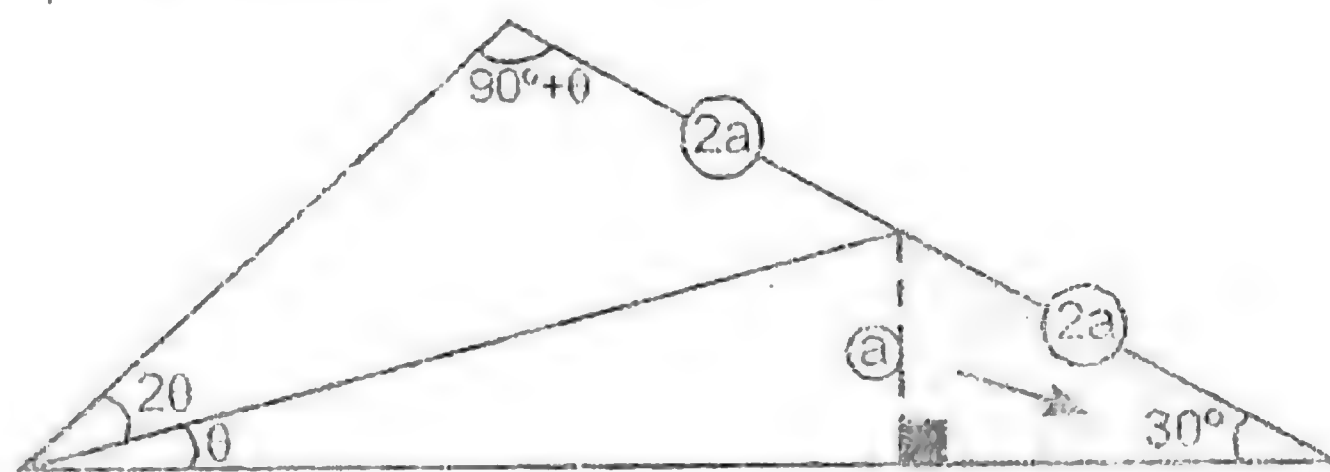
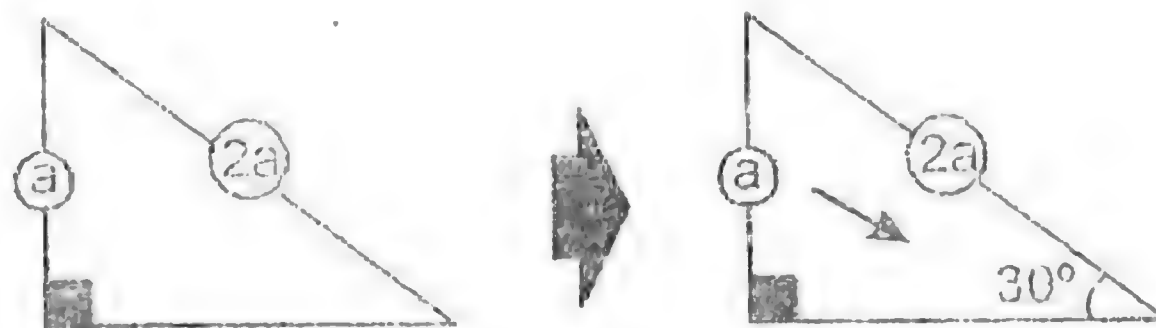
Paso N° 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple la siguiente propiedad:



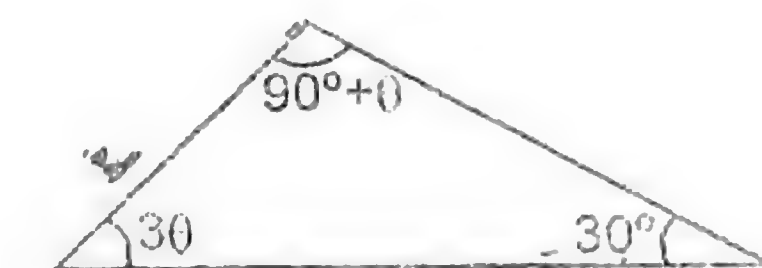
Paso N° 3: Luego se observa en la figura que se tiene la siguiente propiedad.



Paso N° 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.



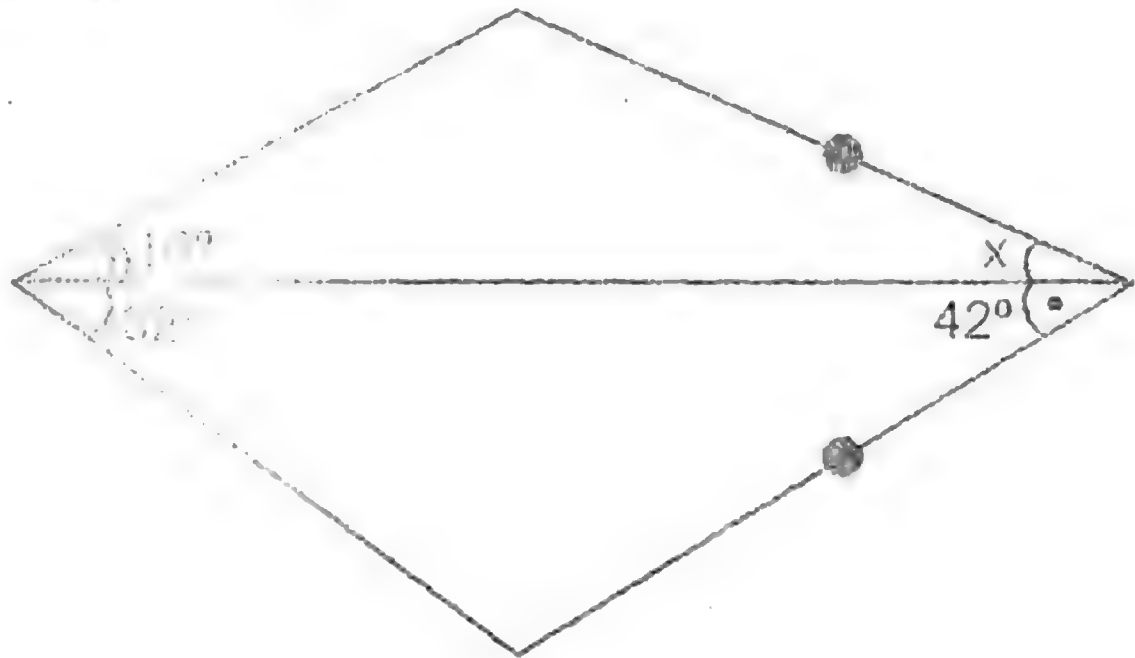
Paso N° 5: Finalmente en el triángulo total se tiene:



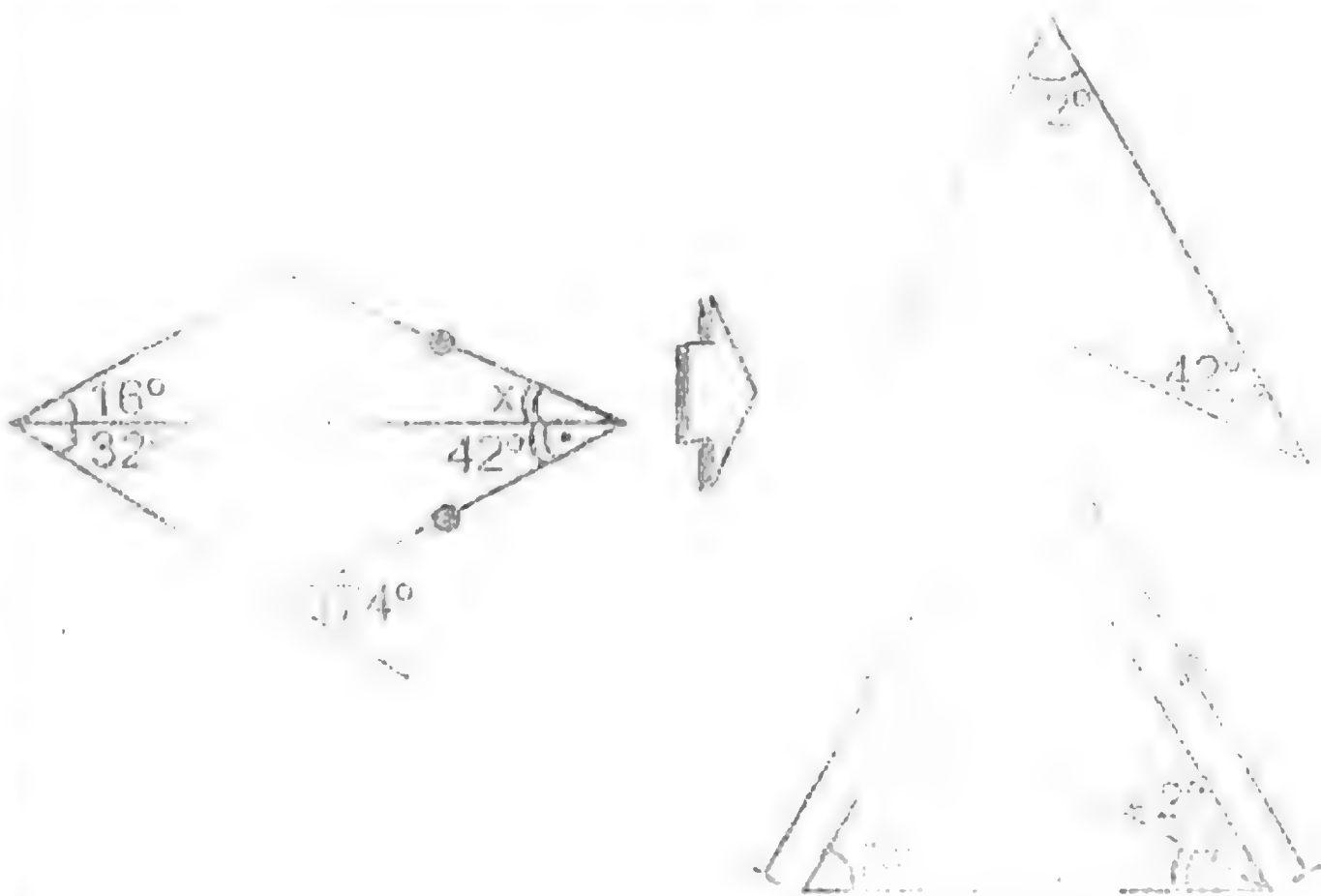
$$\begin{aligned}
 90^\circ + \theta + 3\theta + 30^\circ &= 180^\circ \\
 4\theta &= 60^\circ \\
 \theta &= 15
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

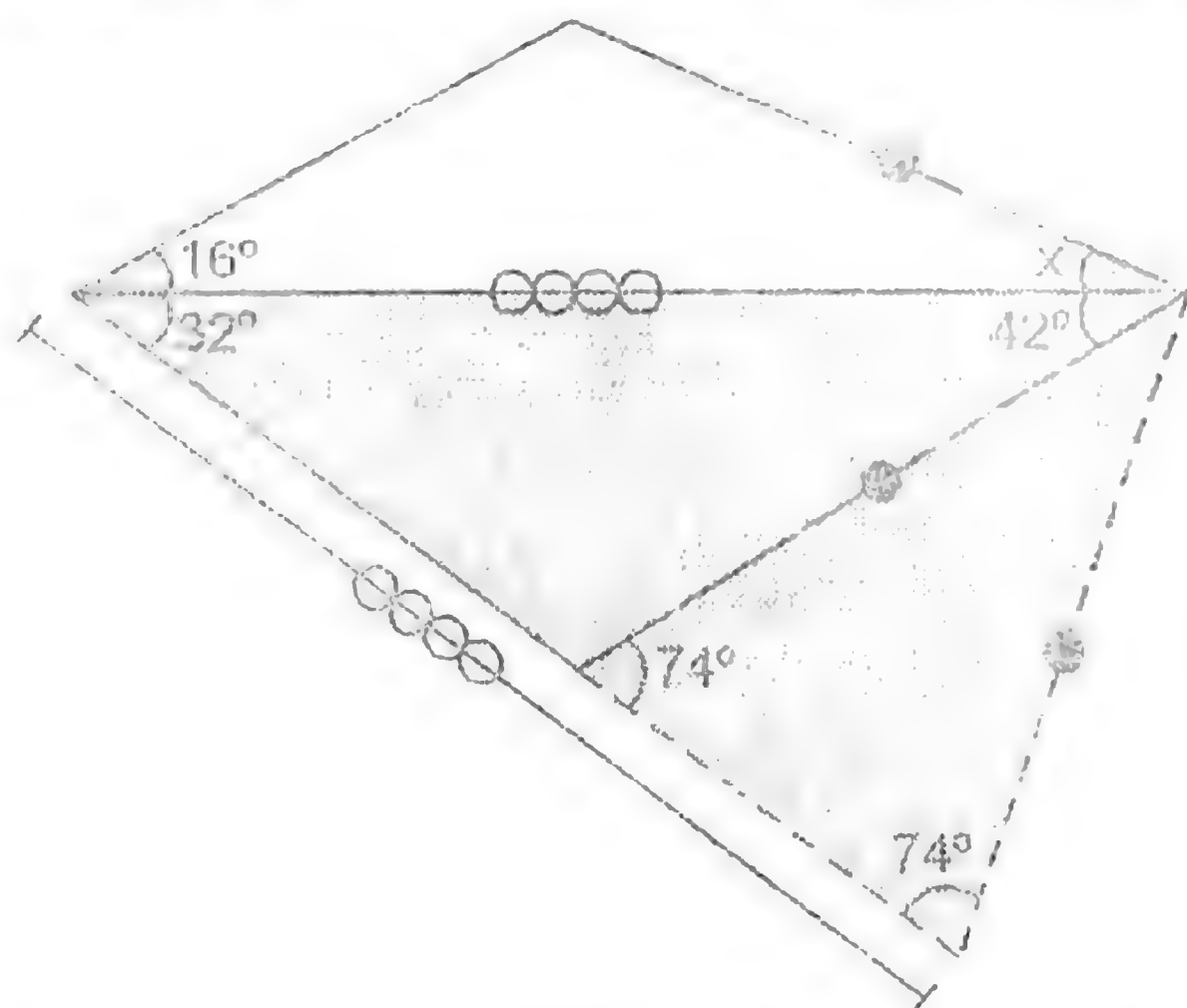
Hallar "x"



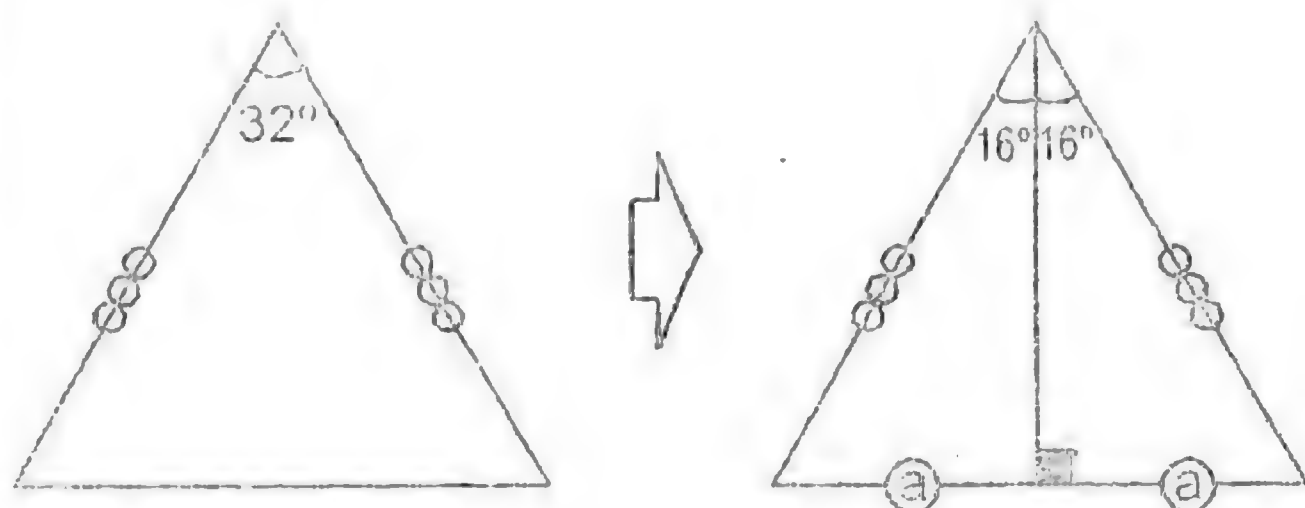
Solución: En la figura se observó que podemos realizar el siguiente trazo para obtener triángulo isósceles de la siguiente manera.



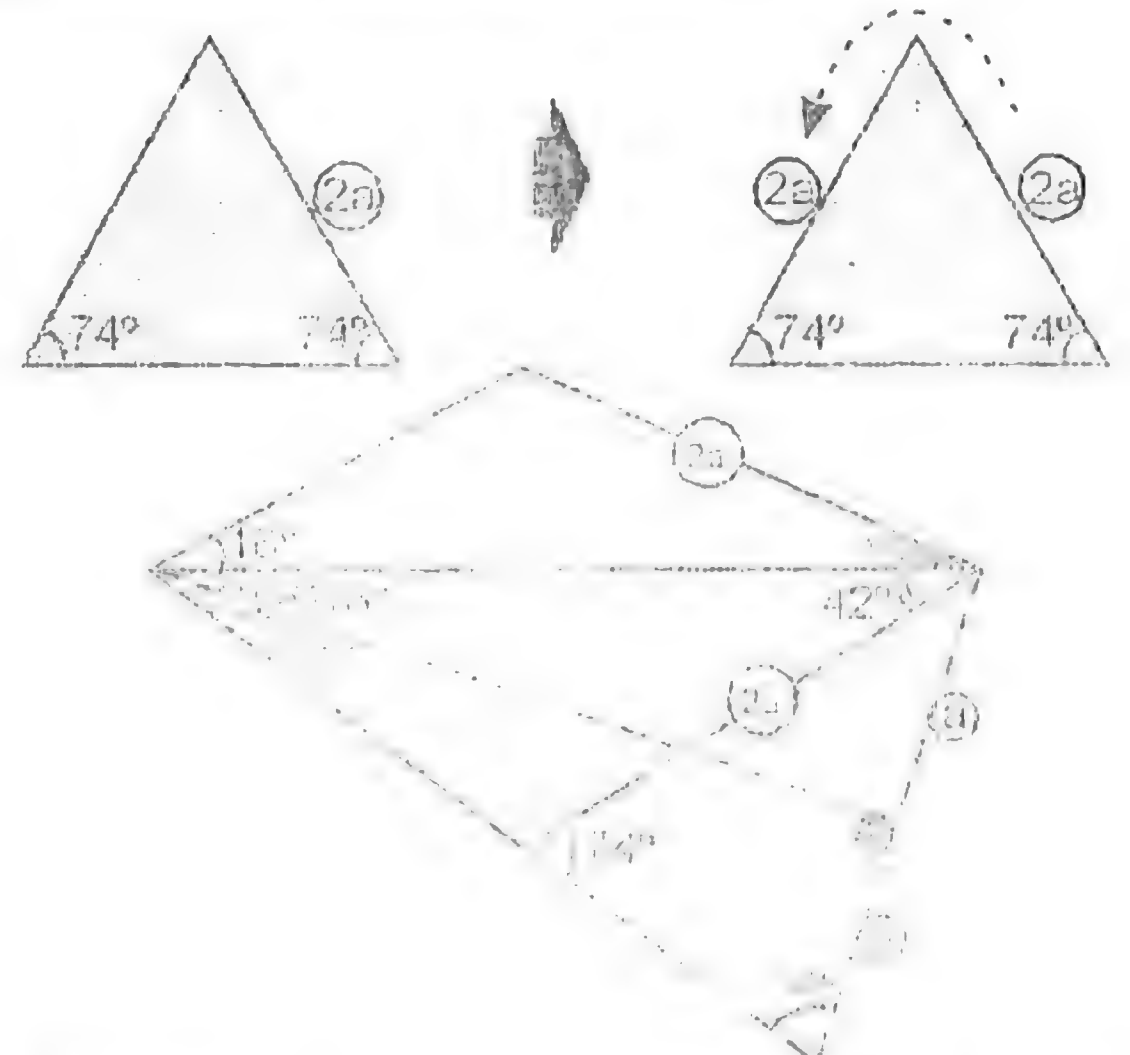
Paso N° 1: Realizamos el trazo sugerido en la figura



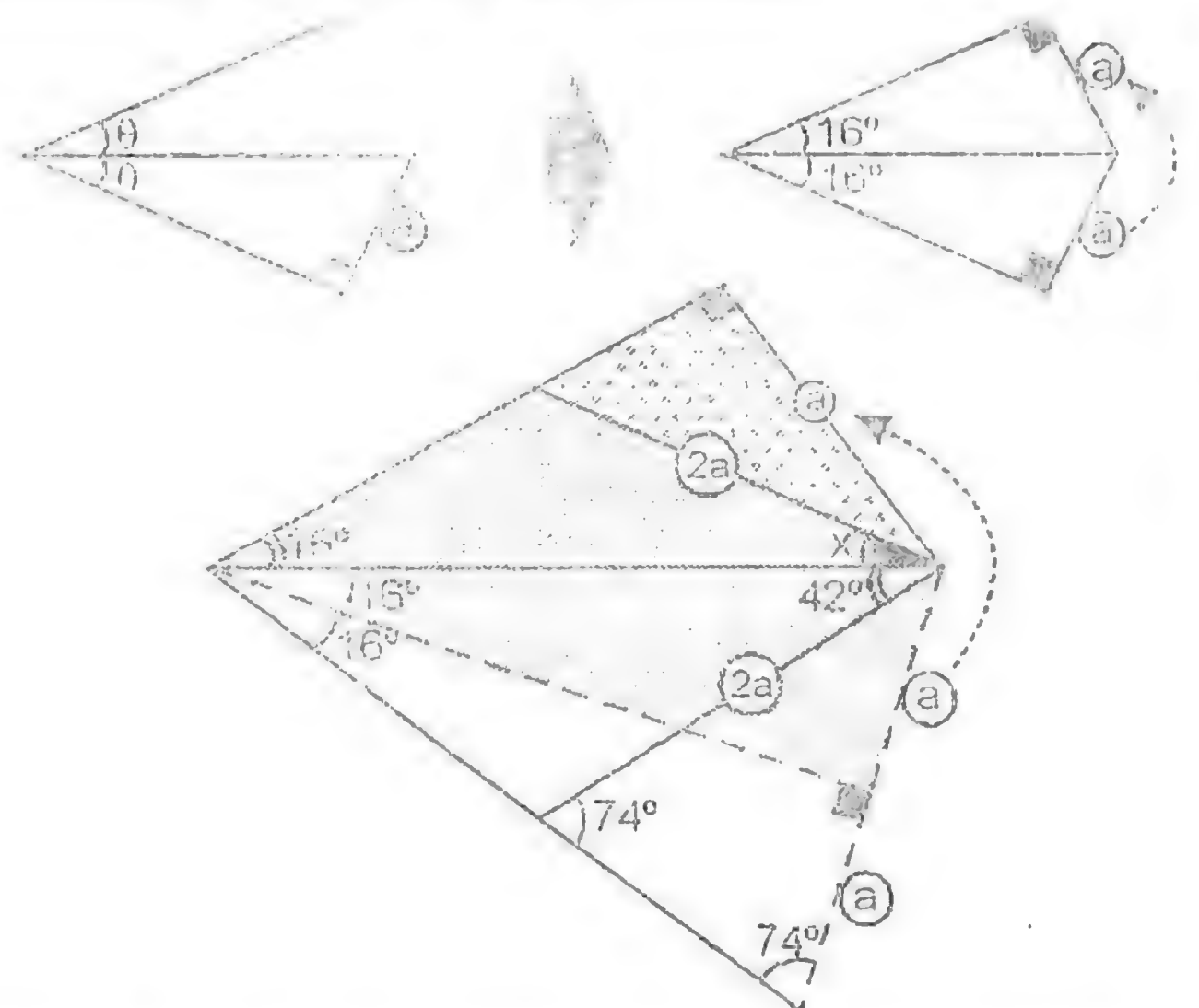
Paso N° 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



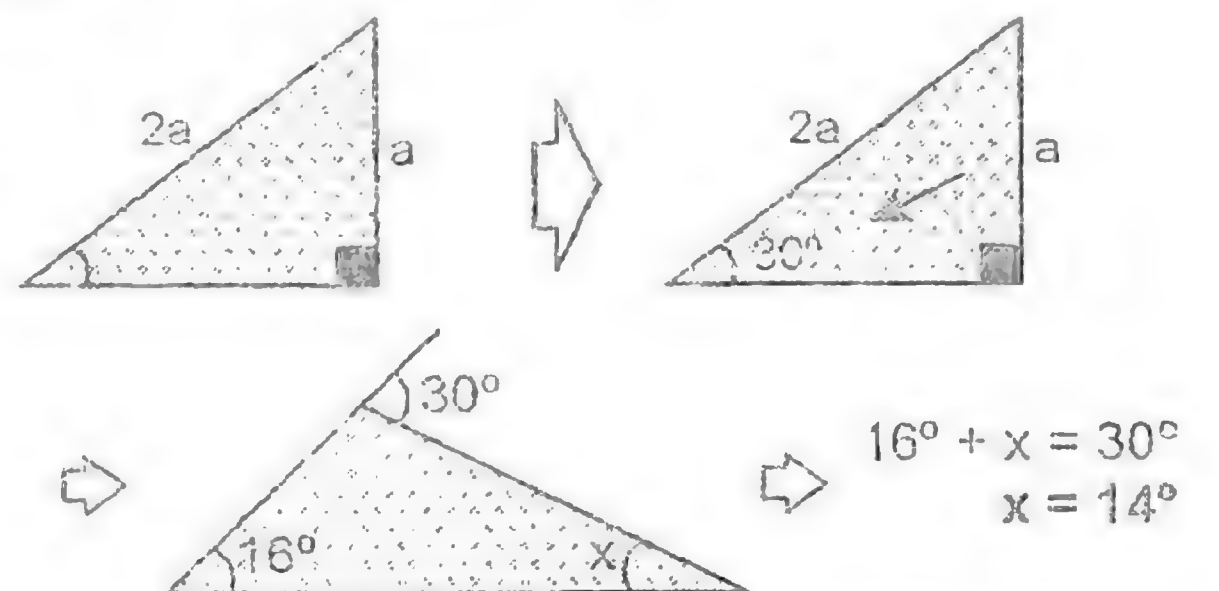
Paso N° 3: Se observa también un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



Paso N° 4: Luego se observa la propiedad en donde se cumple:



Paso N° 5: Se observa que se obtiene un triángulo notable de 30° y 60°

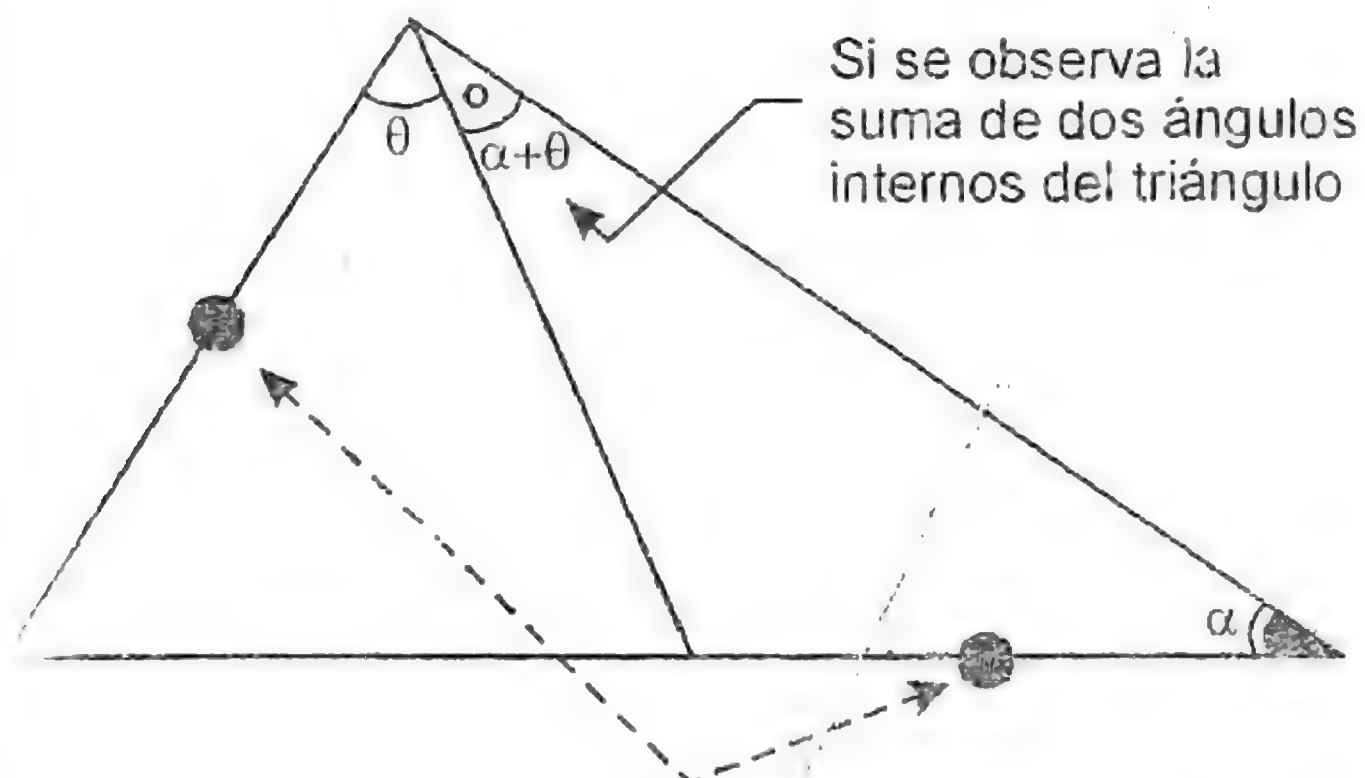


El Criterio

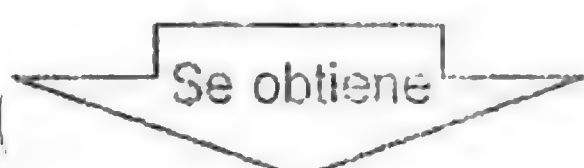
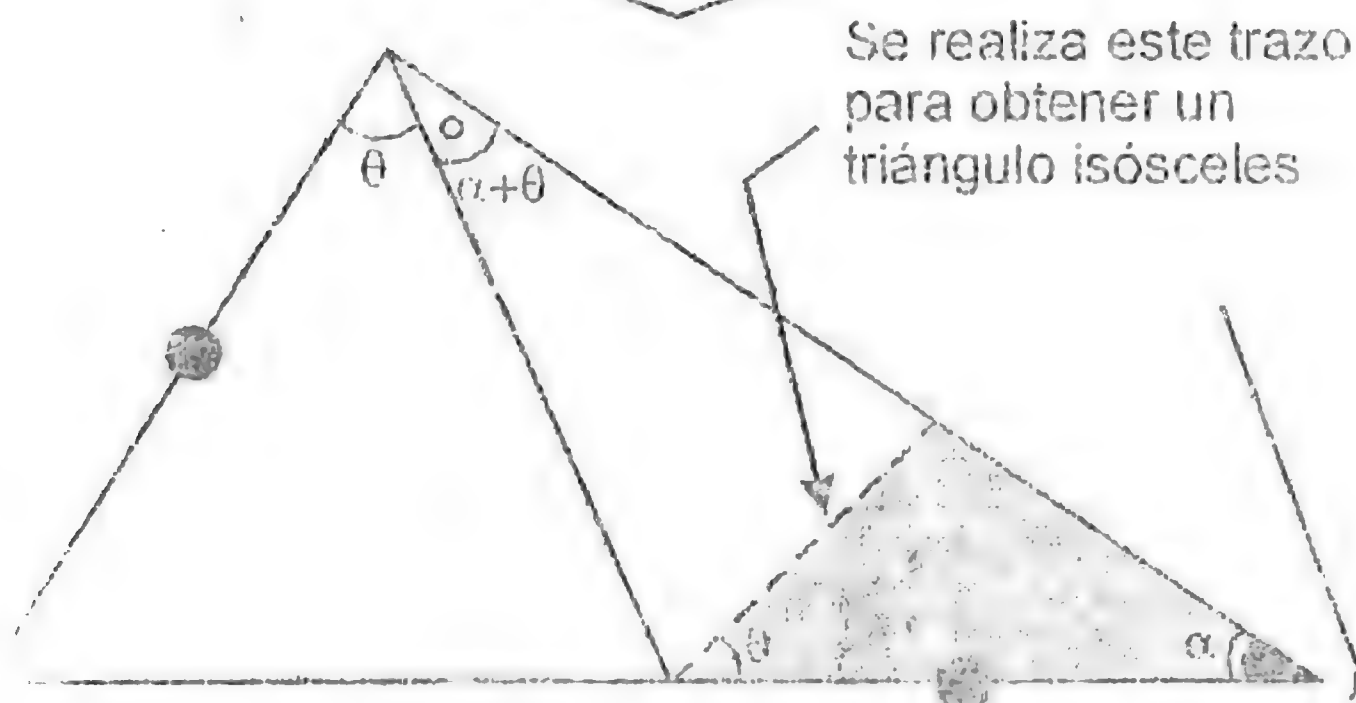
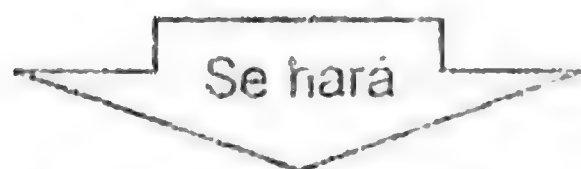
"BUSCANDO CONGRUENCIA"

Quando se observan triángulos de las siguientes con lados iguales en forma alternada, se realizaran los siguientes trazos.

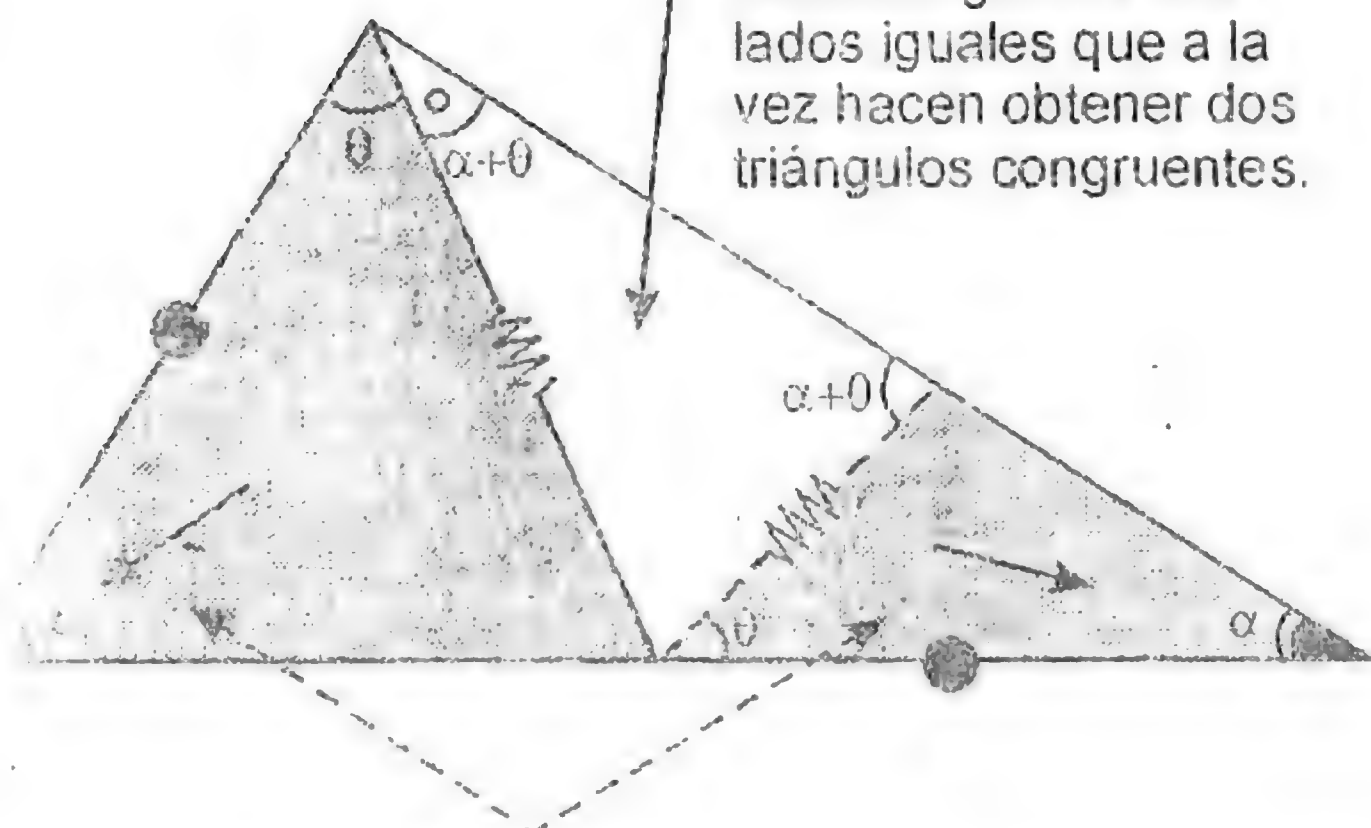
CASO I



Se observa lados iguales en forma alternada.

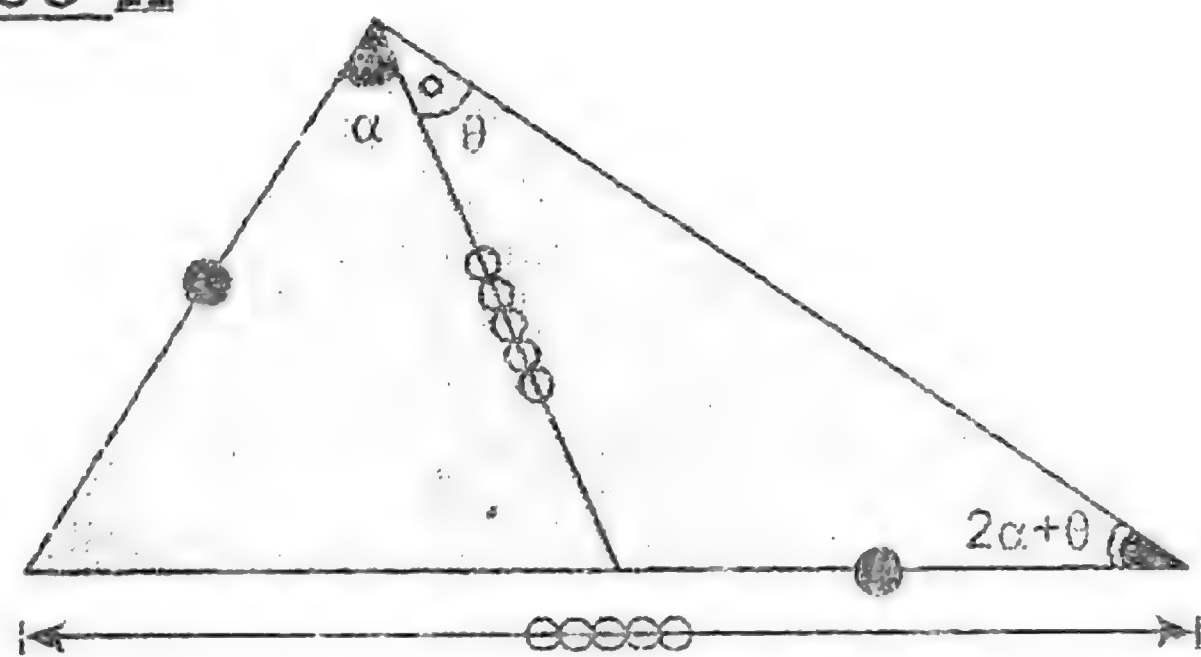


El triángulo isósceles obtenido genera dos lados iguales que a la vez hacen obtener dos triángulos congruentes.



Se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) y se aplica el principio de la congruencia.

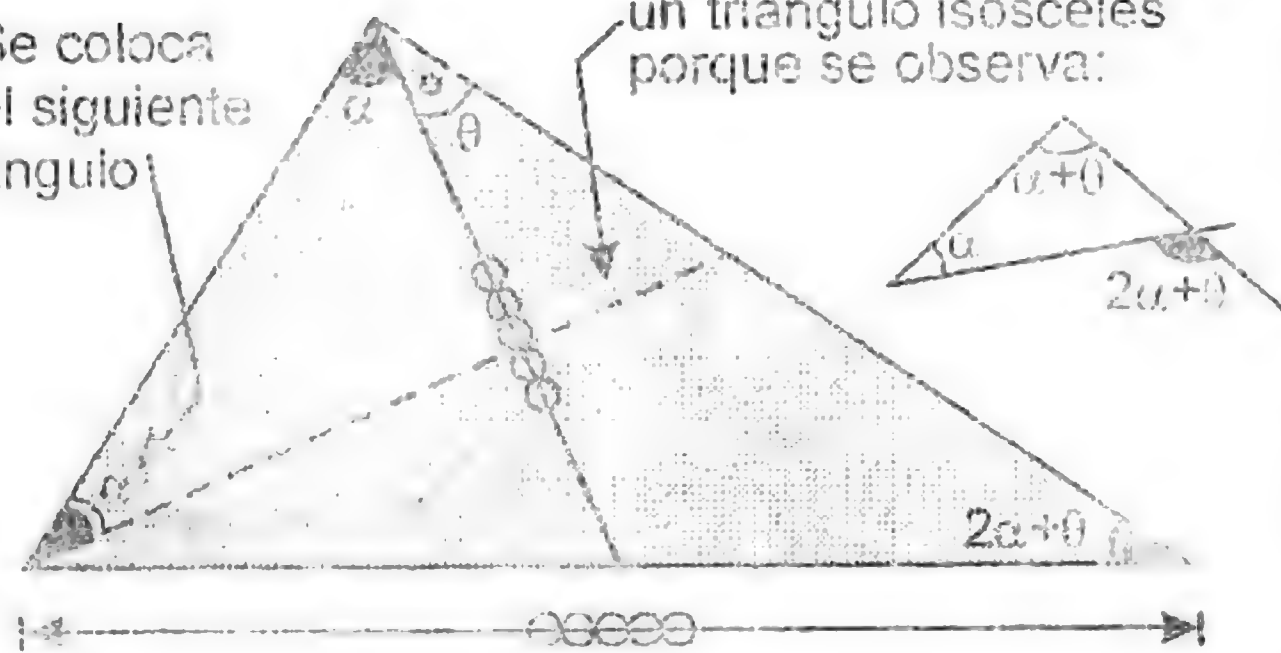
CASO II



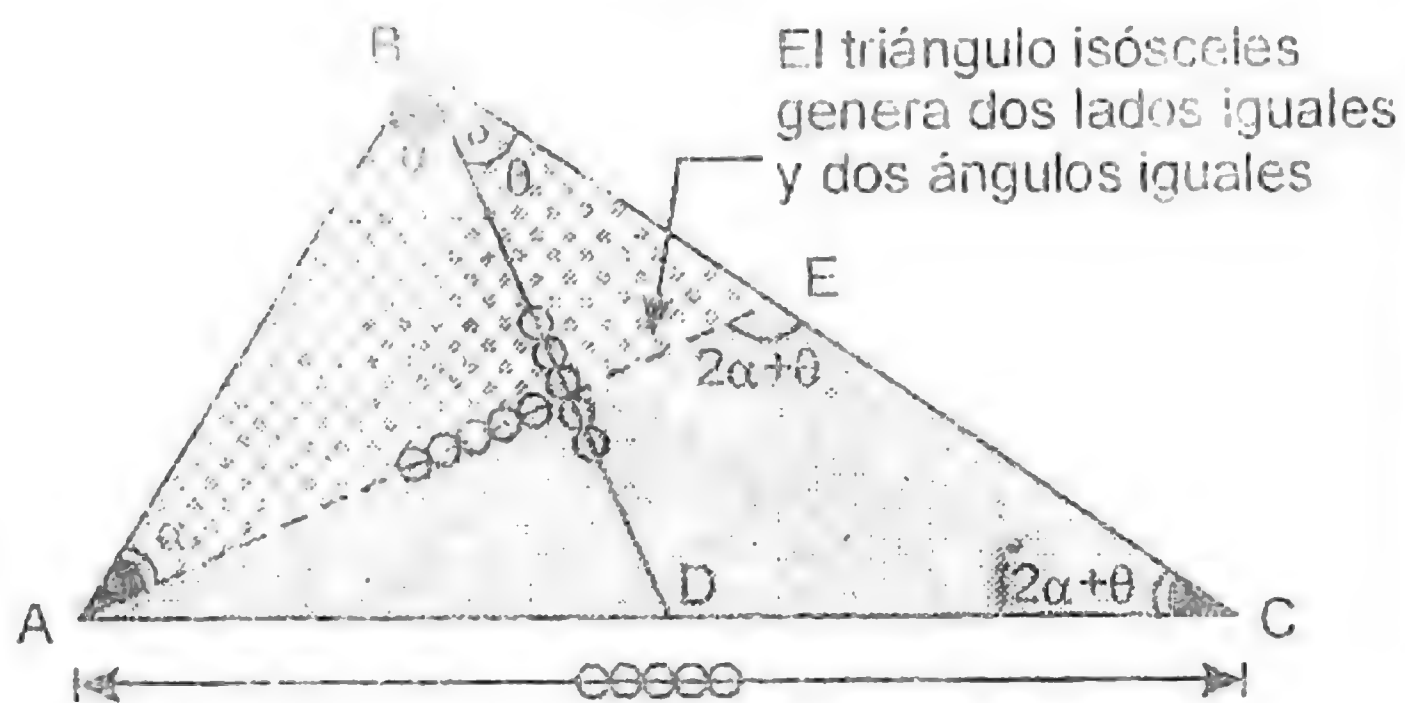
Se hará

Se coloca el siguiente ángulo

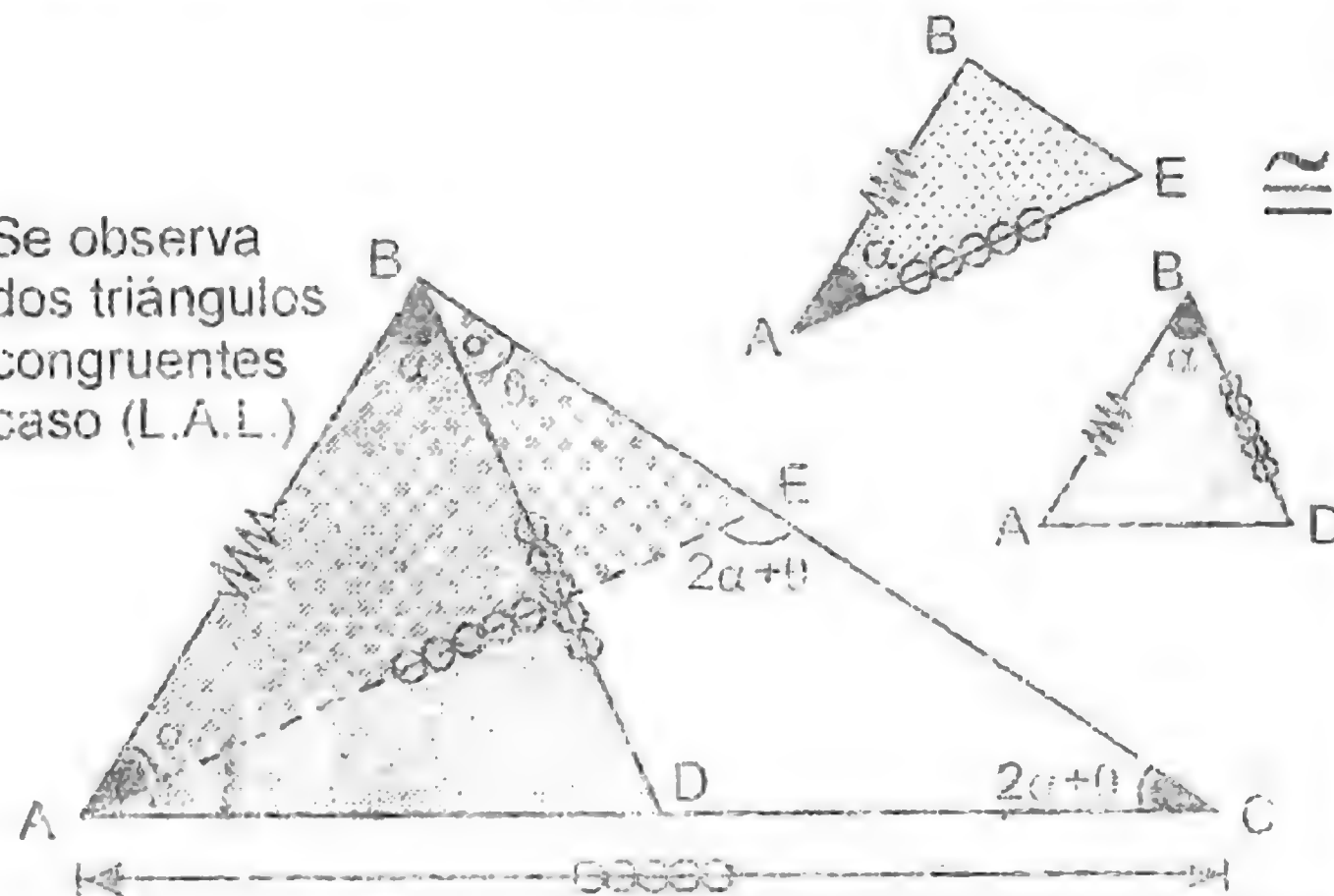
Se realiza este trazo para poder generar u obtener un triángulo isósceles porque se observa:



Se obtiene

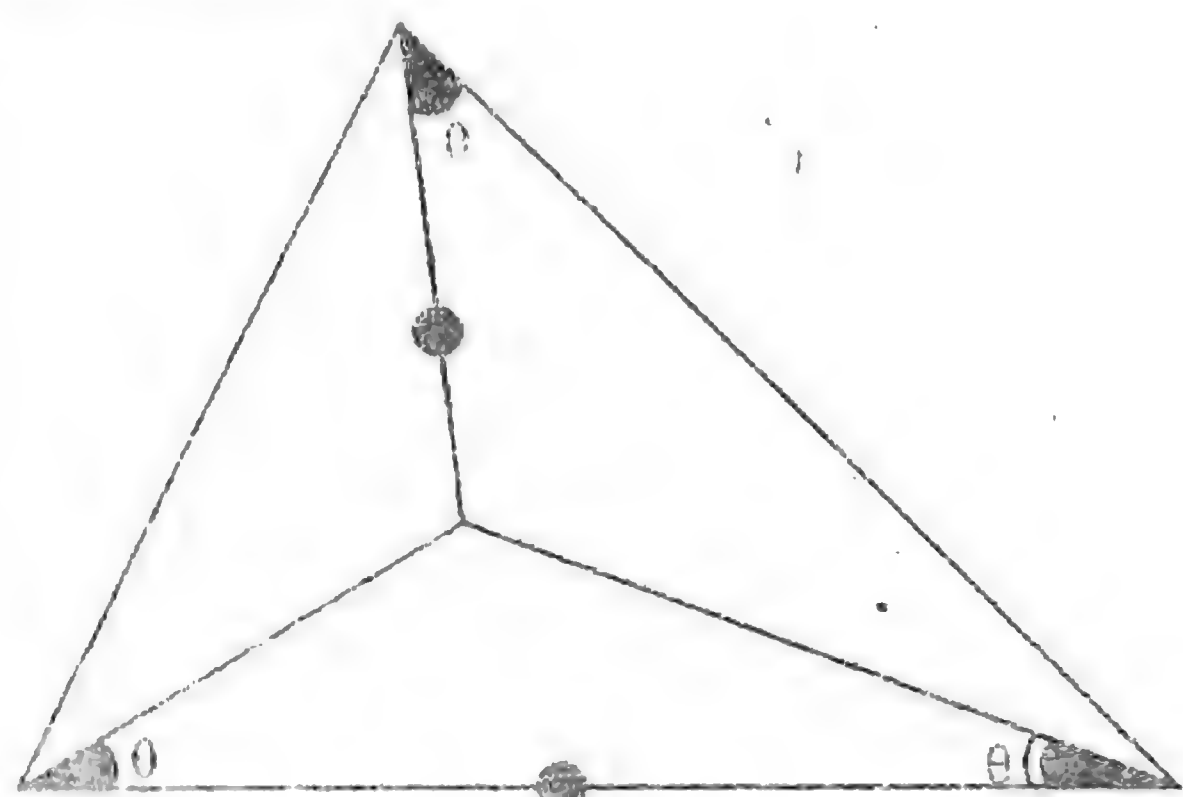


Se observa dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)

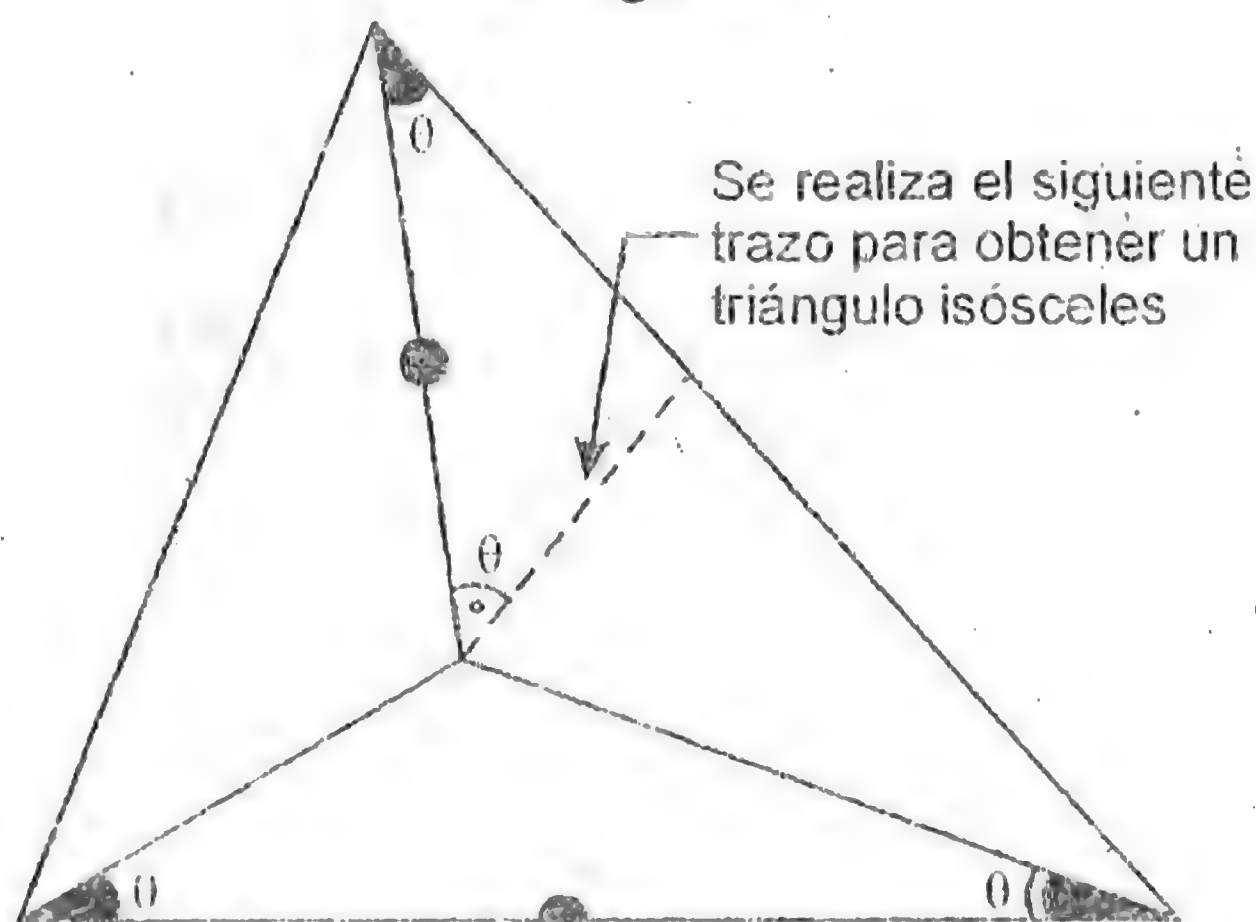


CASO III

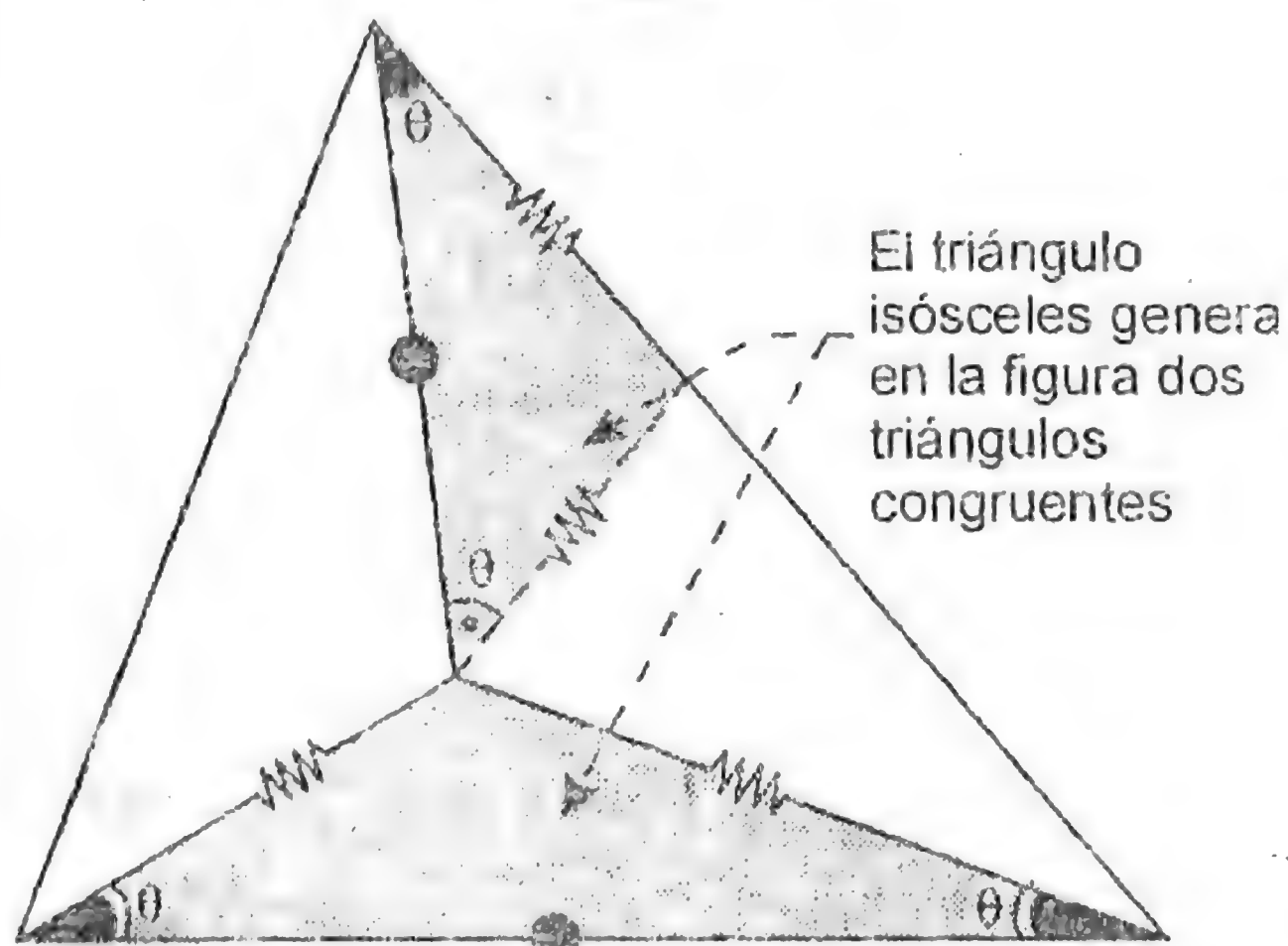
Si tenemos la siguiente figura con las siguientes características.



Se hará

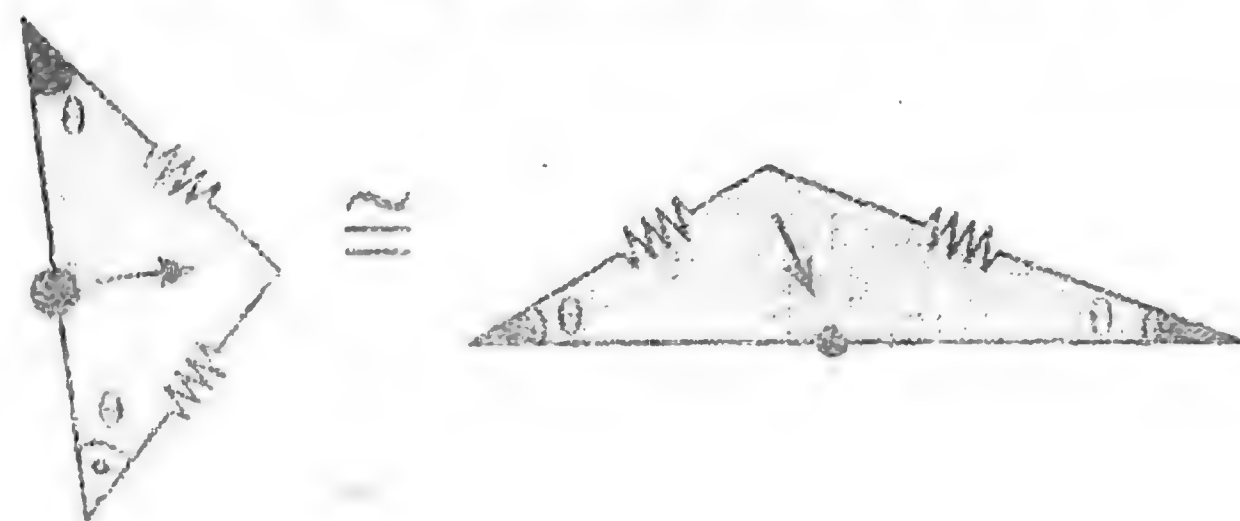


Se obtiene



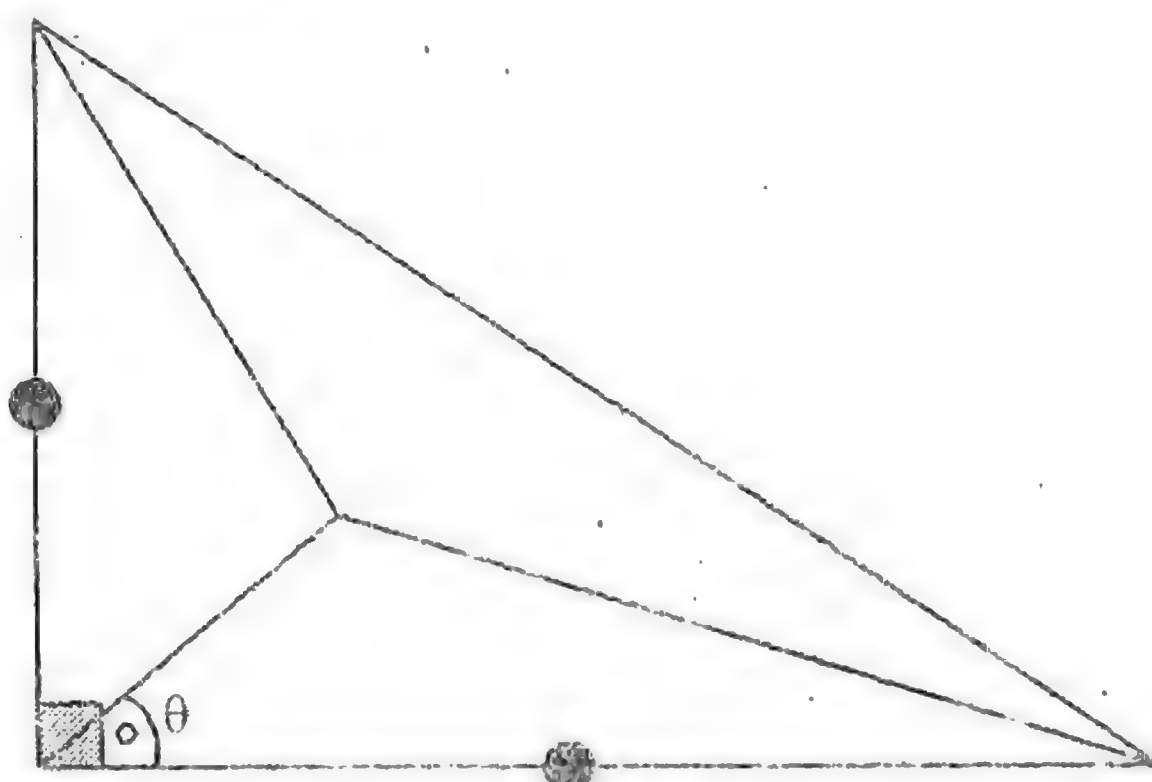
El triángulo isósceles genera en la figura dos triángulos congruentes

Se observa congruencia, caso (A.L.A.)

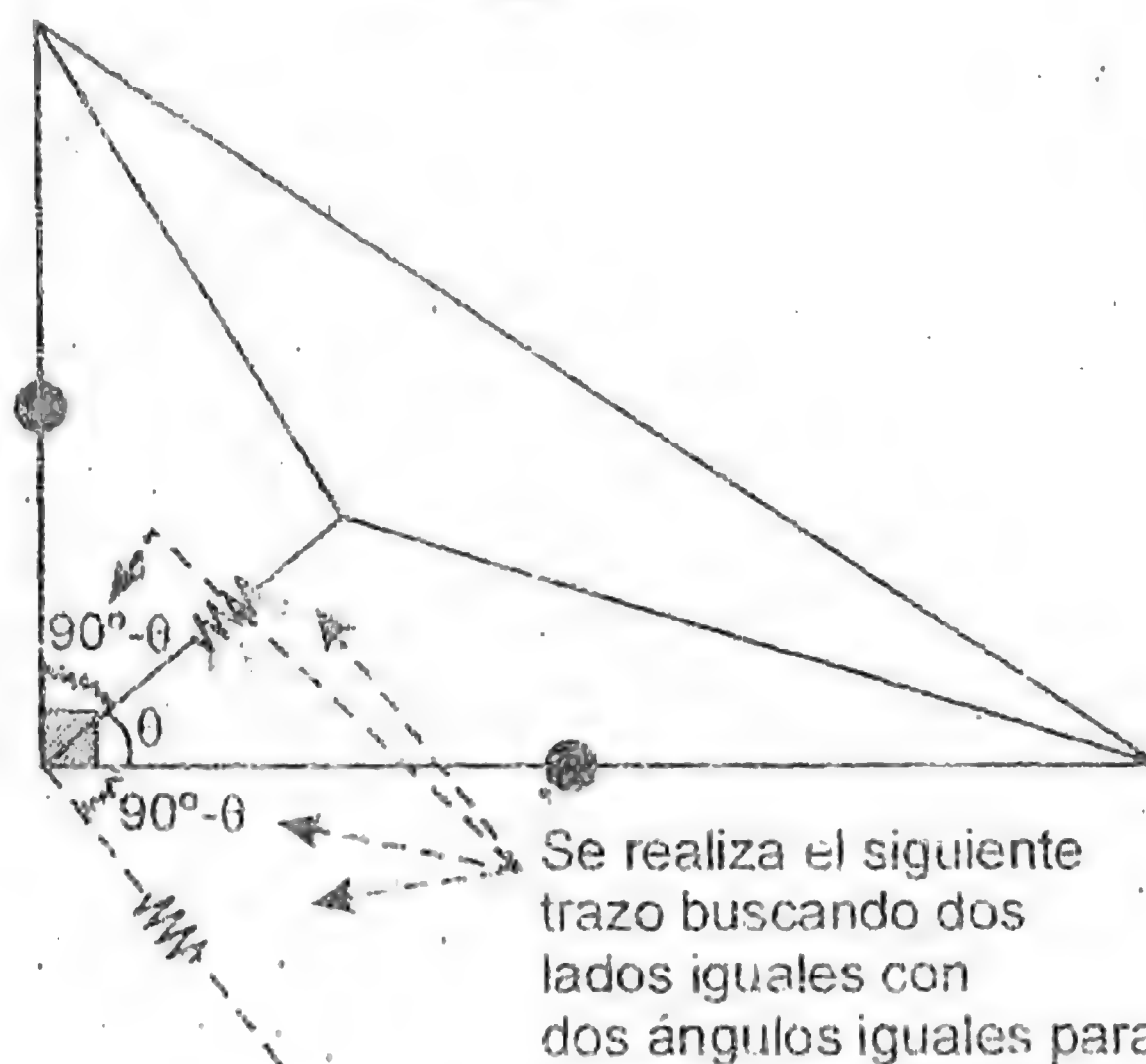


CASO IV

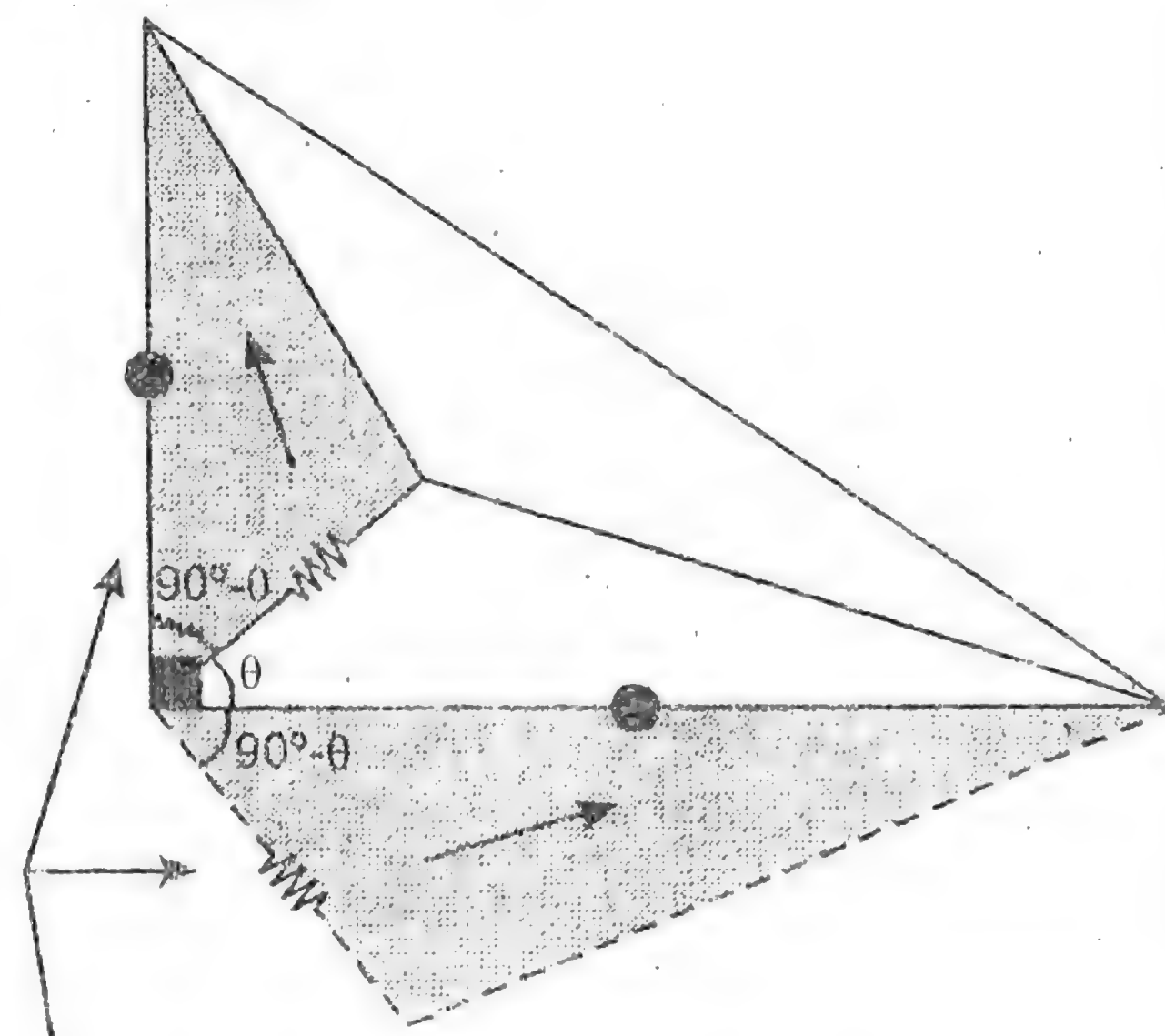
Si tenemos la siguiente figura con la siguiente característica.



Se hará



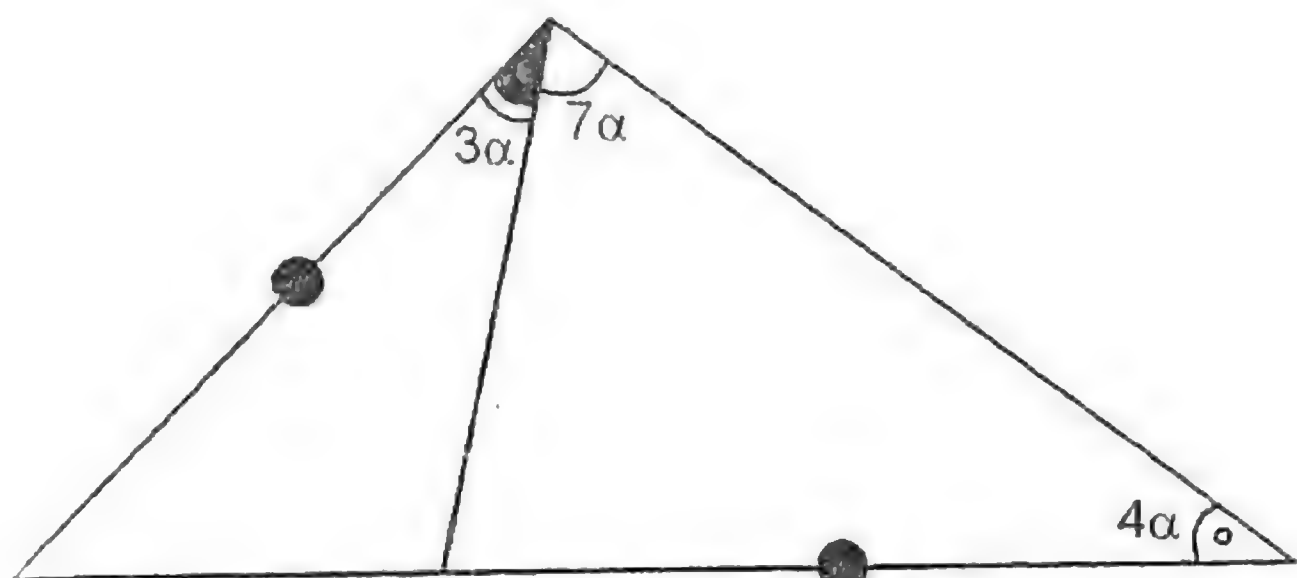
Se obtiene



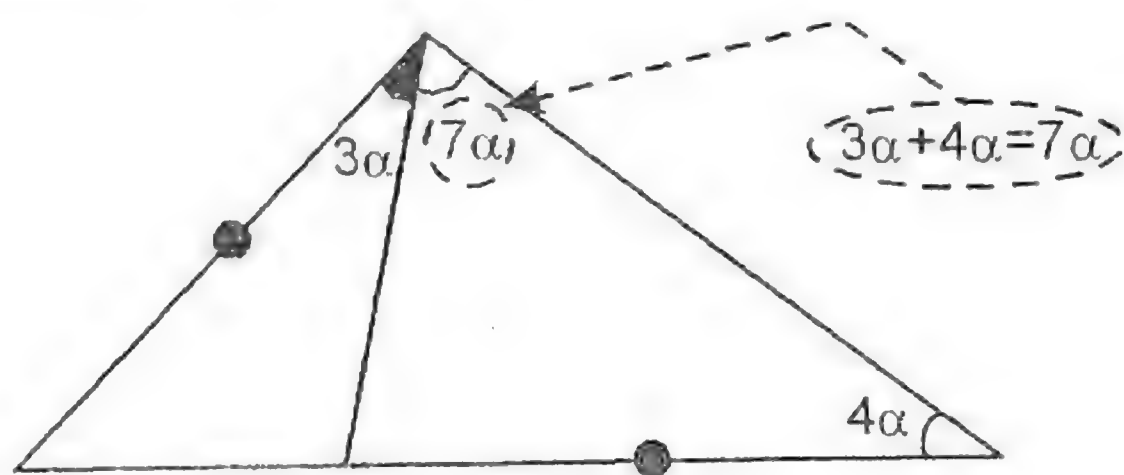
Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.) entonces se aplica "a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"

EMPLO N° 1

Calcular " α ":

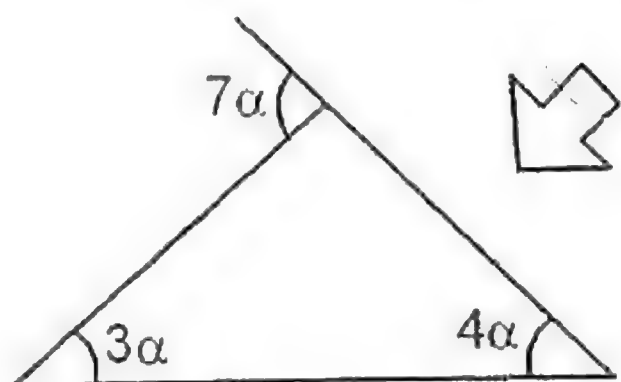
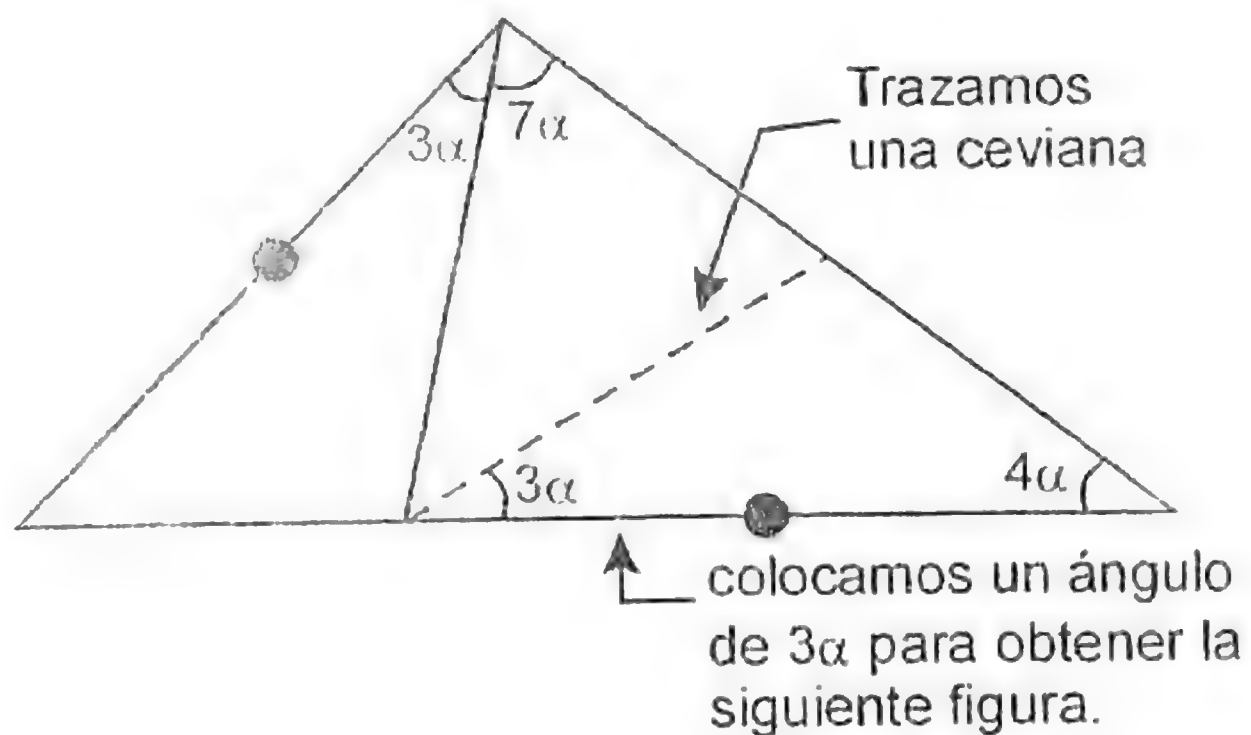


Solución: Se observa en la figura.

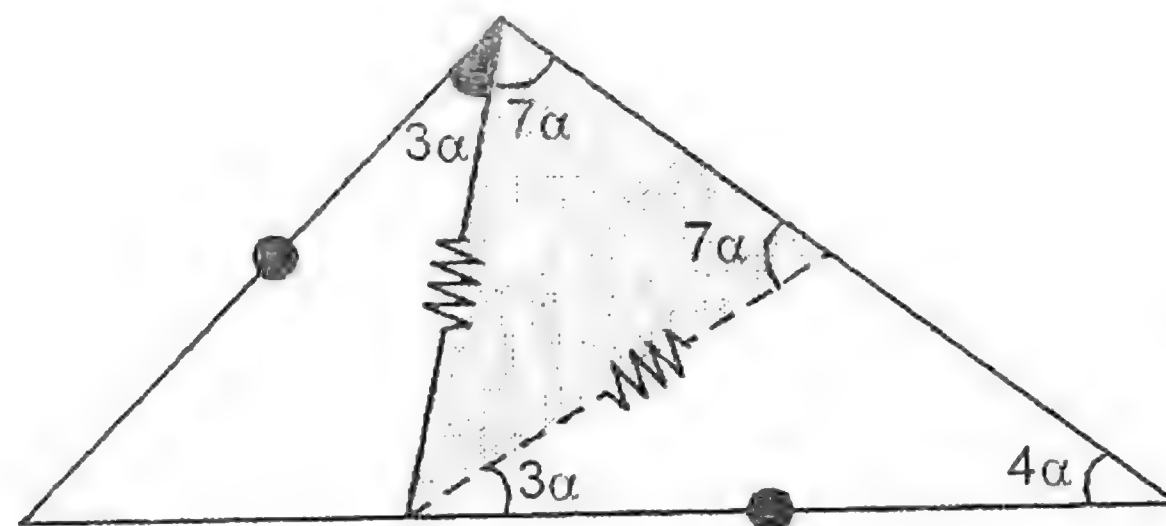
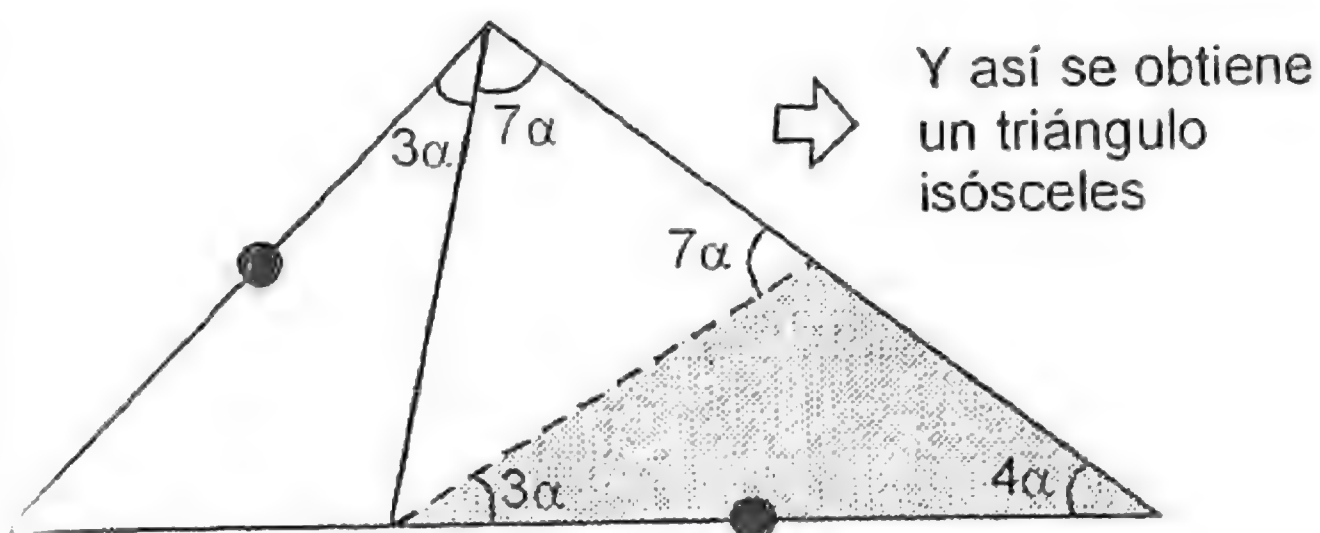


Paso N° 1:

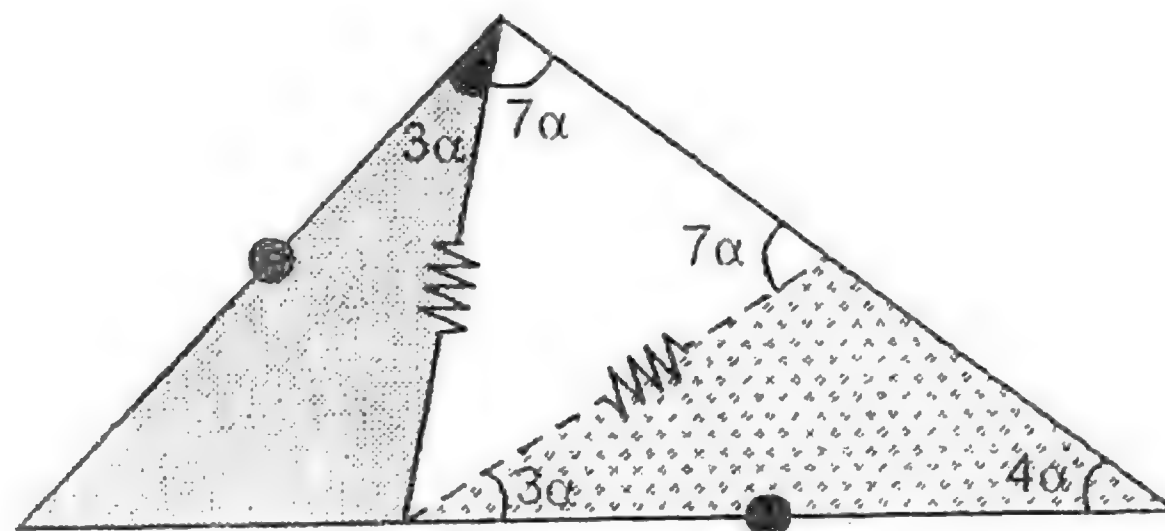
Como vemos lados iguales en forma alternada entonces hacemos.



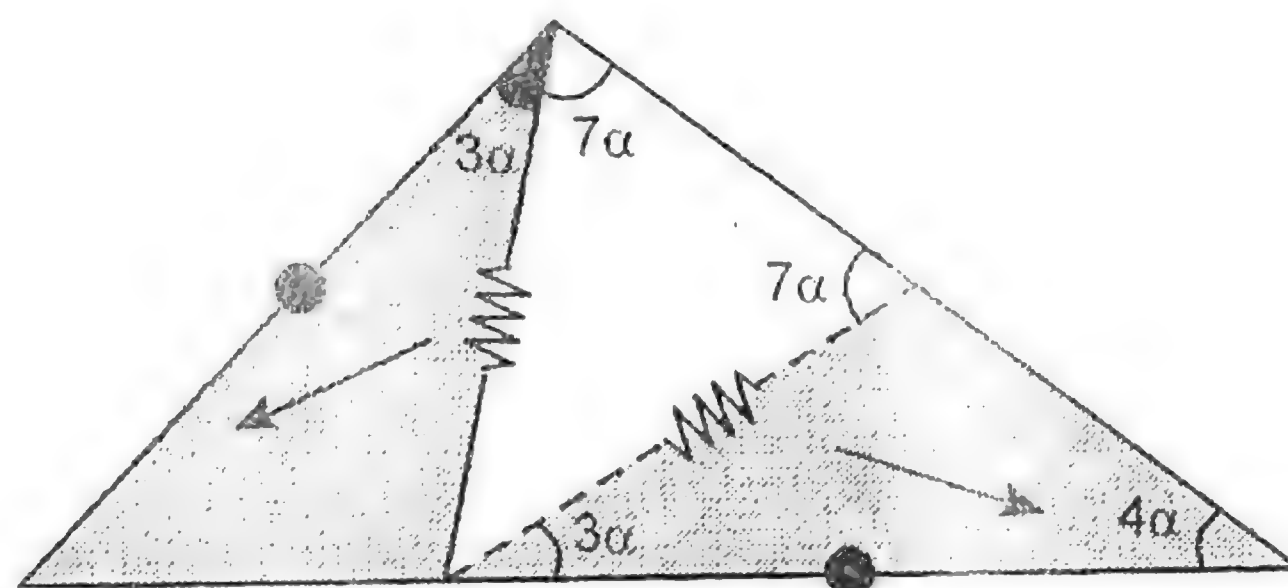
Paso N° 2:



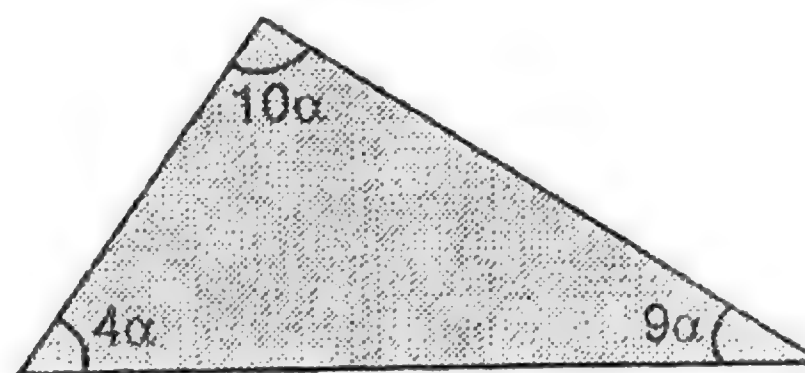
Paso N° 3: Luego se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Luego se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso N° 4:



\Rightarrow En el triángulo total.

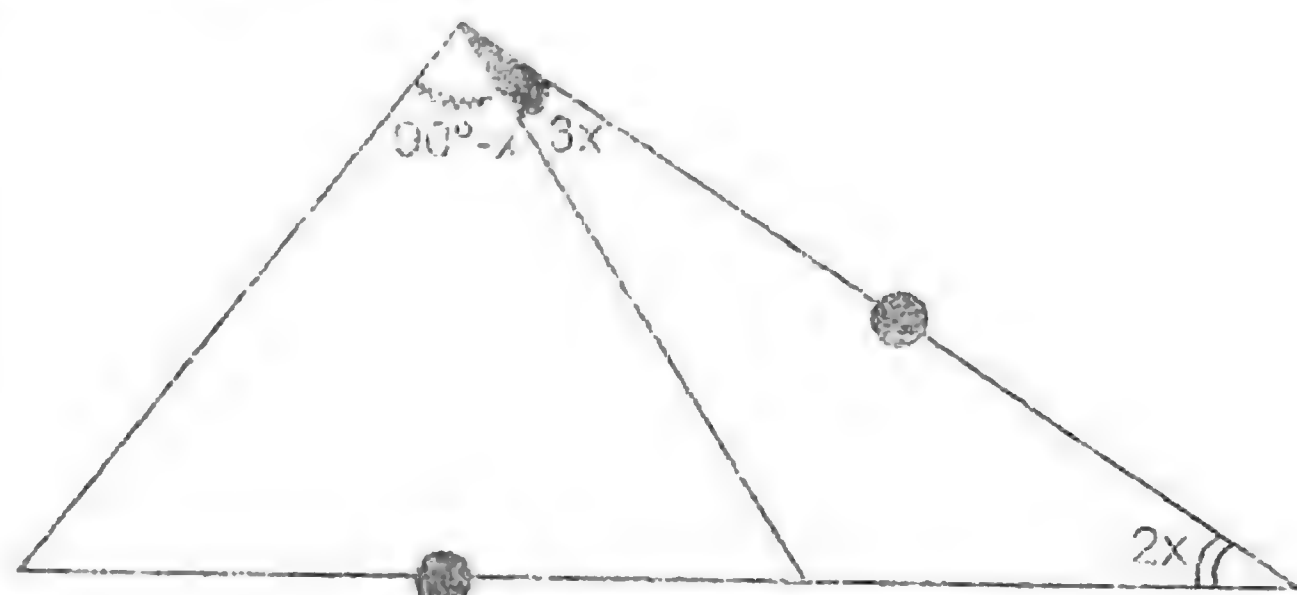
$$4\alpha + 3\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$18\alpha = 180^\circ$$

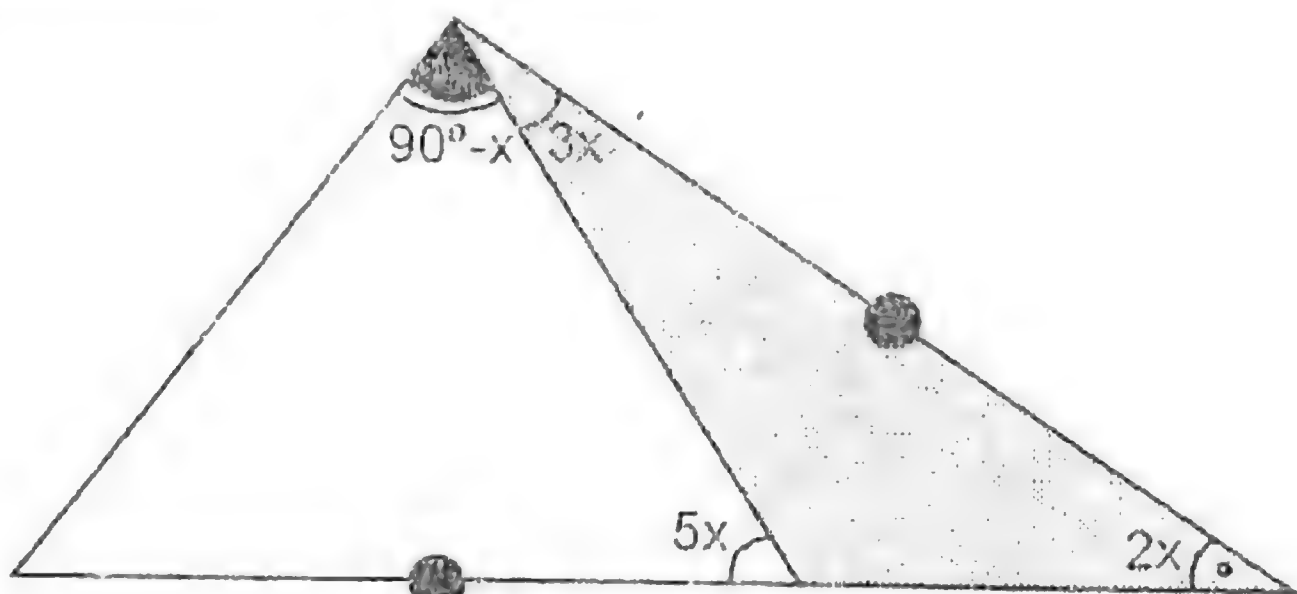
$$\alpha = 10^\circ$$

EJEMPLO Nº 2

Calcular "x"



Solución: En la figura:

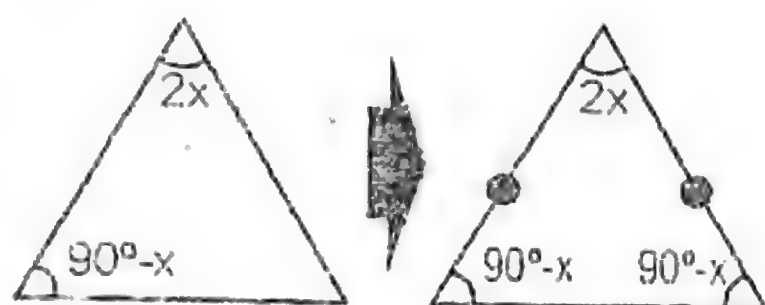


Luego se ve los ángulos

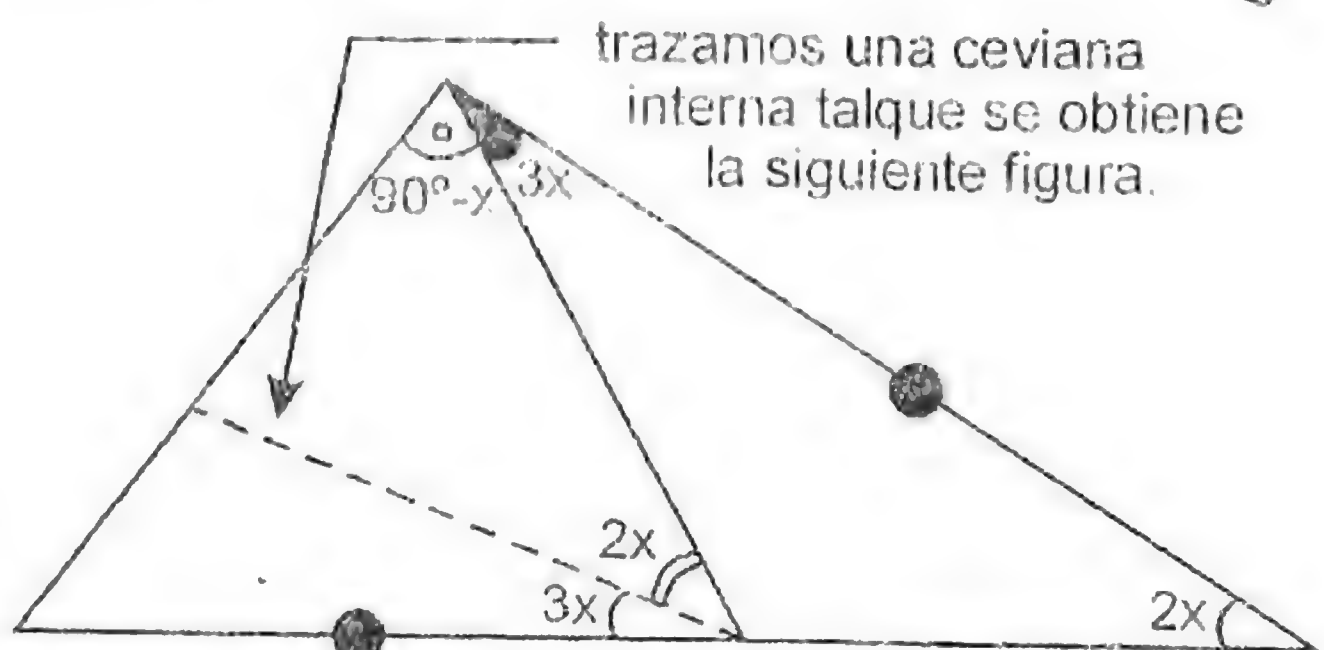


30

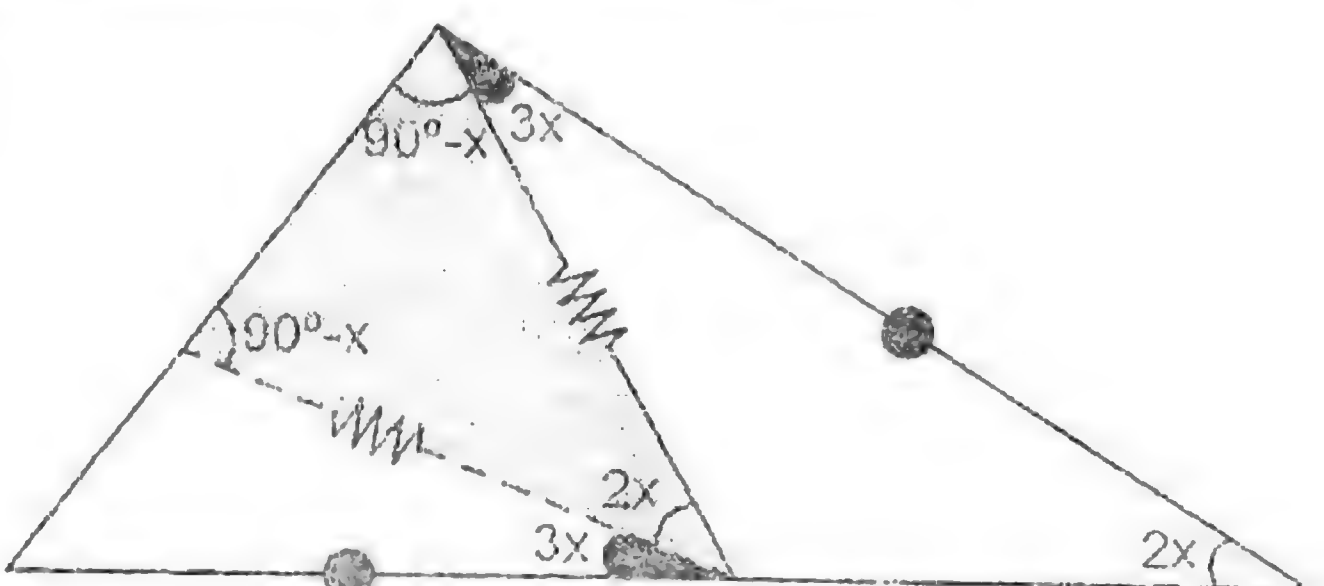
Y lo llevamos aun triángulo para obtener.



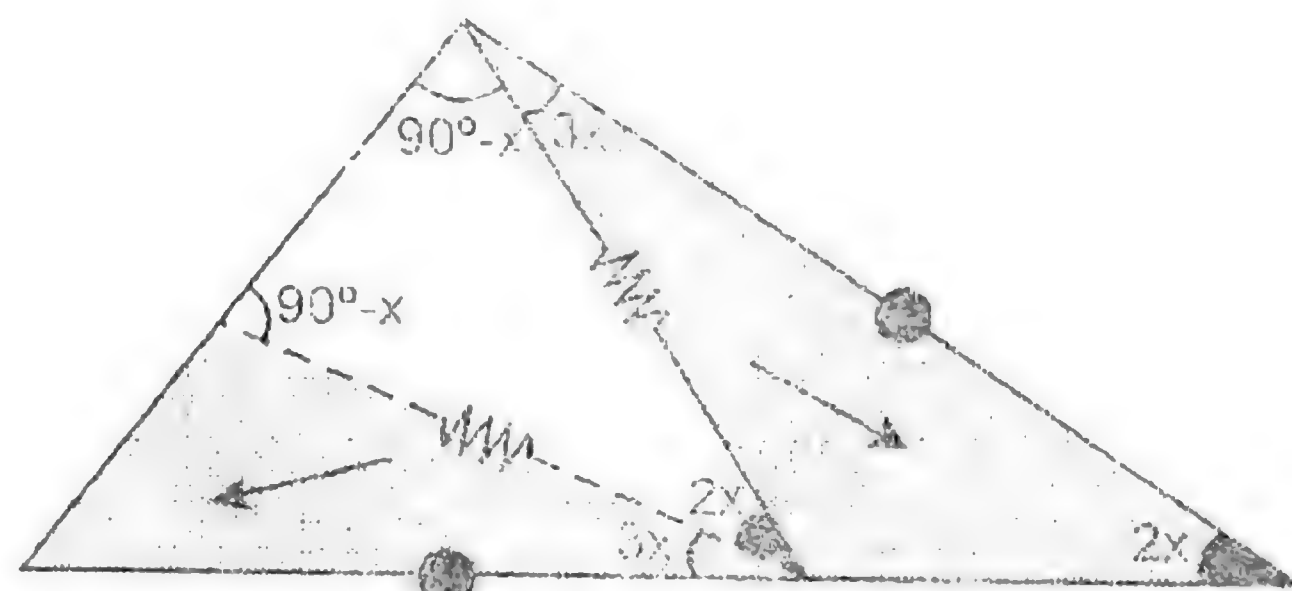
Paso Nº 1:



Se observa un triángulo isósceles

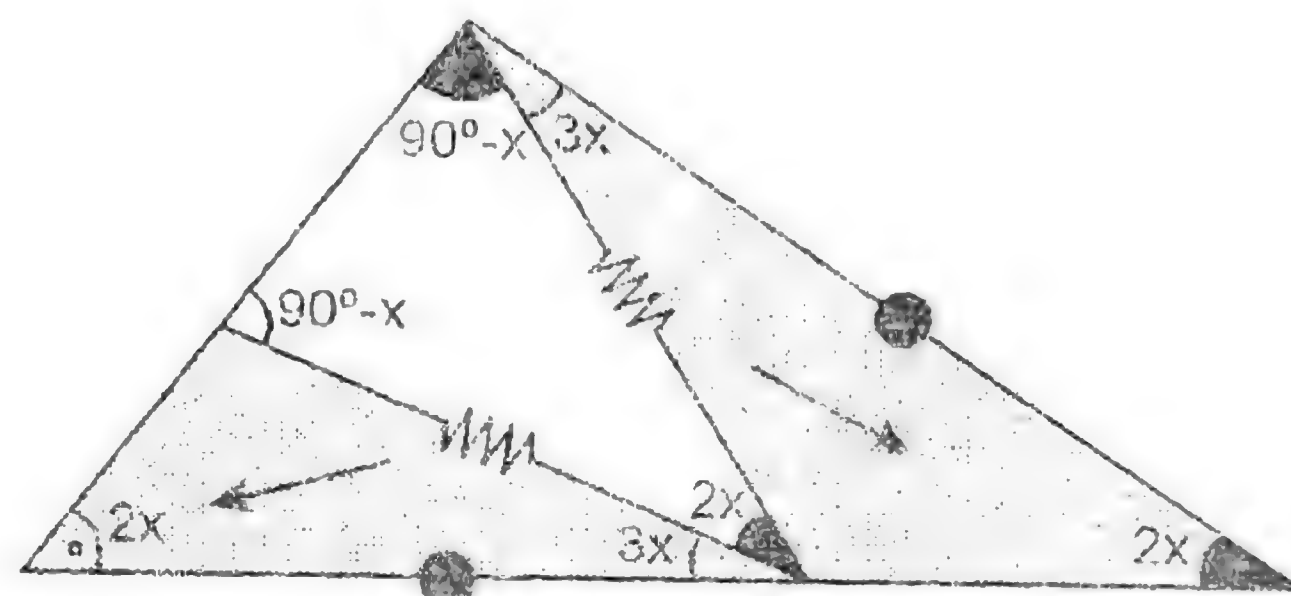


Paso Nº 2: Ahora observamos dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



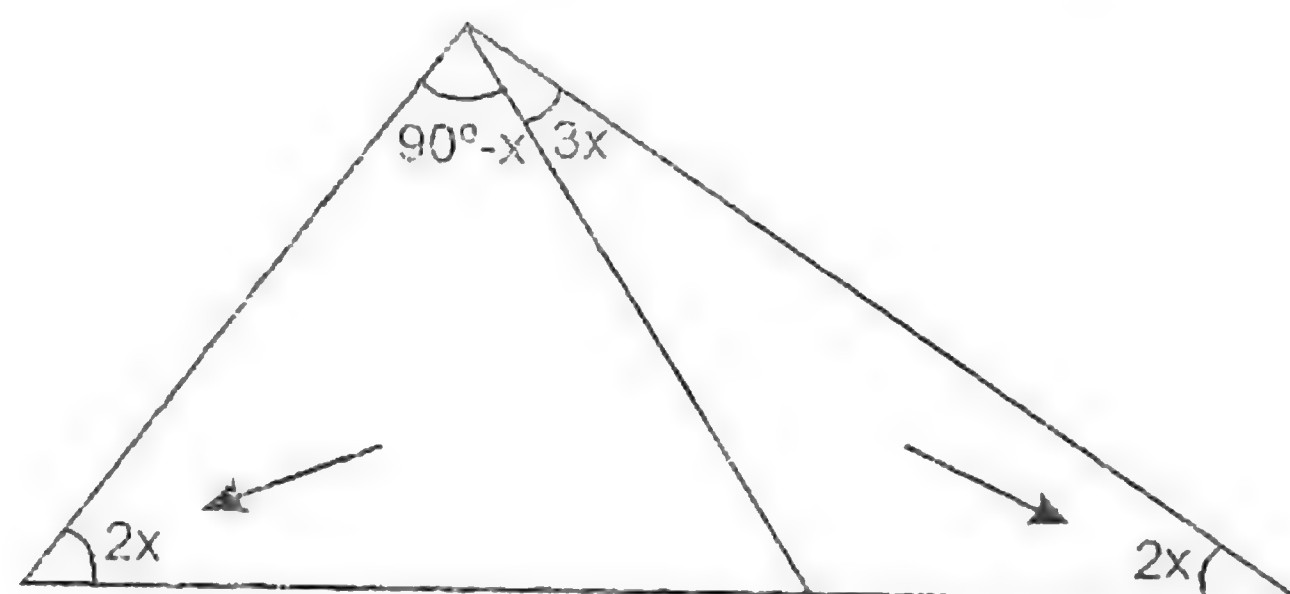
Luego se cumple:

"A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"



Paso Nº 3:

Finalmente se obtiene la siguiente figura.



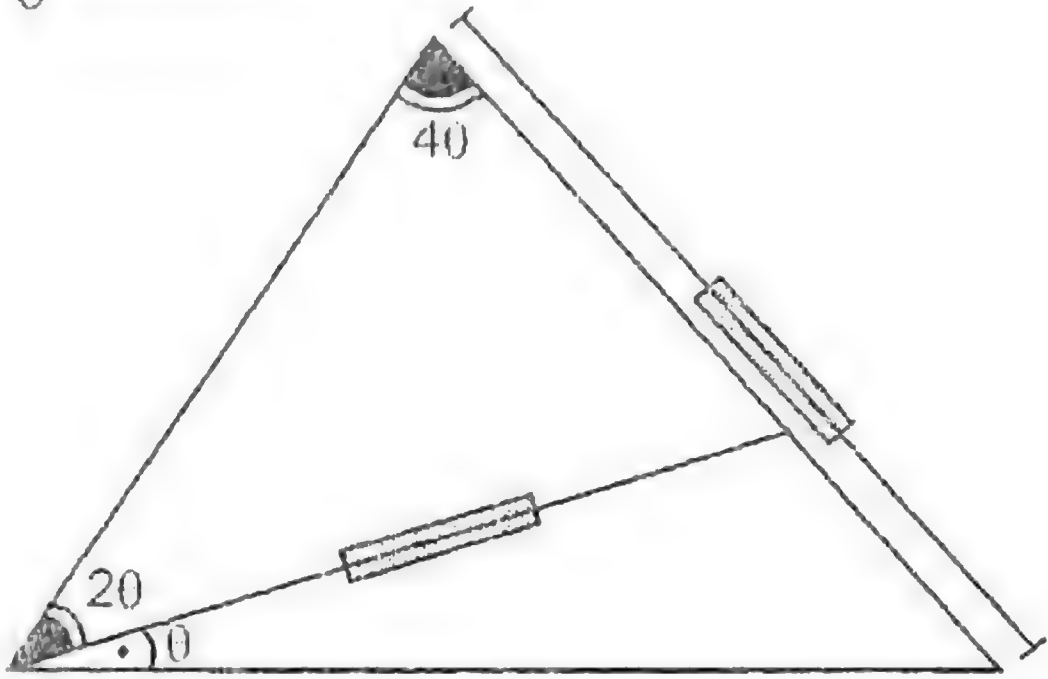
$$\text{Luego: } 2x + 90^\circ - x + 3x + 2x = 180^\circ$$

$$6x = 90^\circ$$

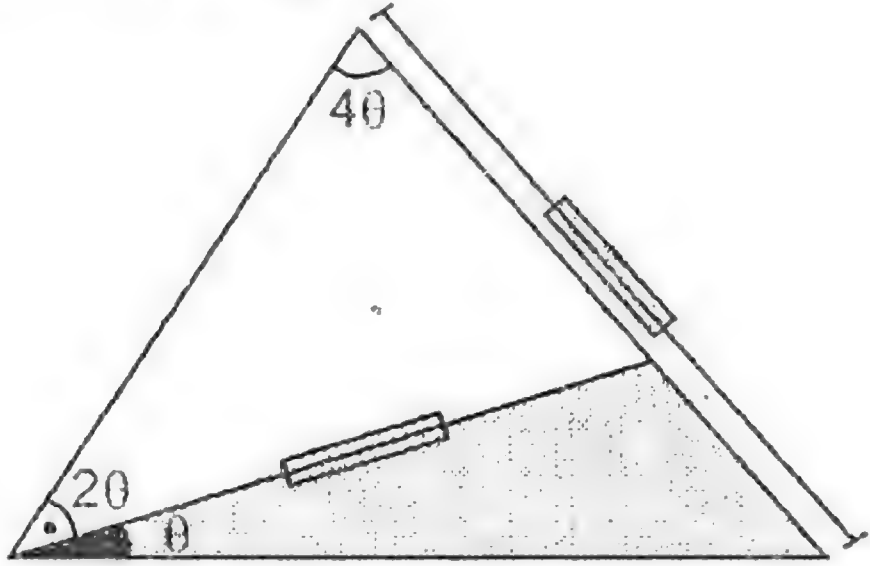
$$x = 15^\circ$$

PROBLEMA N° 3

Hallar θ

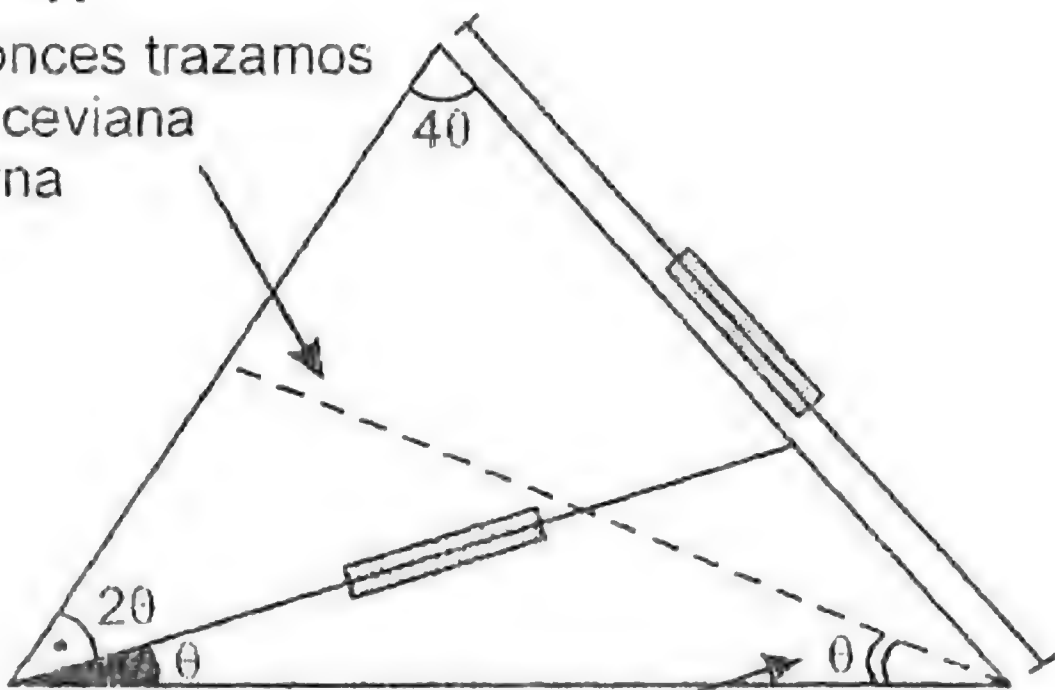


Solución: En la figura.

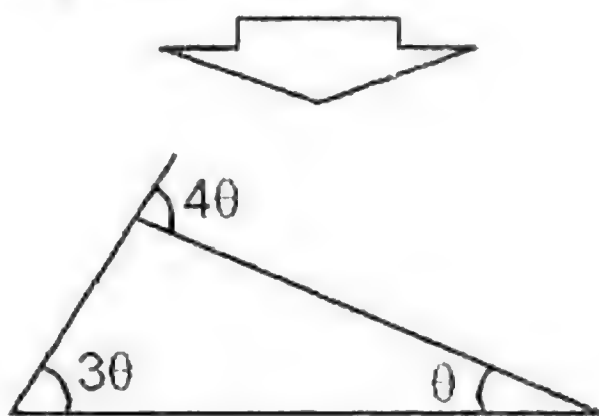


Paso N° 1:

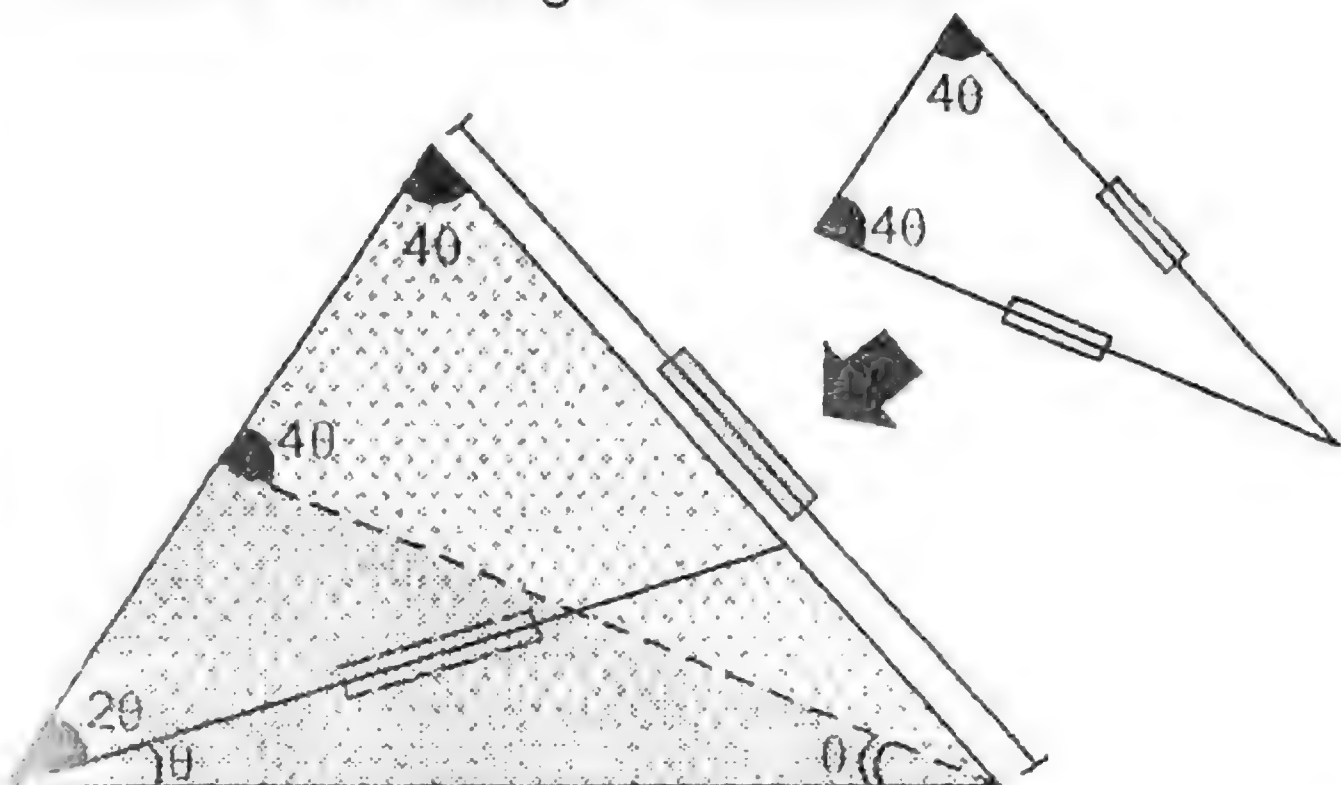
Entonces trazamos una ceviana interna



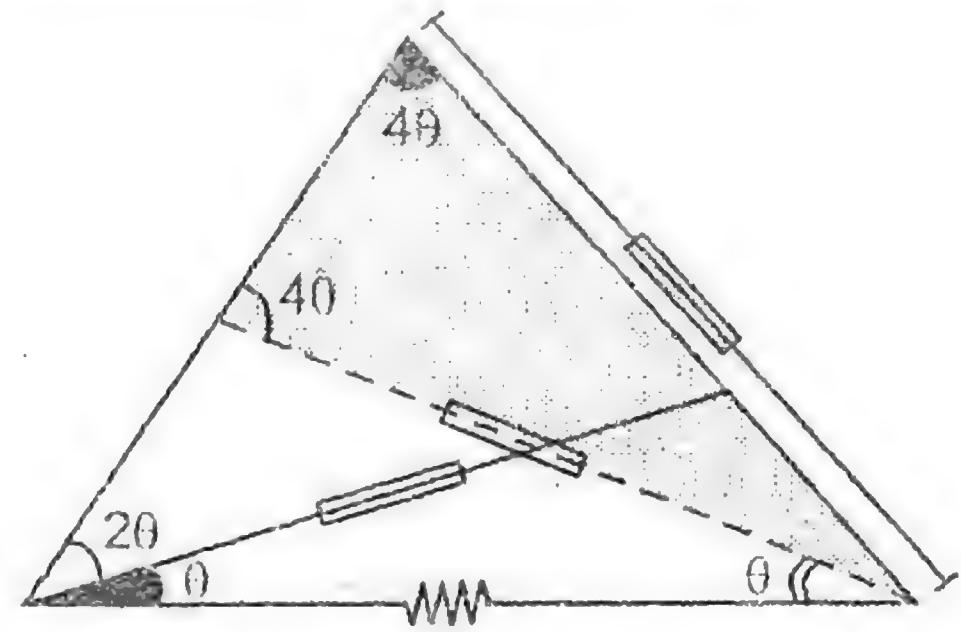
Colocamos el siguiente ángulo para obtener la siguiente figura



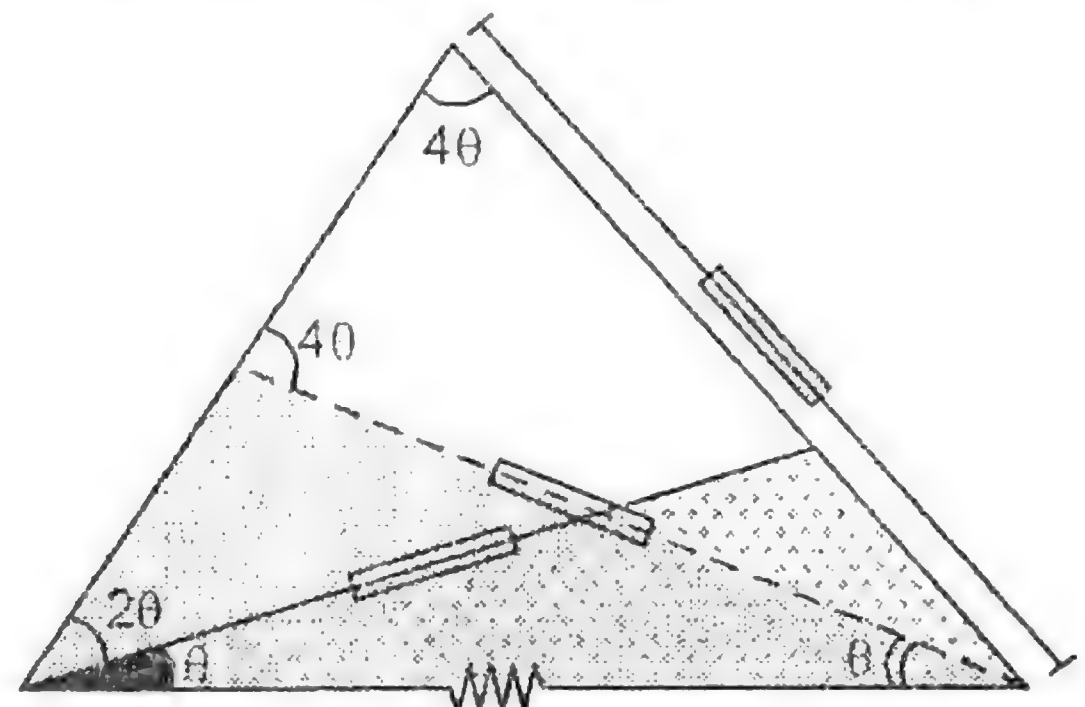
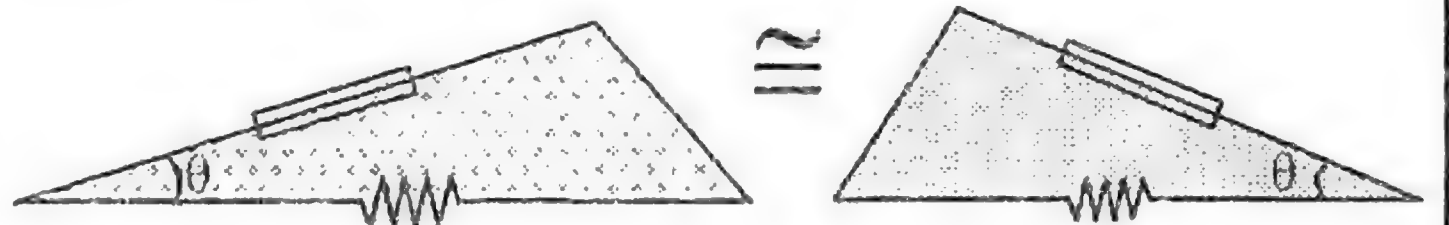
Se obtiene un triángulo isósceles.



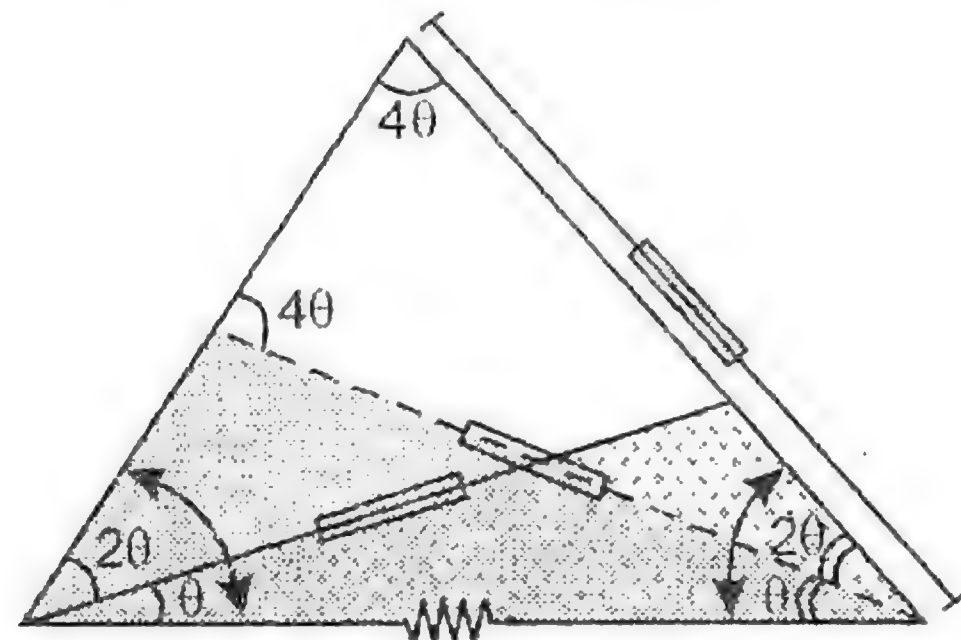
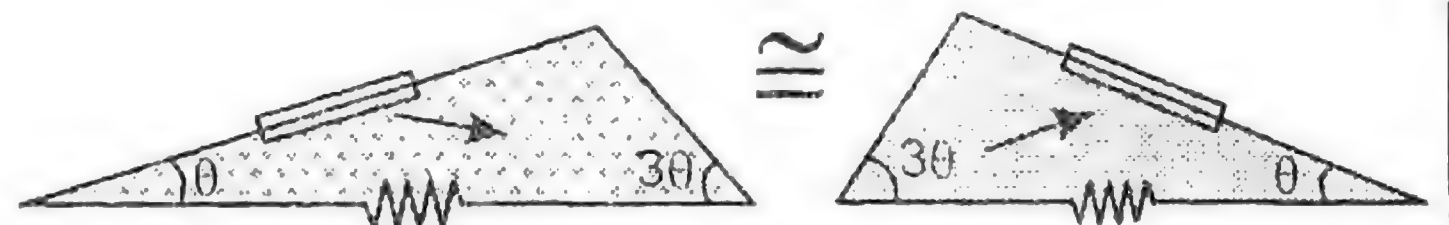
Luego:



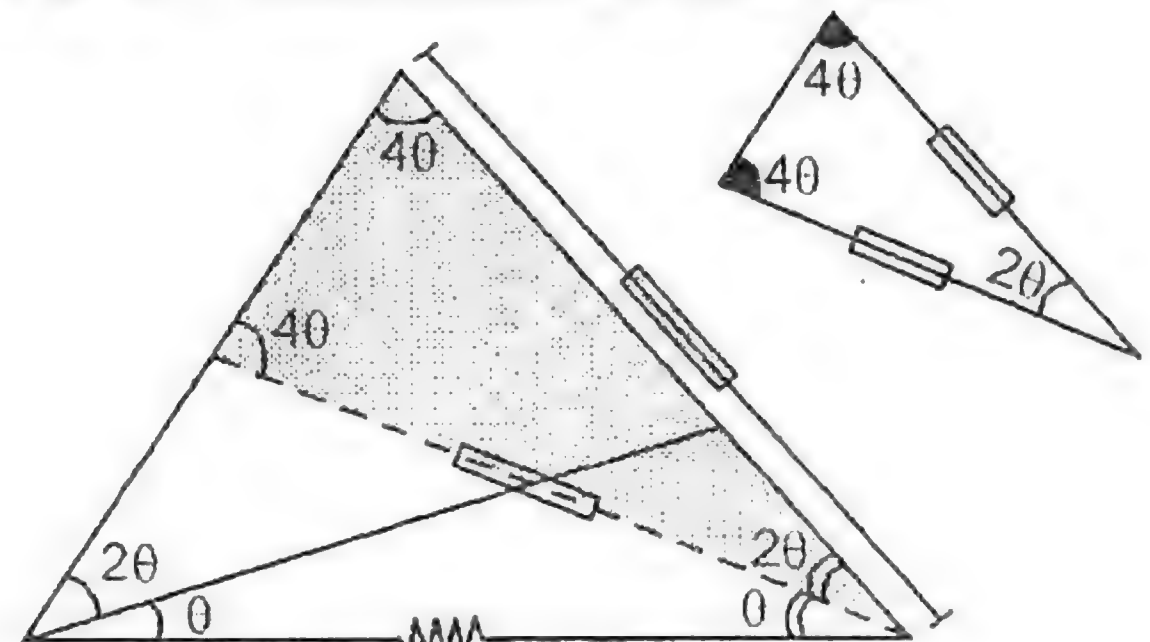
Paso N° 2: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso N° 3: Finalmente se observa.

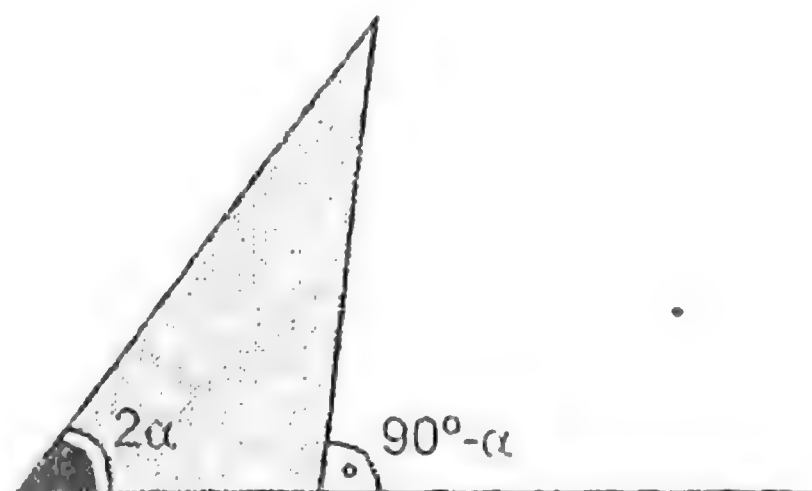


$$\Rightarrow \begin{aligned} 40 + 40 + 20 &= 180^\circ \\ 100 &= 180^\circ \\ \theta &= 18^\circ \end{aligned}$$

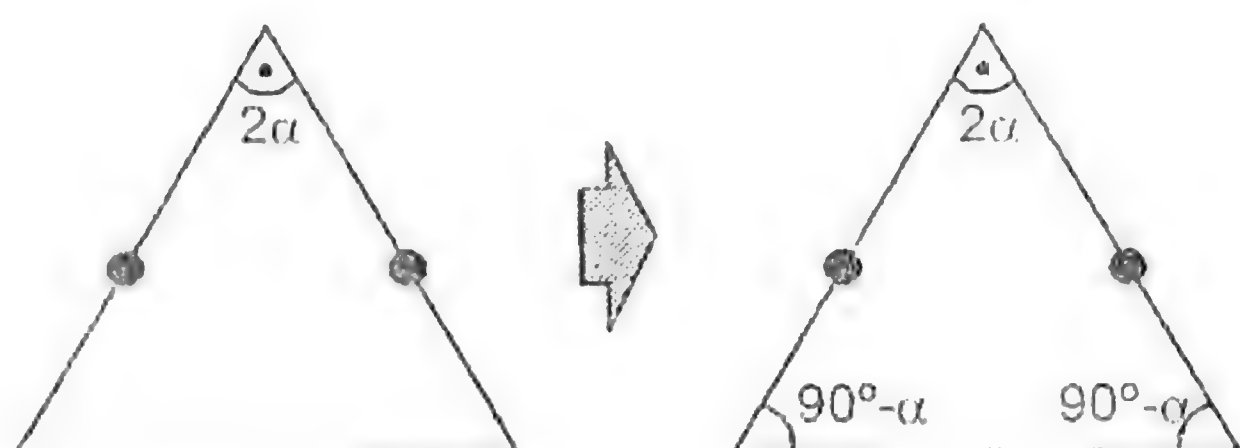
Geometría

"TRAZO DEL ÁNGULO SIMÉTRICO (ESPEJO)"

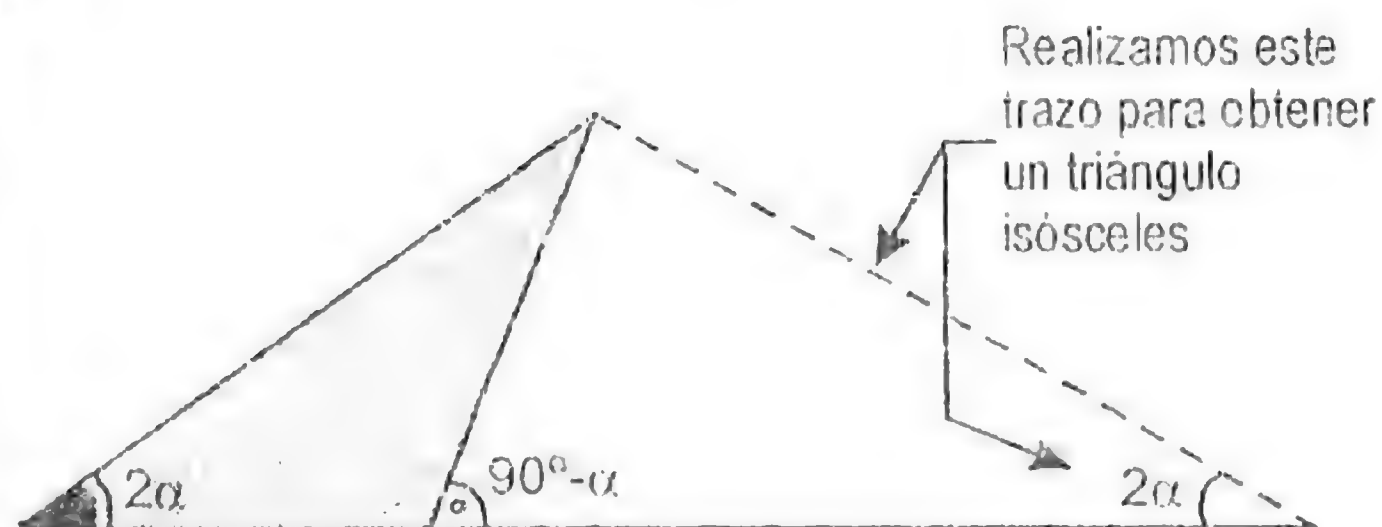
CASO I: Si observamos la siguiente figura con las siguientes características.



Se buscará

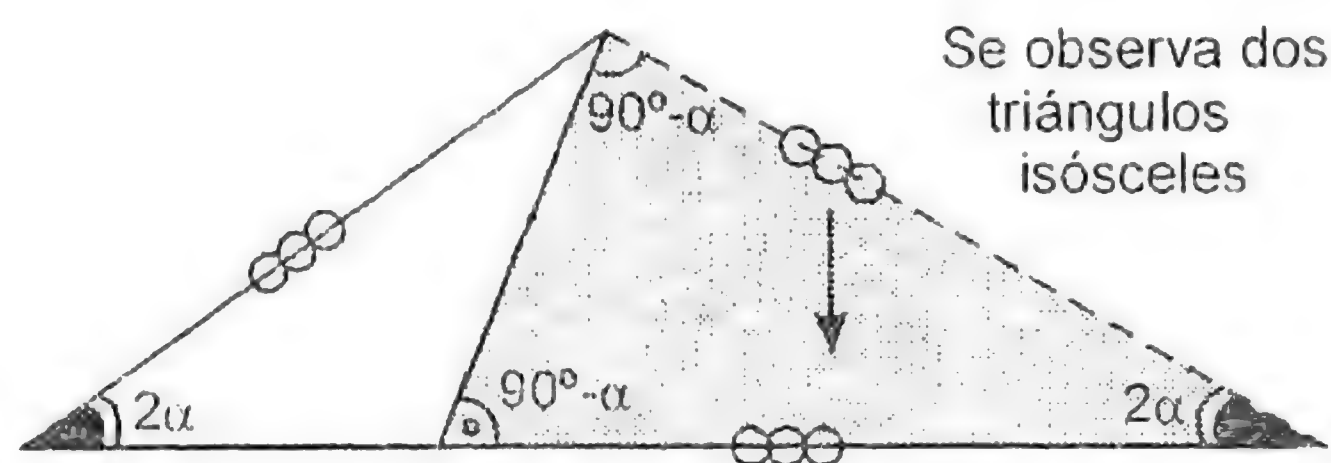


Ahora hacemos



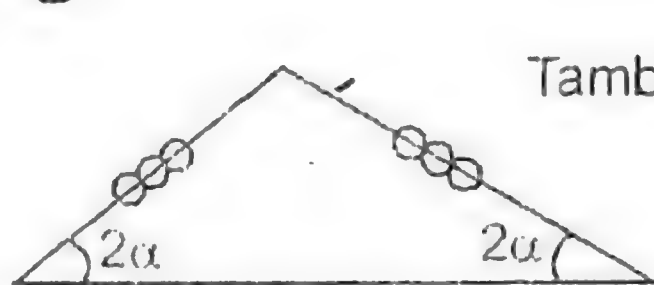
Realizamos este trazo para obtener un triángulo isósceles

Se obtiene



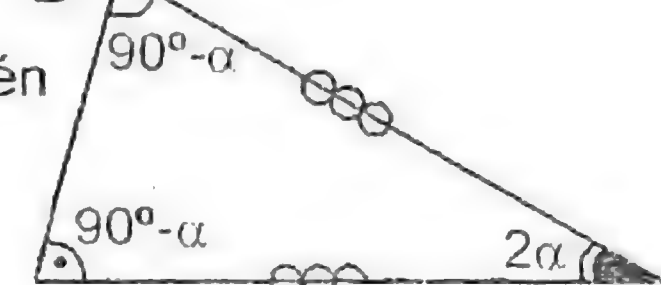
Se observa dos triángulos isósceles

I

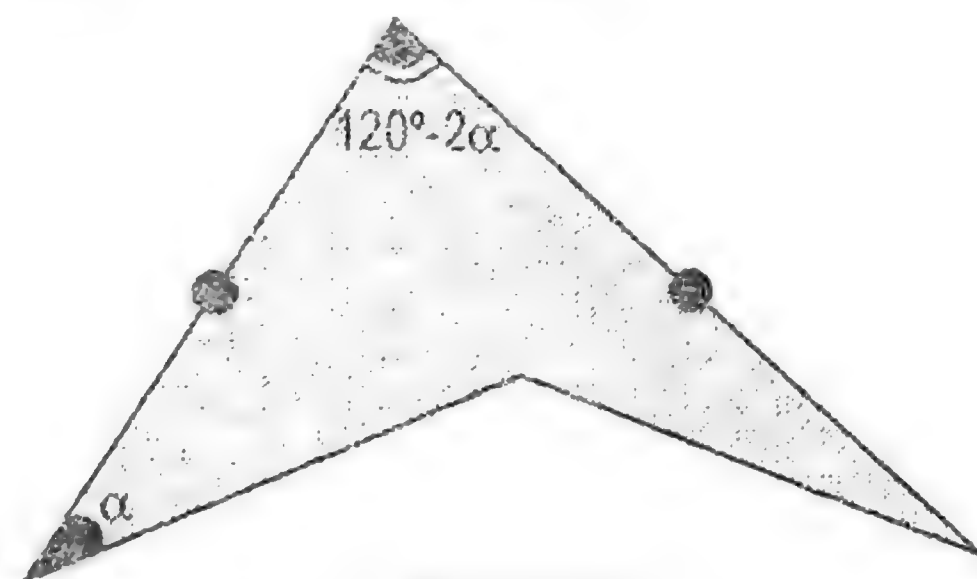


También

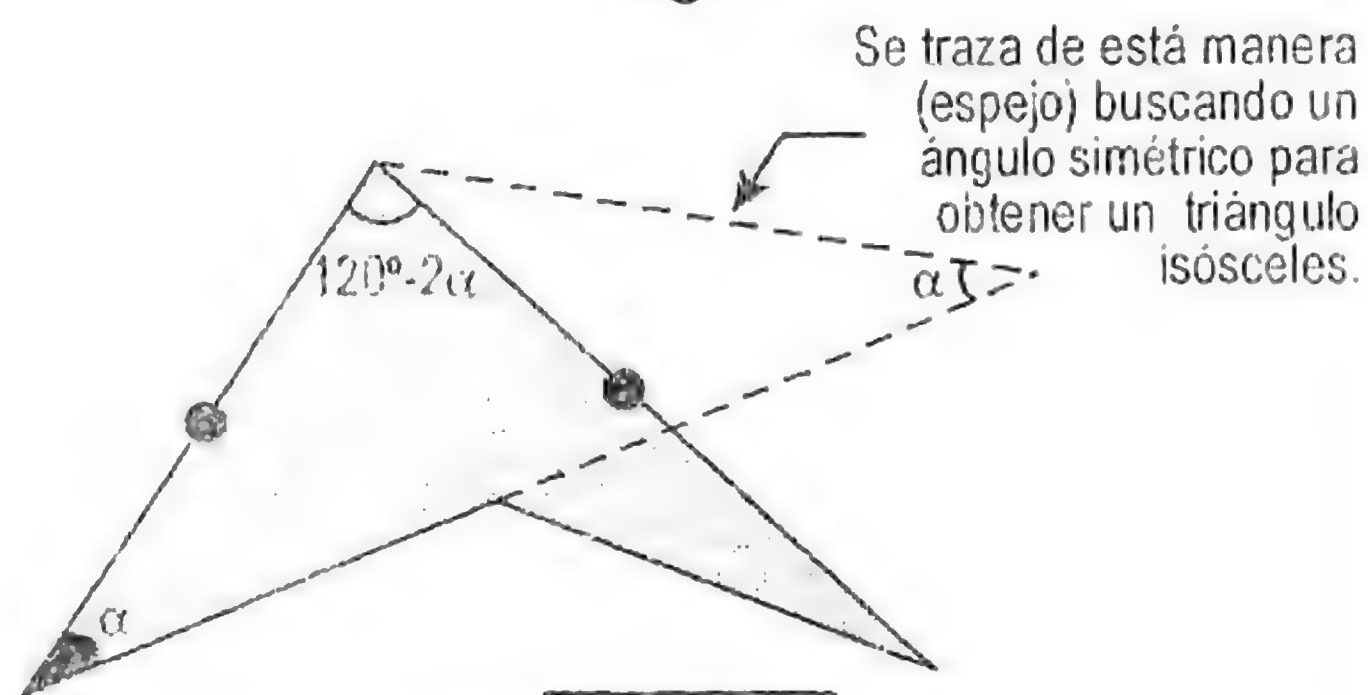
II



CASO II: Si tenemos esta figura con las siguientes características.

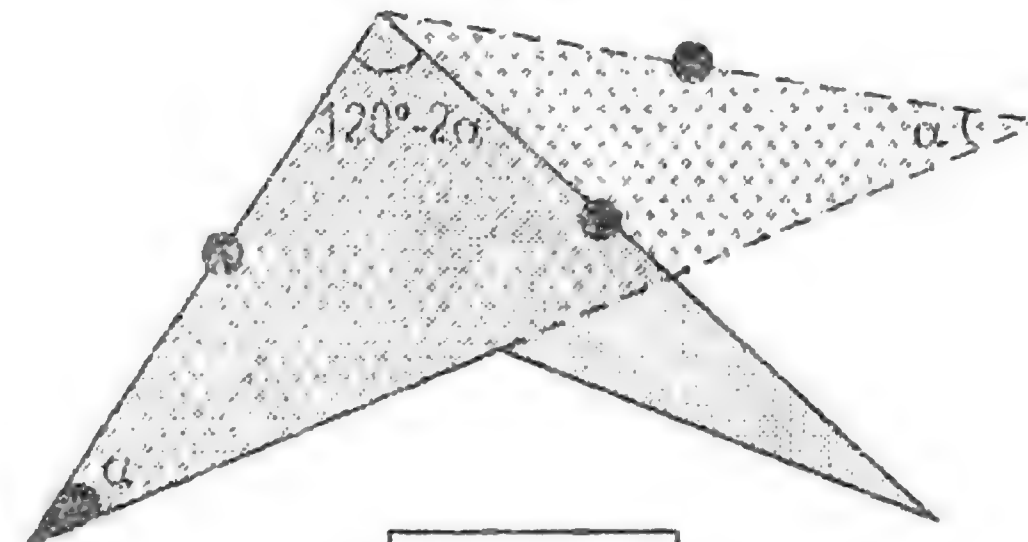


Se hará

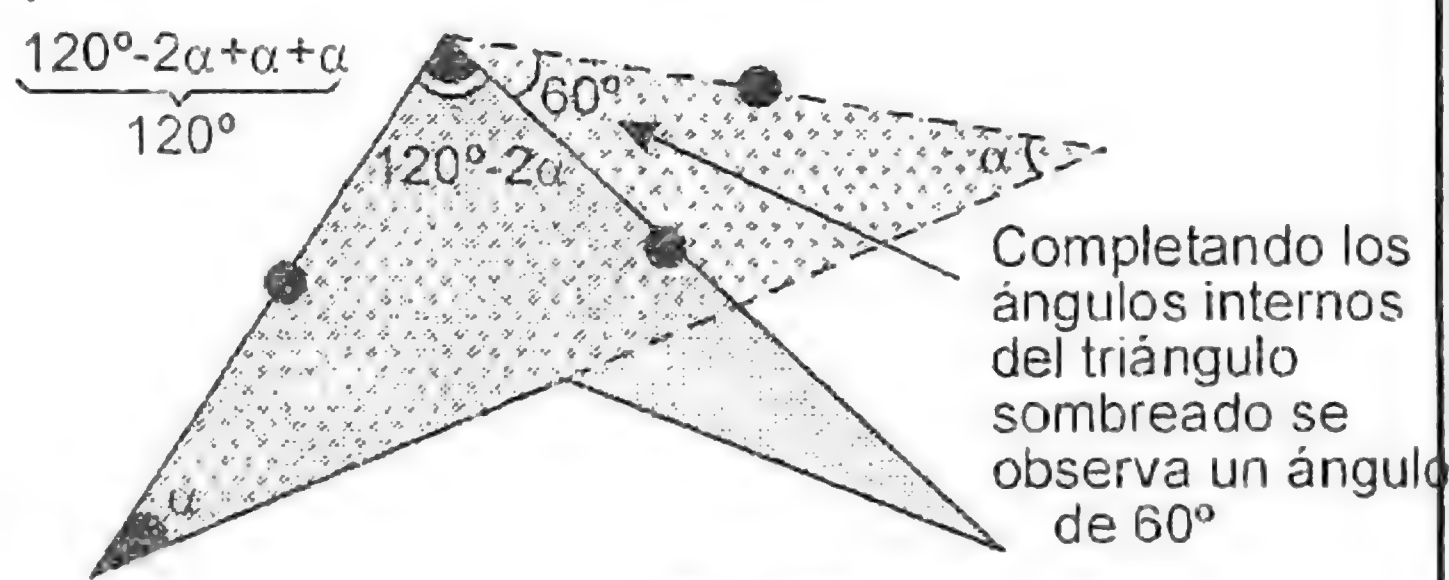


Se traza de esta manera (espejo) buscando un ángulo simétrico para obtener un triángulo isósceles.

Se obtiene



Ahora se observa



Completando los ángulos internos del triángulo sombreado se observa un ángulo de 60°

Ahora aplicamos

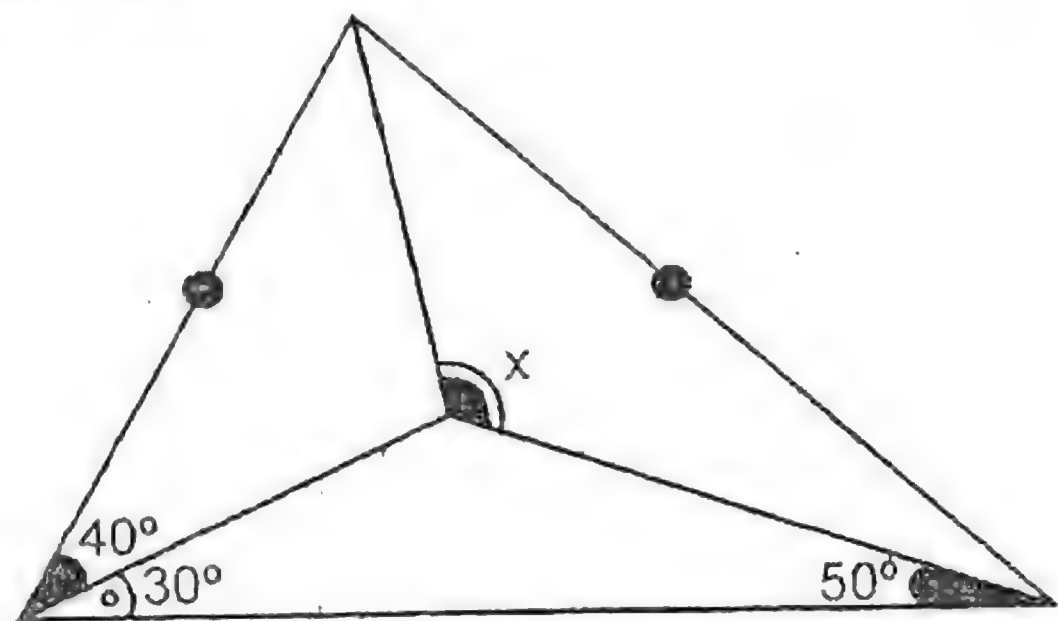


Se traza

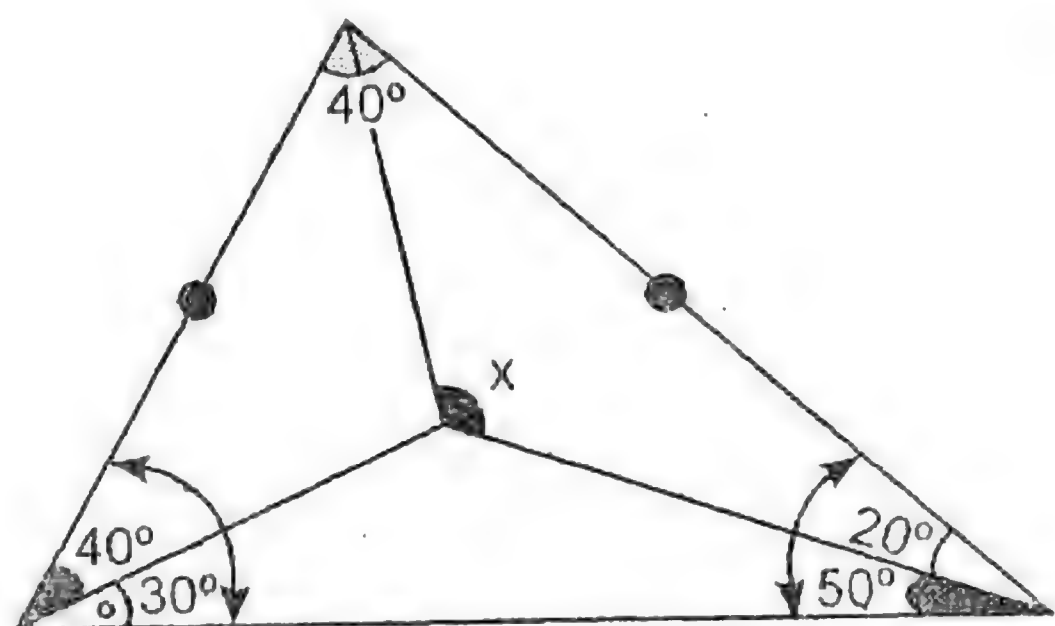
Se obtiene un triángulo equilátero

TEMPLO N° 1

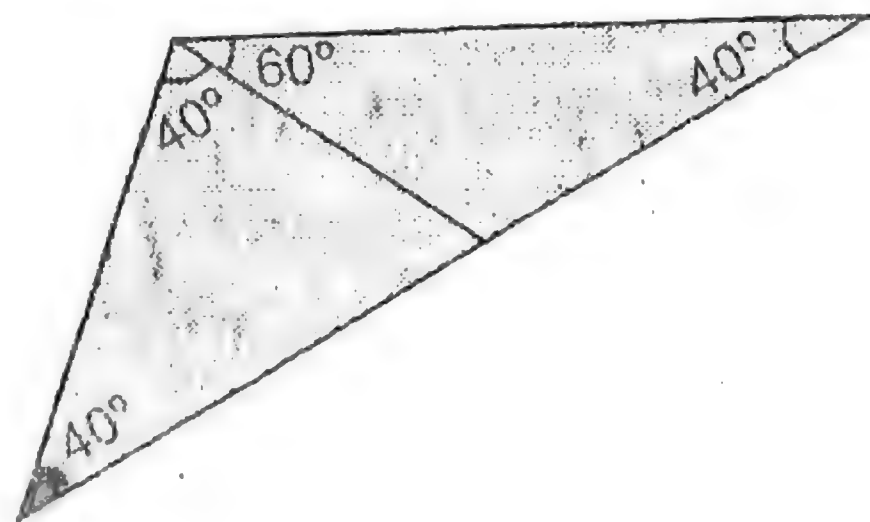
Calcular "x":



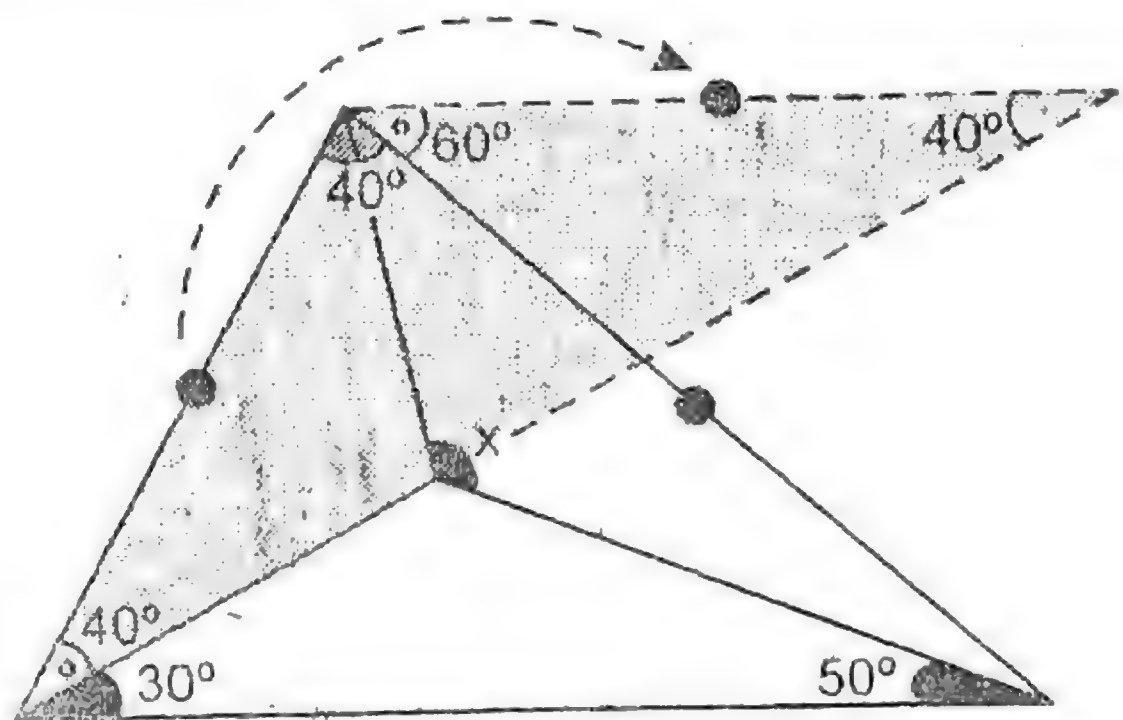
Solución: Se observa en la figura, un triángulo isósceles.



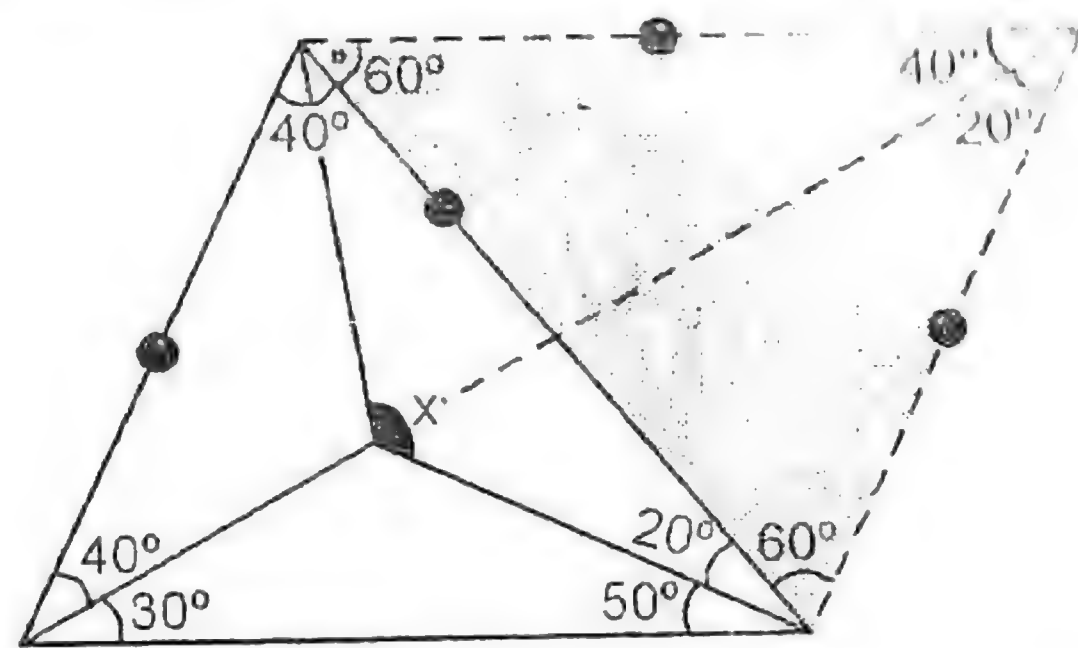
Paso N° 1: Se observa que se puede obtener un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma:



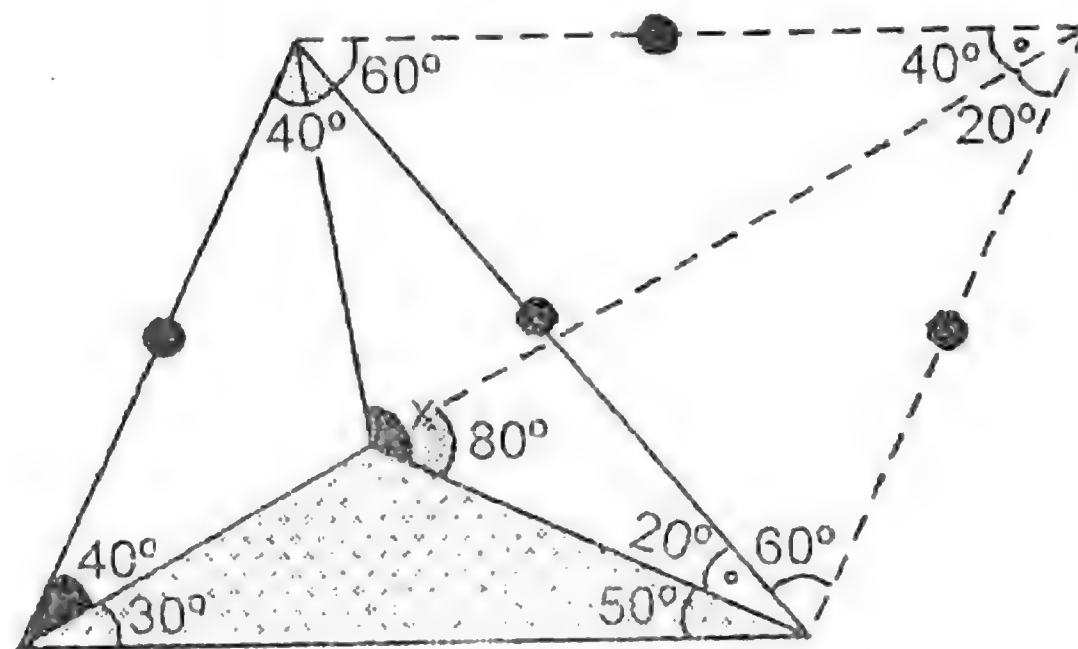
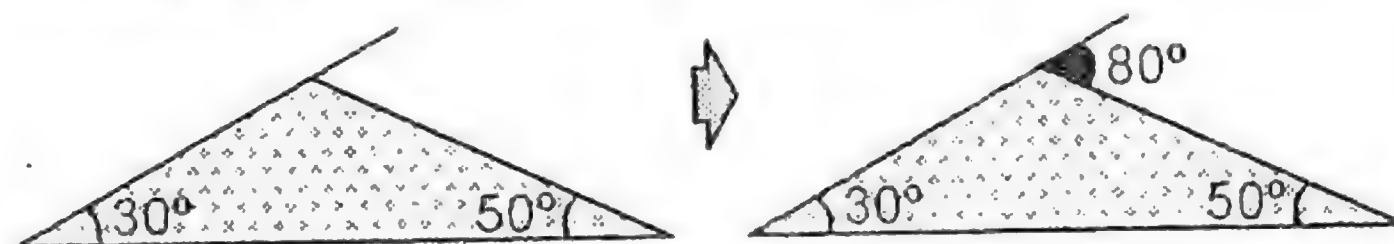
Empleamos el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.



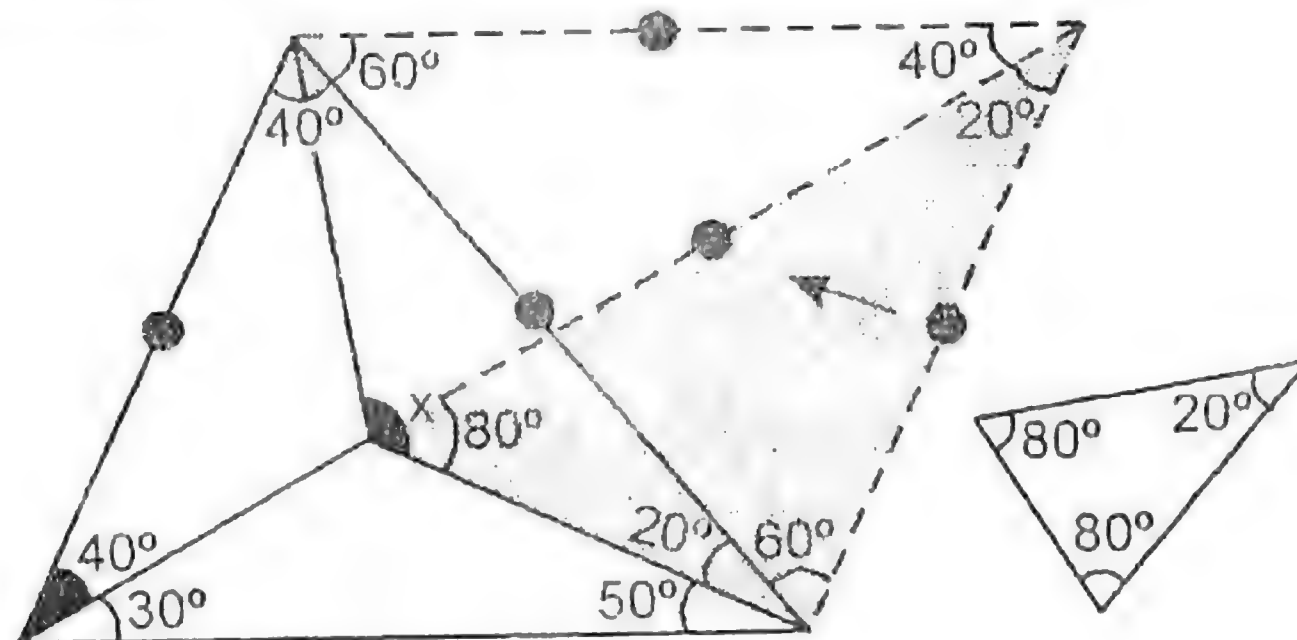
Paso N° 2: Ahora se observa la siguiente propiedad donde se cumple:



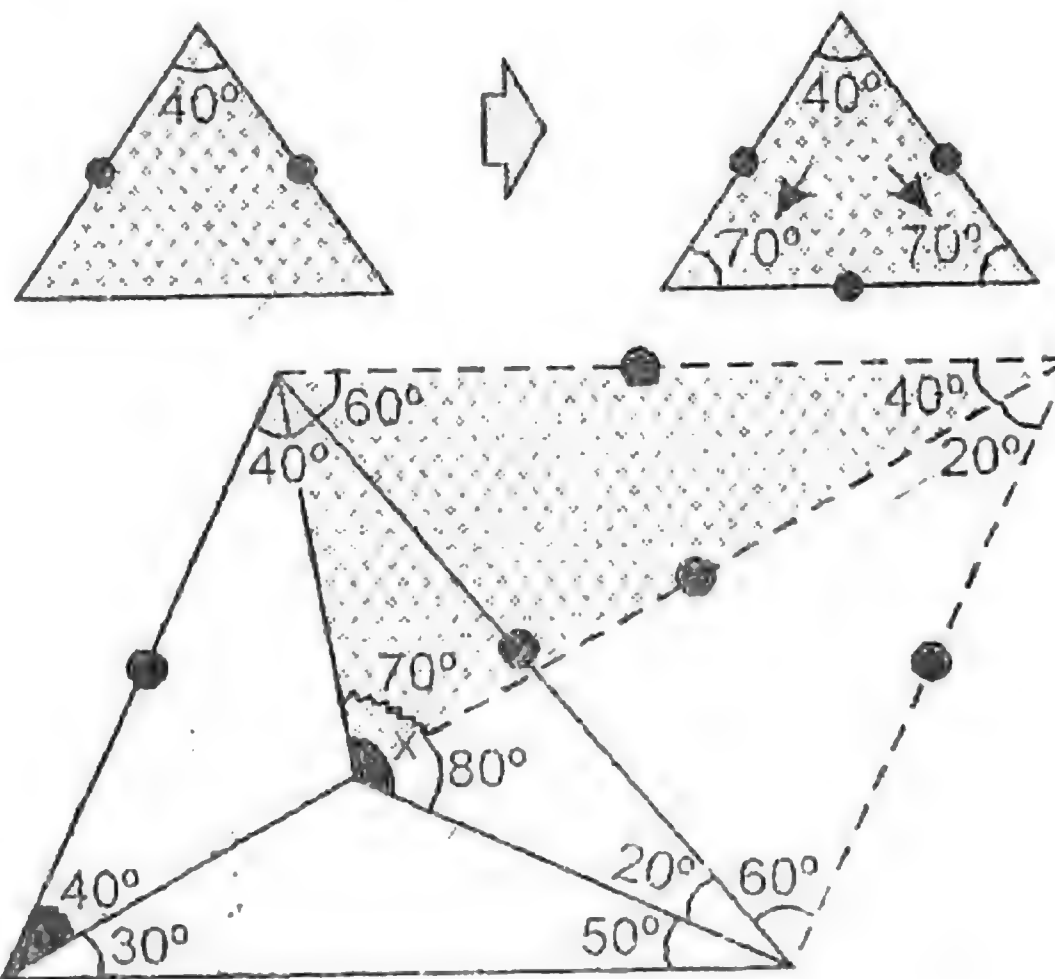
Paso N° 3: Luego se observa en la figura un triángulo que cumple la siguiente propiedad.



Paso N° 4: Luego se obtiene un triángulo isósceles.



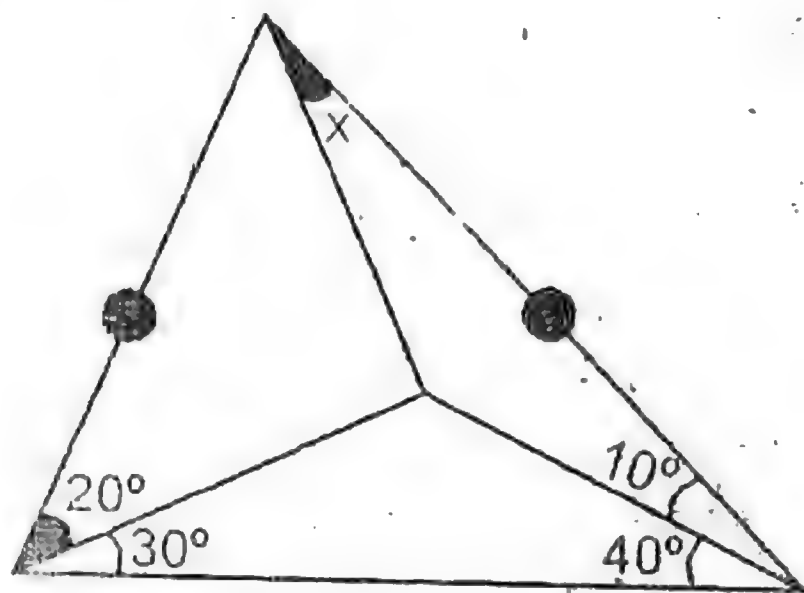
Paso N° 5: También se obtiene:



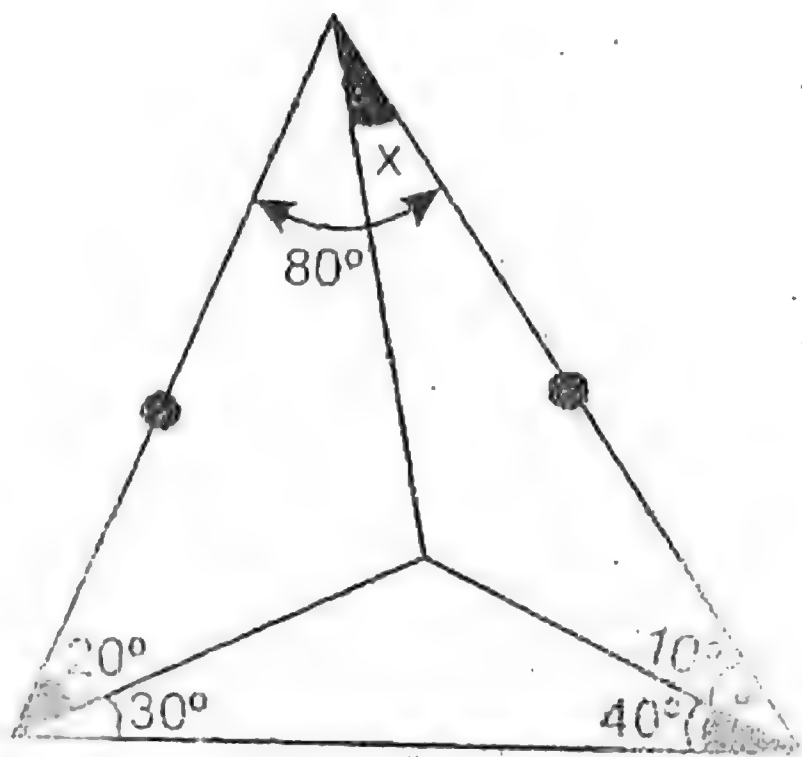
Luego: $\therefore x = 70^\circ + 80^\circ$
 $x = 150^\circ$

EJEMPLO N° 2

Calcular "x"

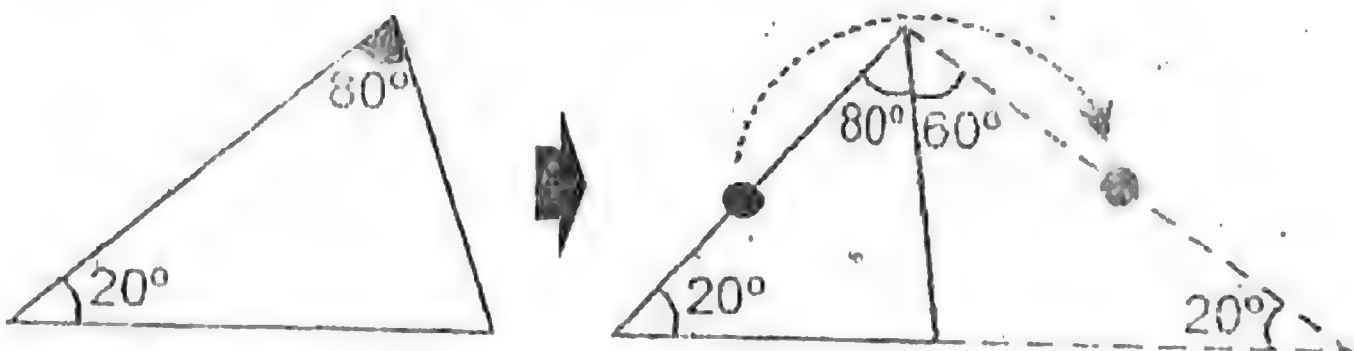


Solución: Se observa en la figura un triángulo isósceles.

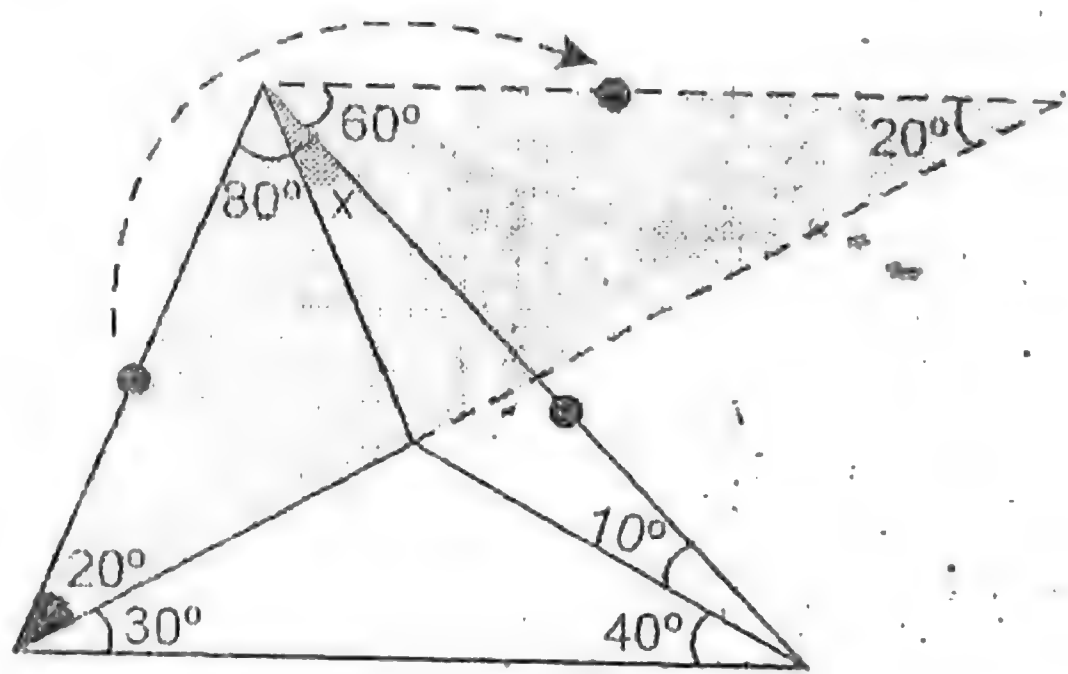


34

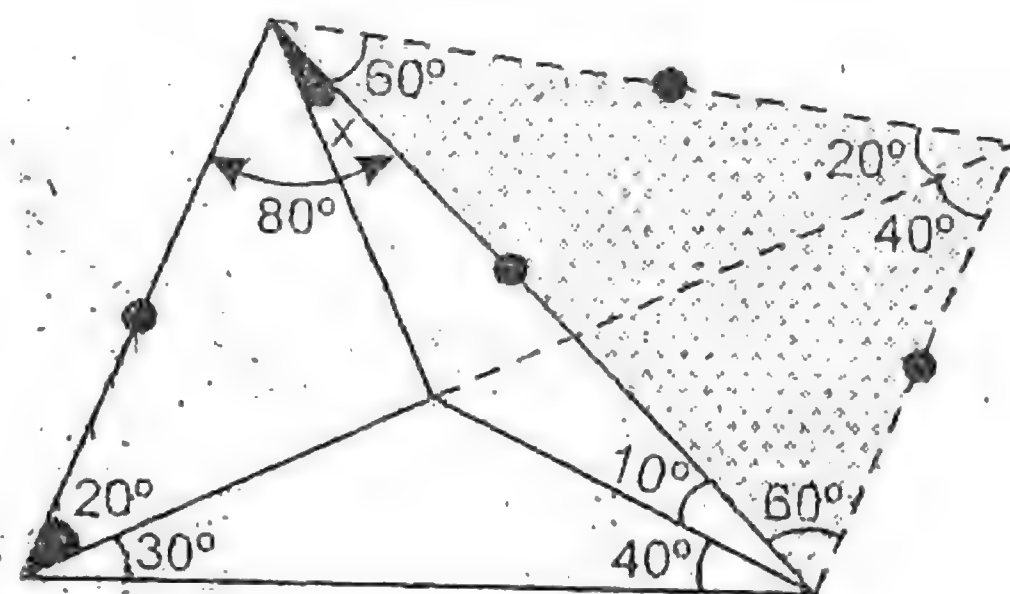
Paso N° 1: En la figura se tiene:



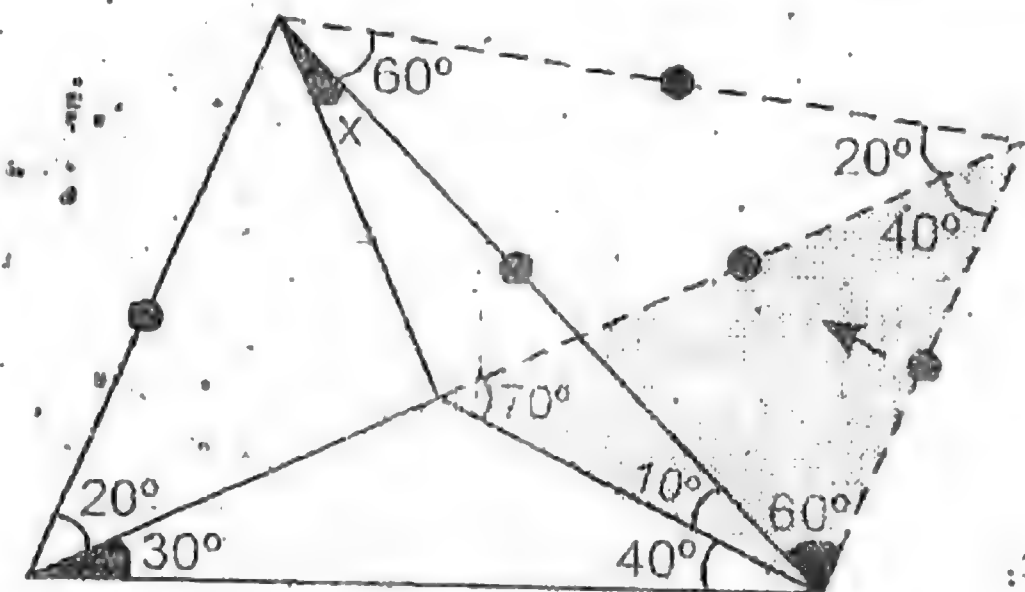
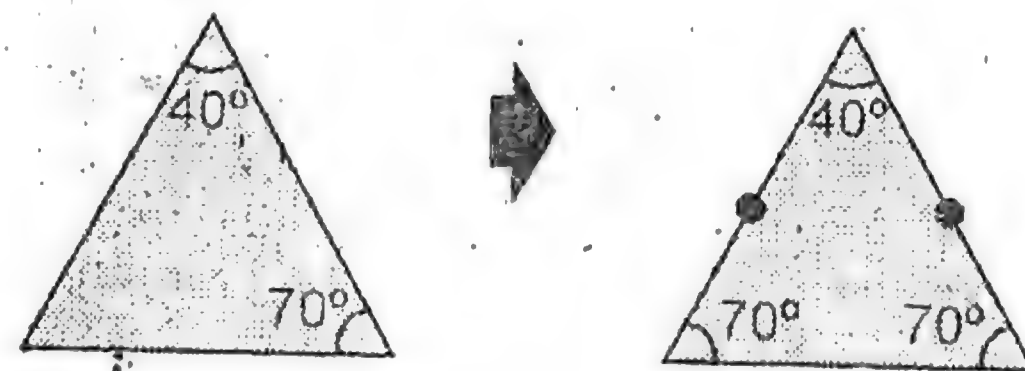
Empleando el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.



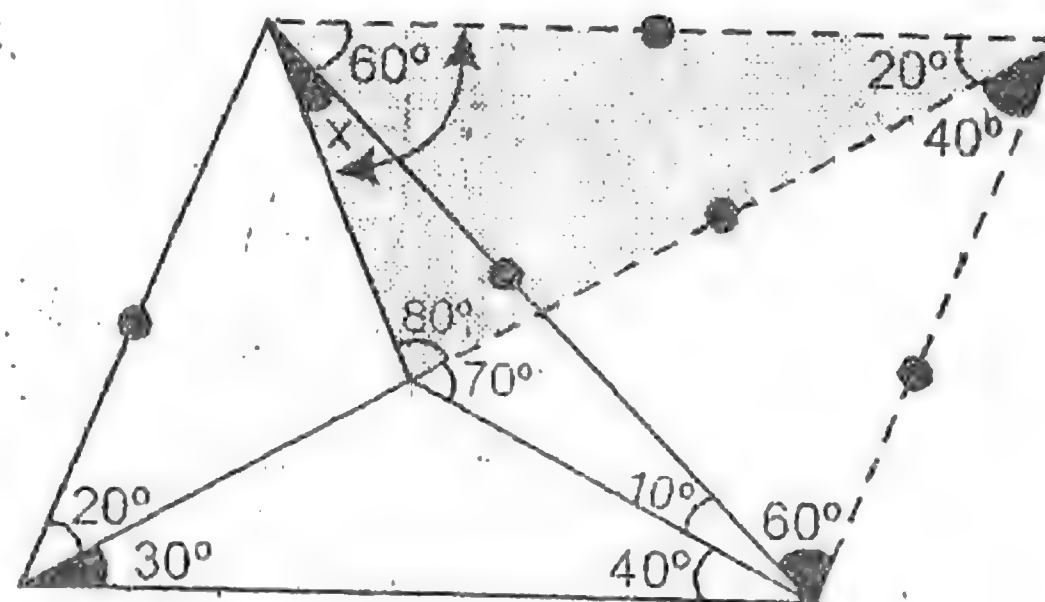
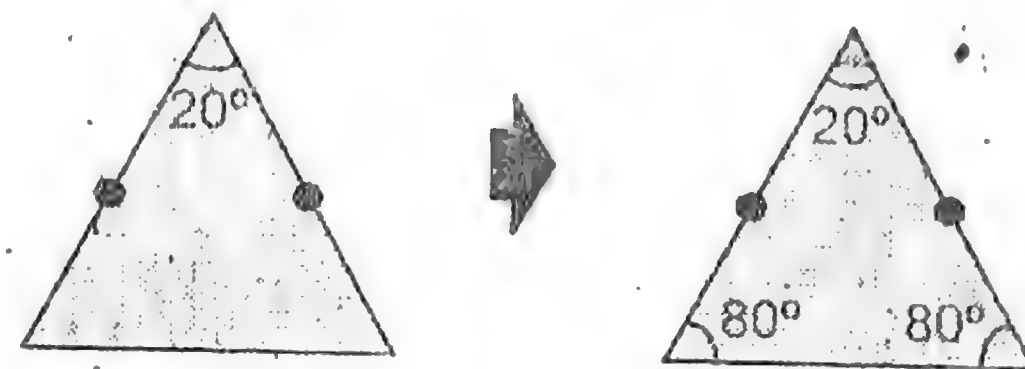
Paso N° 2: Luego se observa en la figura que se obtiene la siguiente propiedad donde se cumple:



Paso N° 3: También se obtiene un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 4: También se observa en la figura:

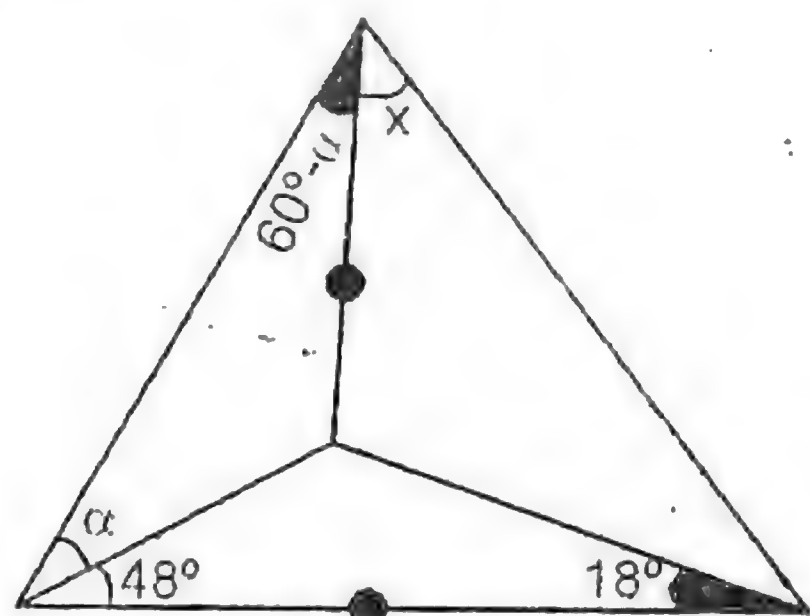


$$\Rightarrow x + 60^\circ = 80^\circ$$

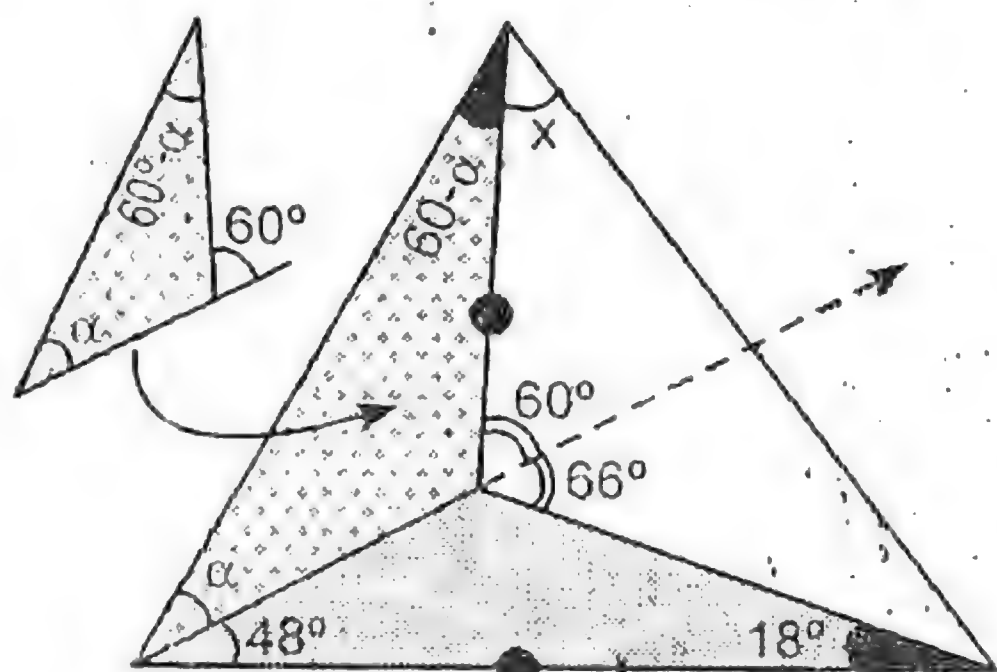
$$x = 20^\circ$$

EjemPlo N° 3

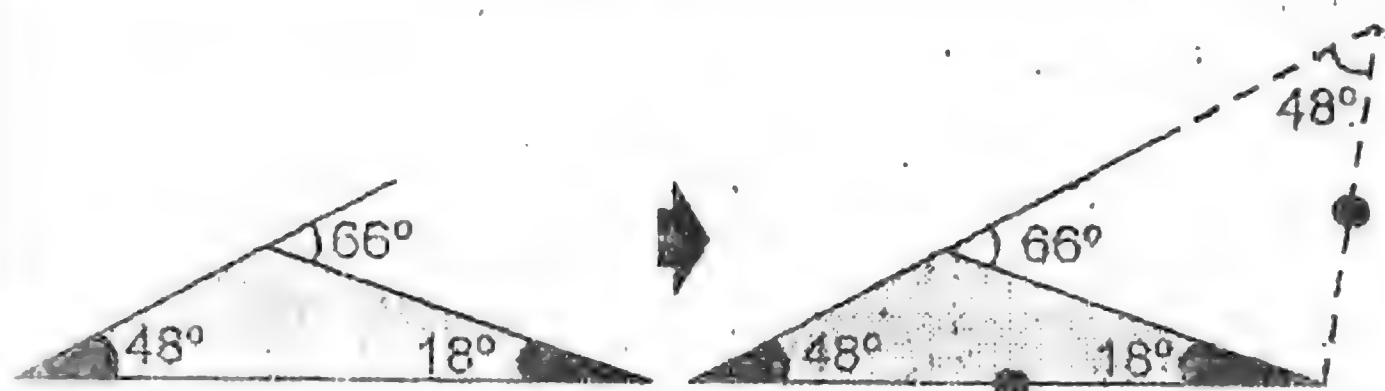
Calcular "x"



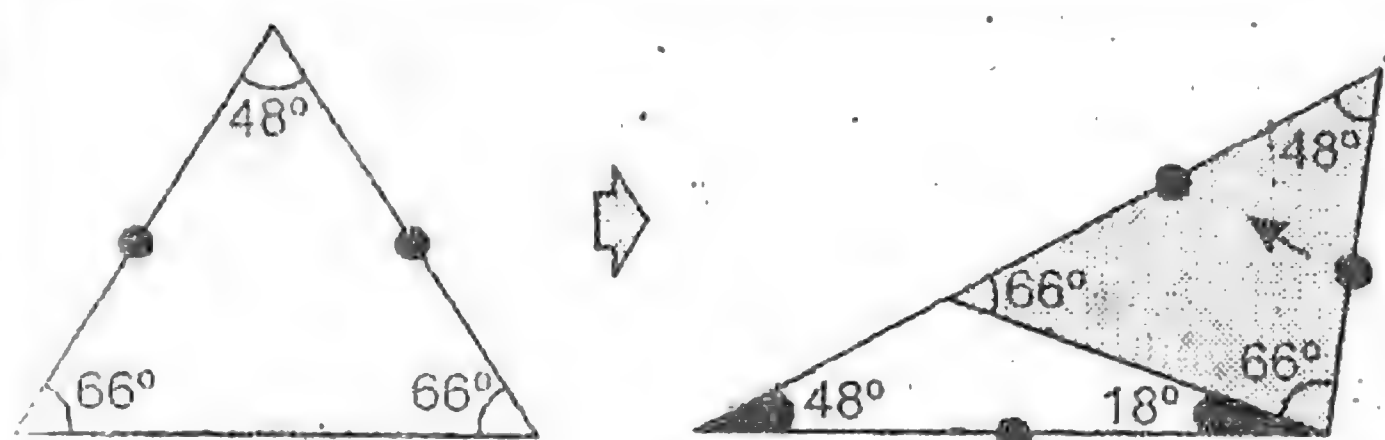
Solución: Se observa en la figura.



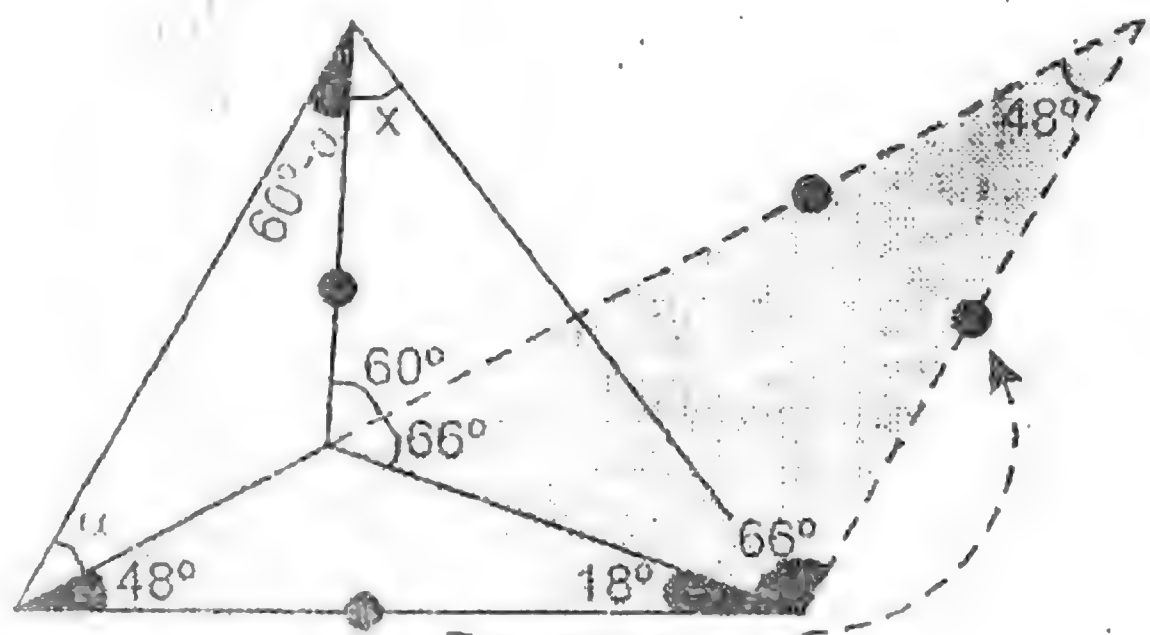
Paso N° 1: En la figura sombreada se tiene:



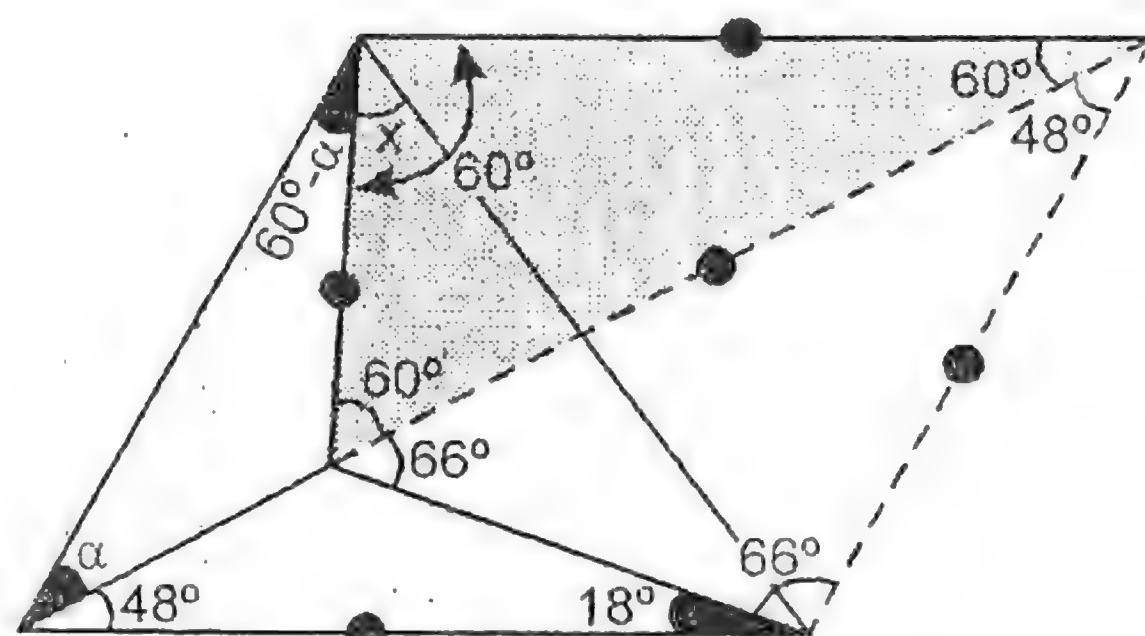
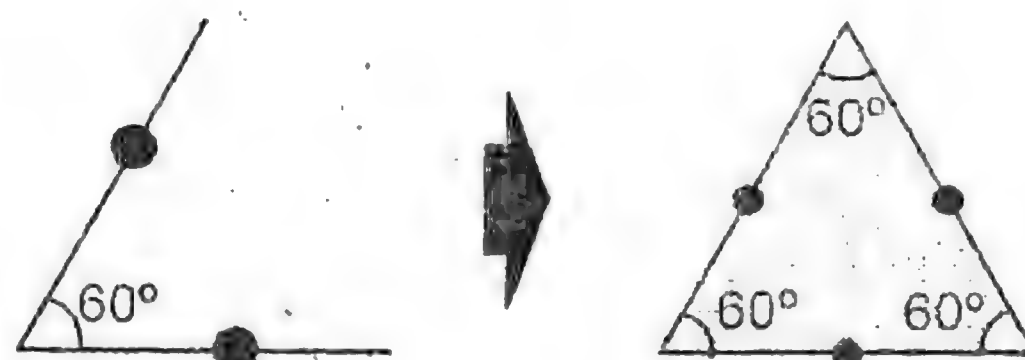
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera:



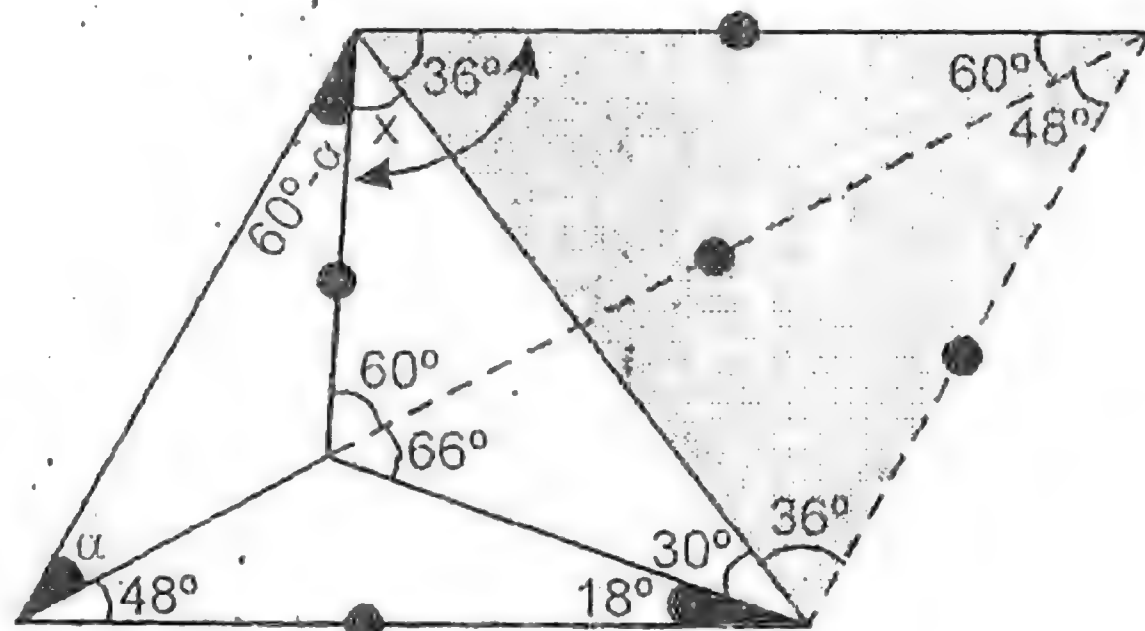
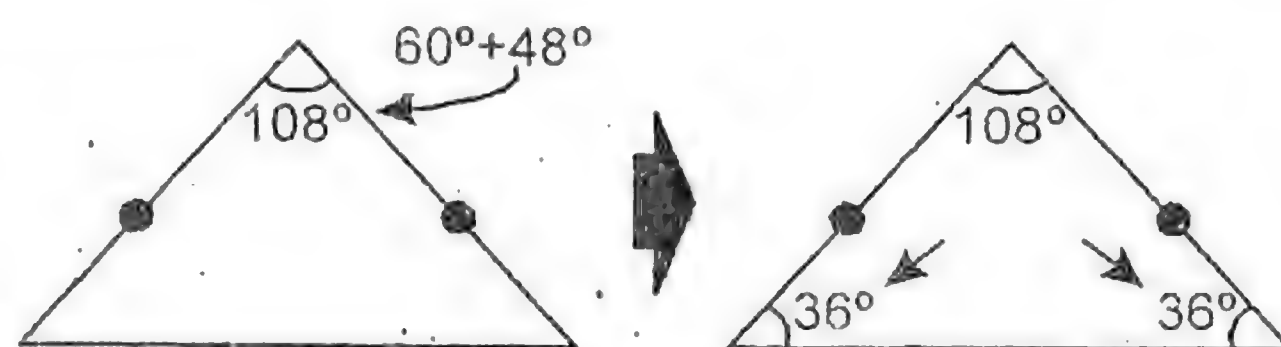
Luego en la figura:



Paso N° 2: Luego se observa un triángulo equilátero.

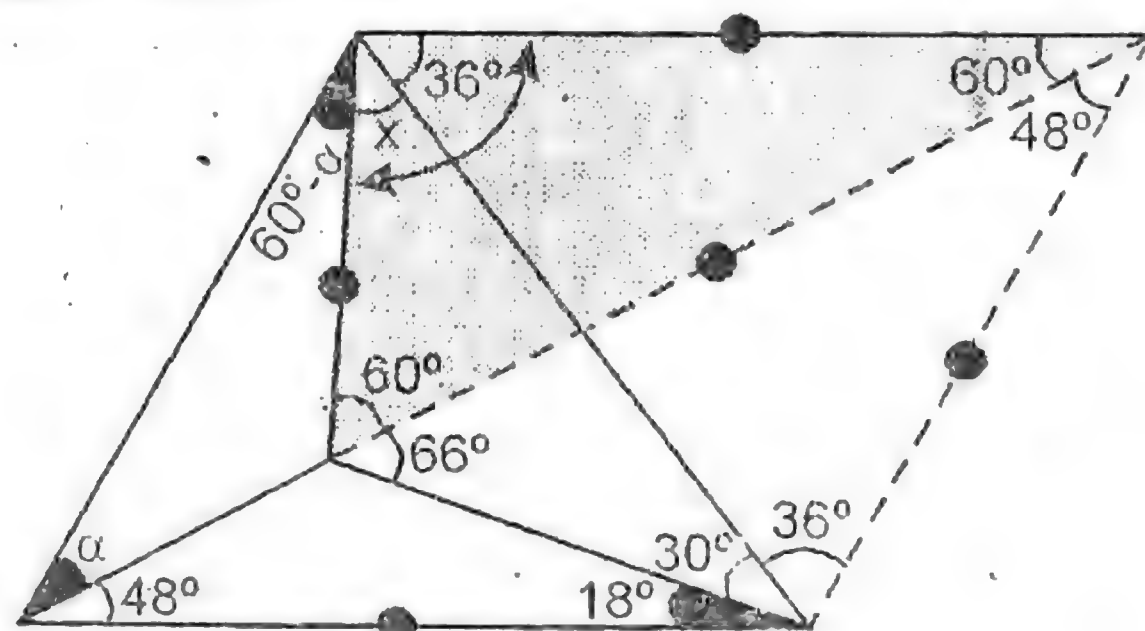


Paso N° 3: Luego vemos un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 4:

Finalmente se observa en la figura un nuevo triángulo equilátero.



$$\Rightarrow x + 36^\circ = 60^\circ$$

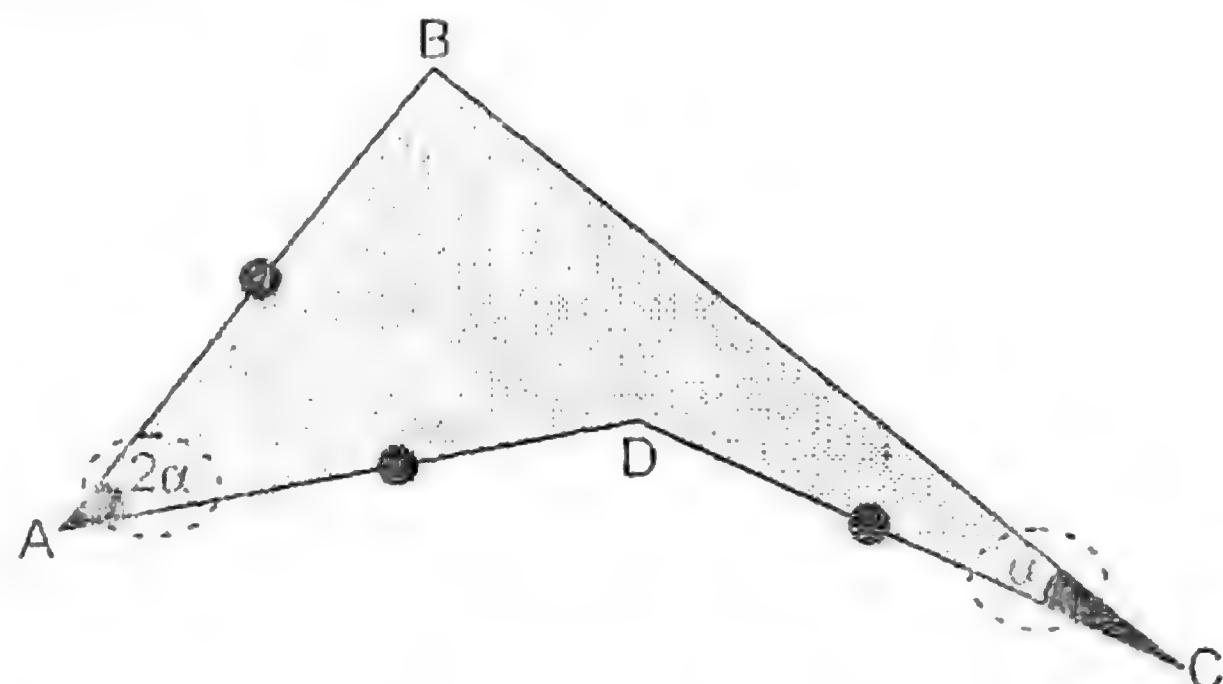
$$x = 24^\circ$$

Criterio

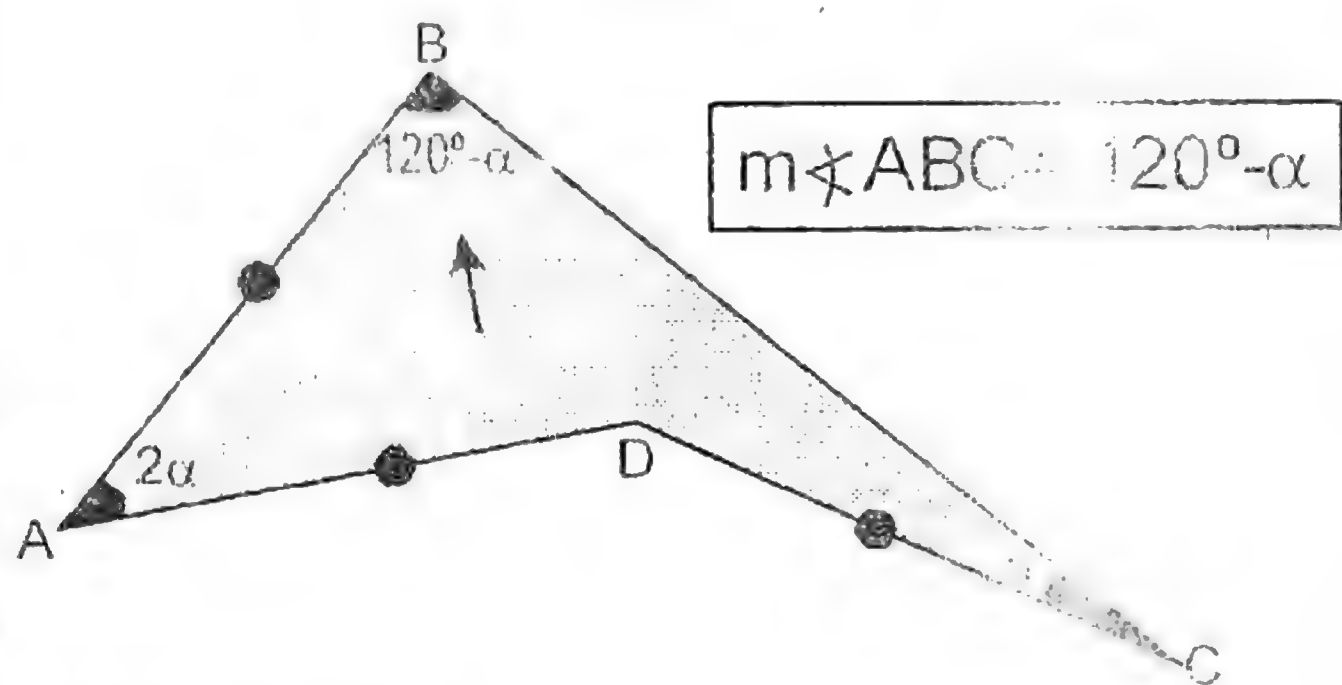
"BUSCANDO CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS"

Con ayuda del tema de congruencia, se buscará obtener en las figuras dadas, cuadriláteros cóncavos tanto interiormente como exteriormente, teniendo en cuenta obtener tres lados iguales con sus ángulos internos que estén en la relación de dos a uno; de la siguiente manera:

CASO I: Si tenemos:

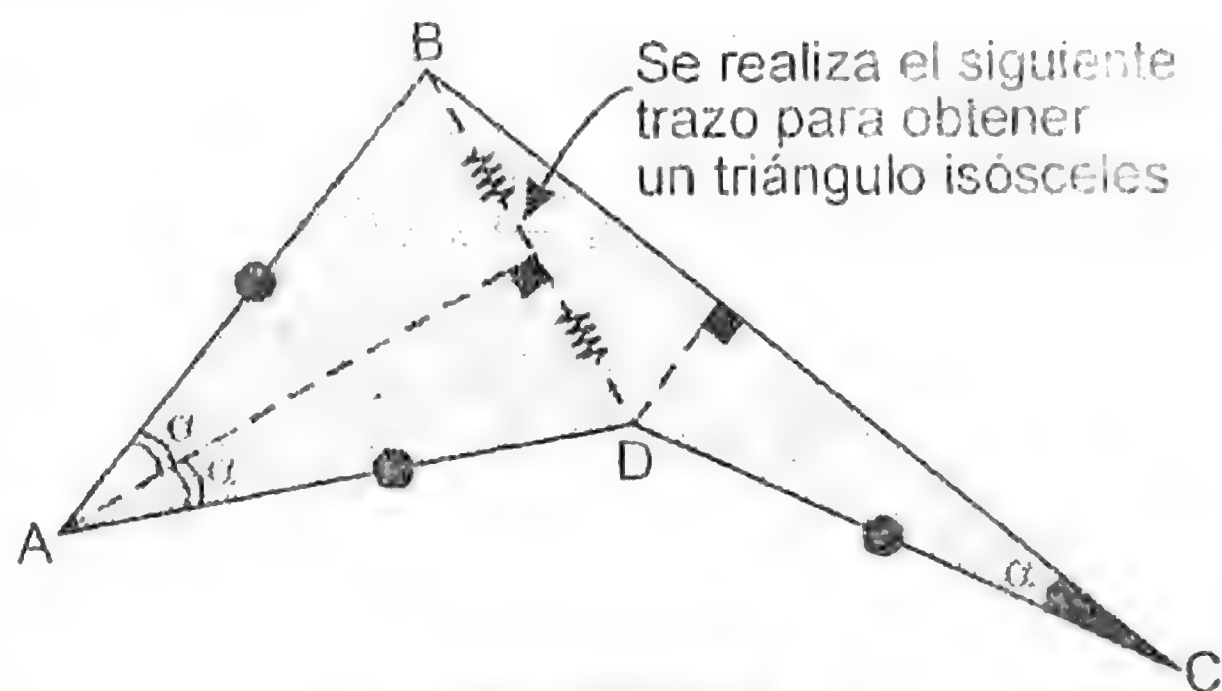


Se cumple

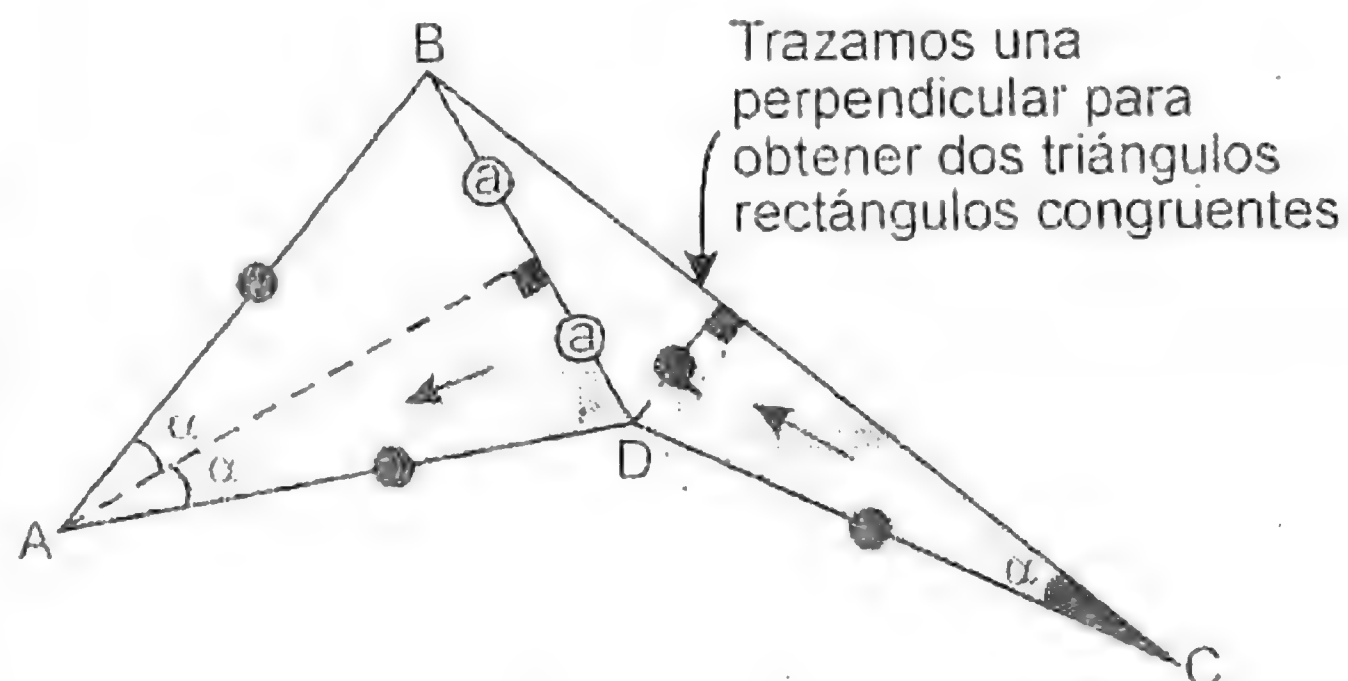


36

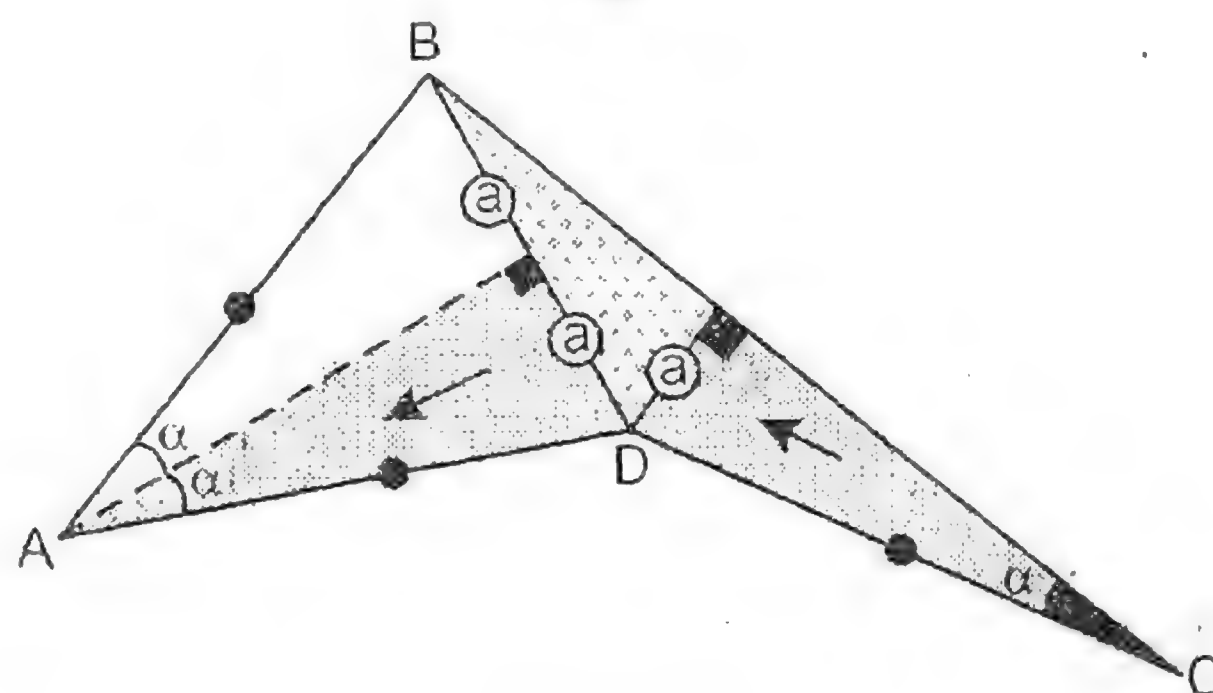
Demostración



También se obtiene

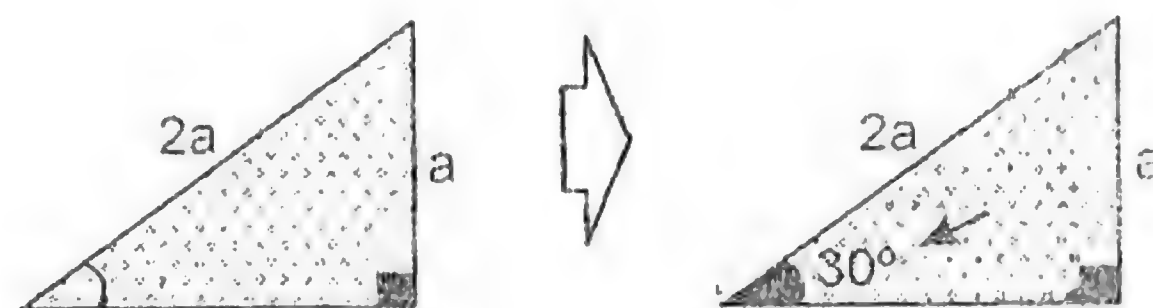


Luego se tiene

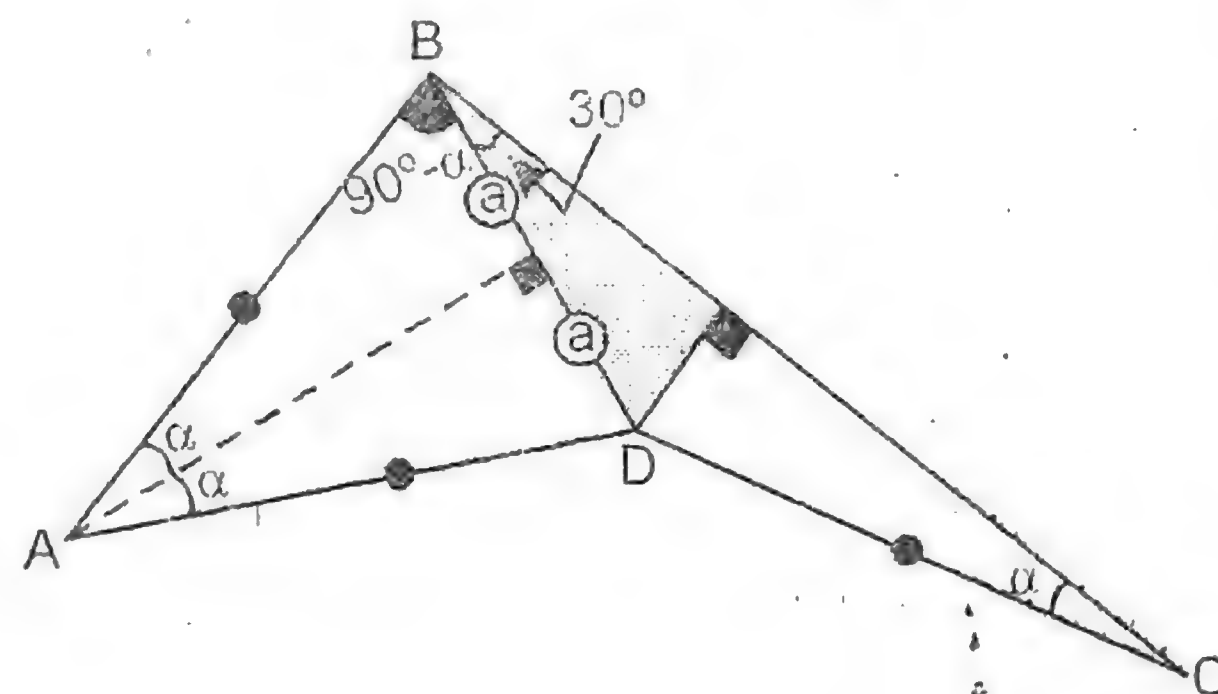


Se observa

Un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.



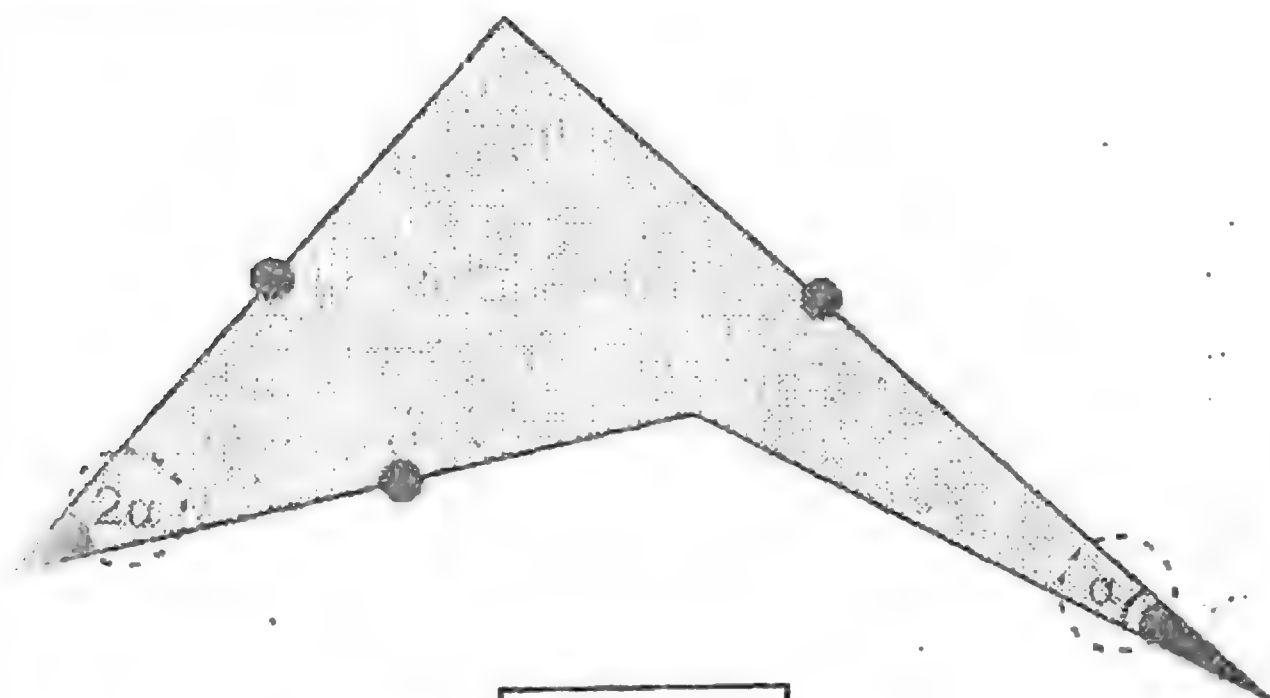
Ahora



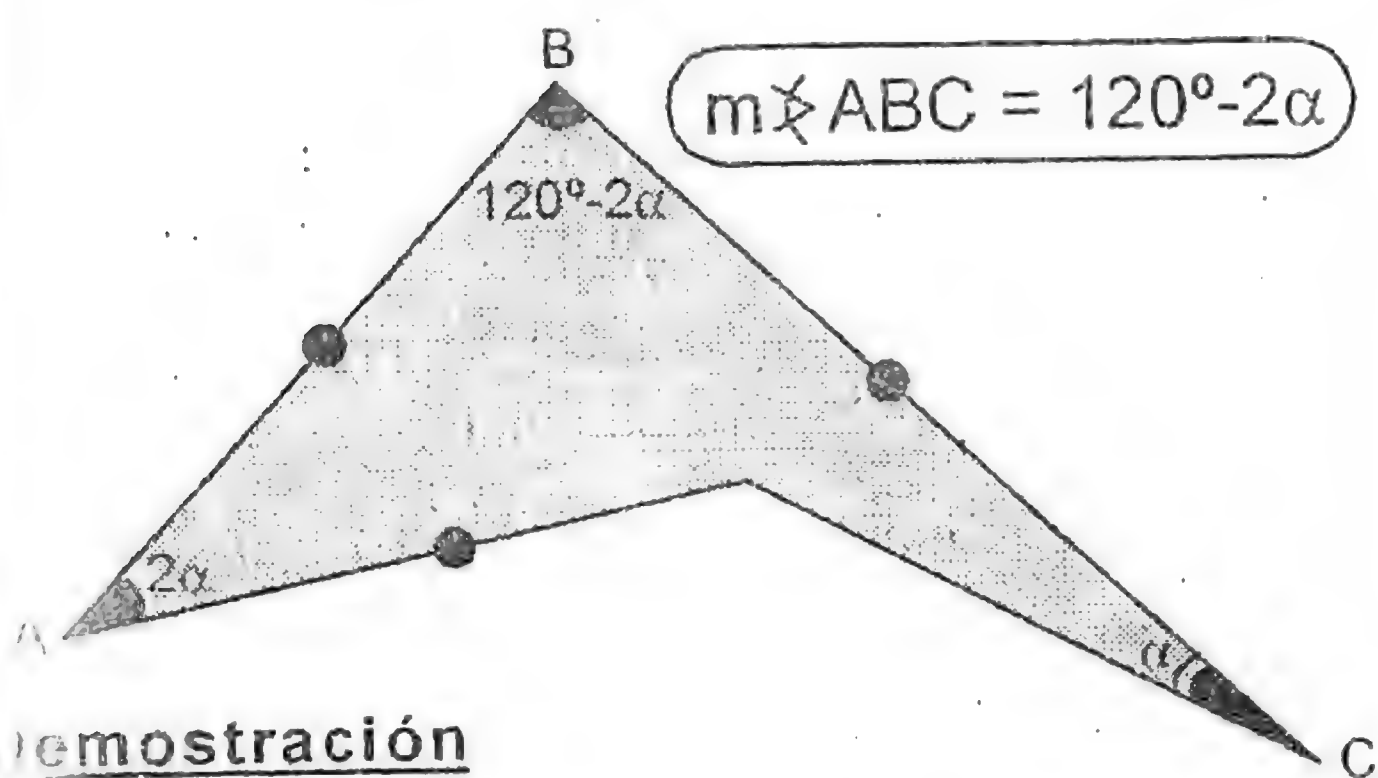
$$\Rightarrow m\angle ABC = 120^\circ - \alpha$$

PRO II

tenemos una figura con las siguientes características.

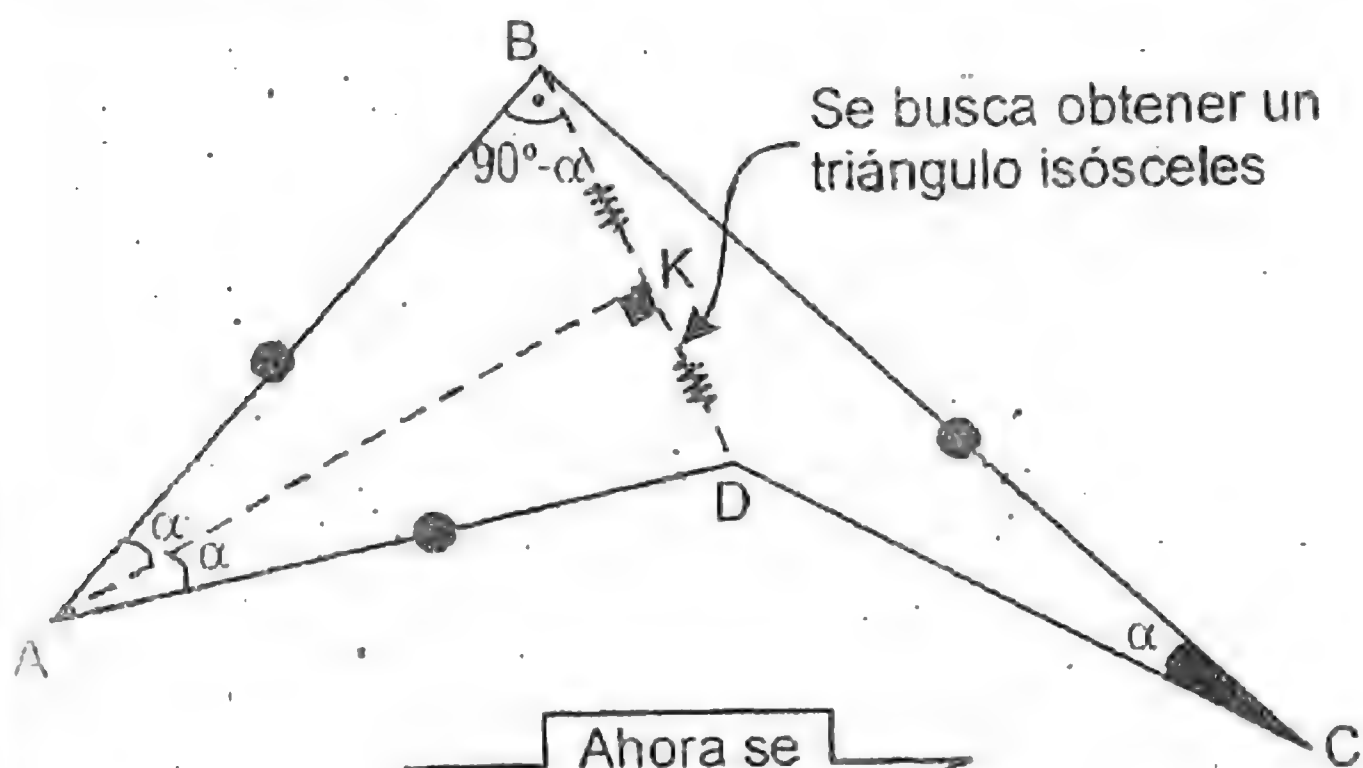


Se cumple

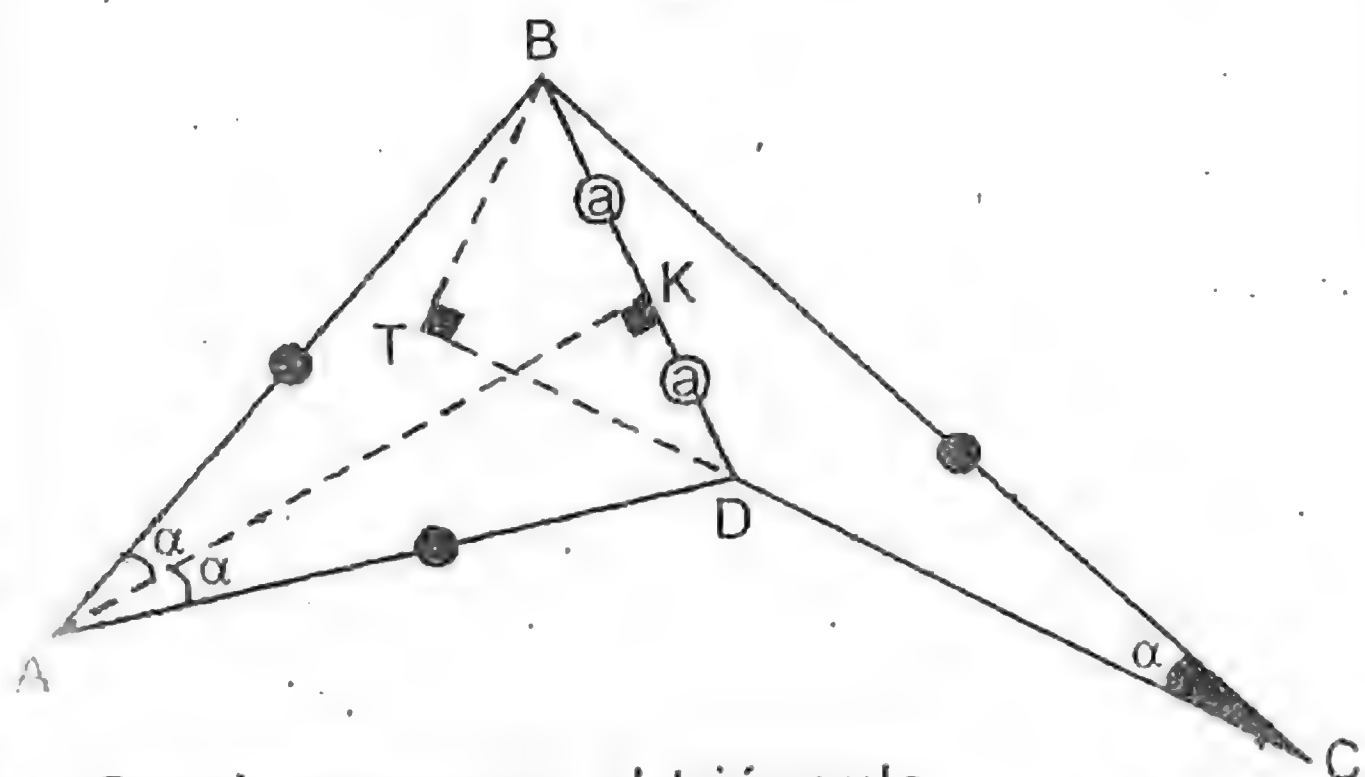


$$m\angle ABC = 120^\circ - 2\alpha$$

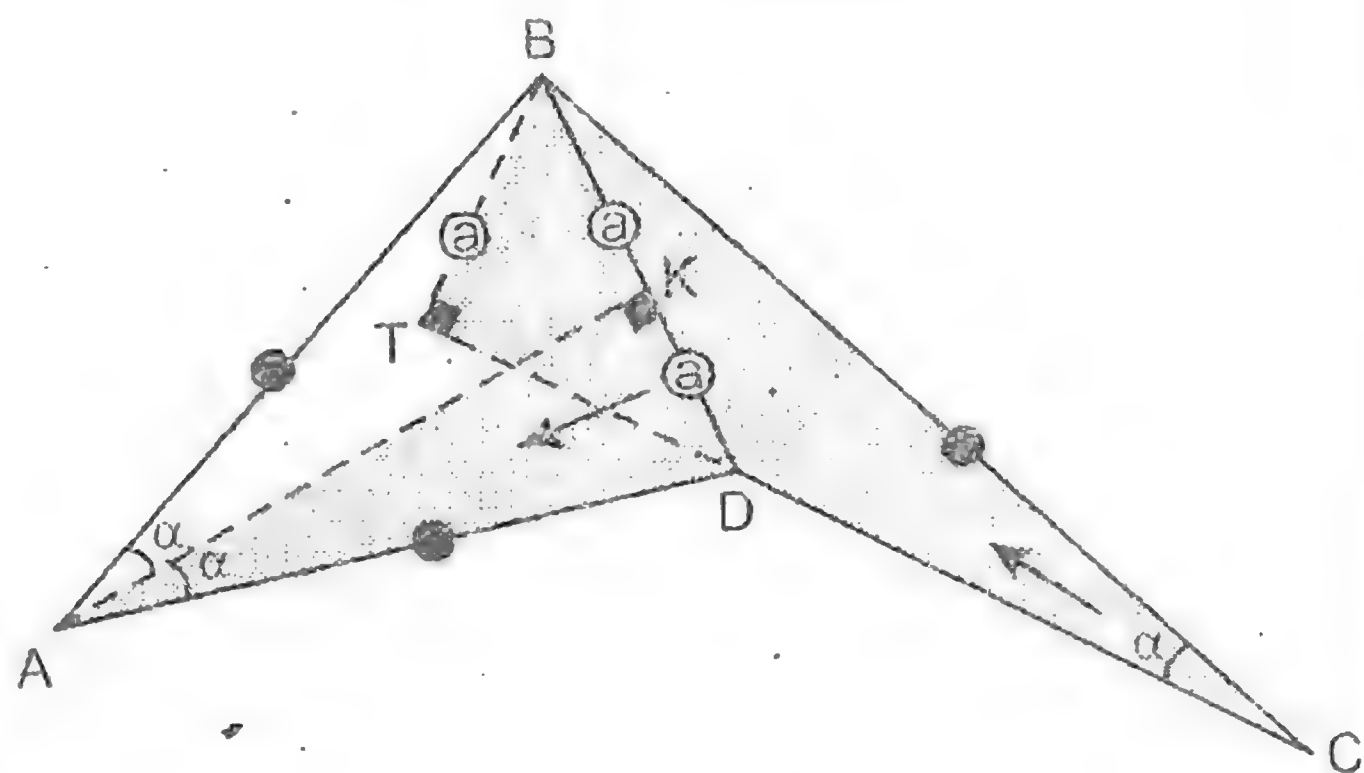
Demostración



Ahora se busca

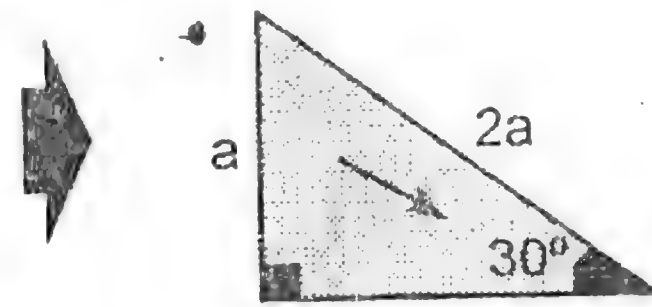
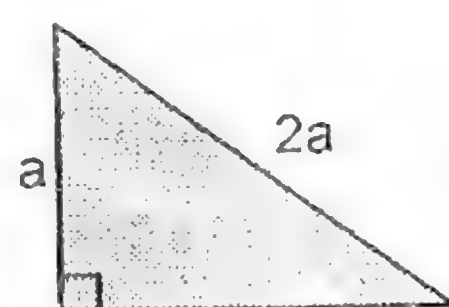


Se observa que el triángulo ABD es isosceles.
Se traza $\overline{BT} \perp \overline{TC}$ para obtener
Dos triángulos rectángulos congruentes
 $\triangle AKD \cong \triangle BTC$

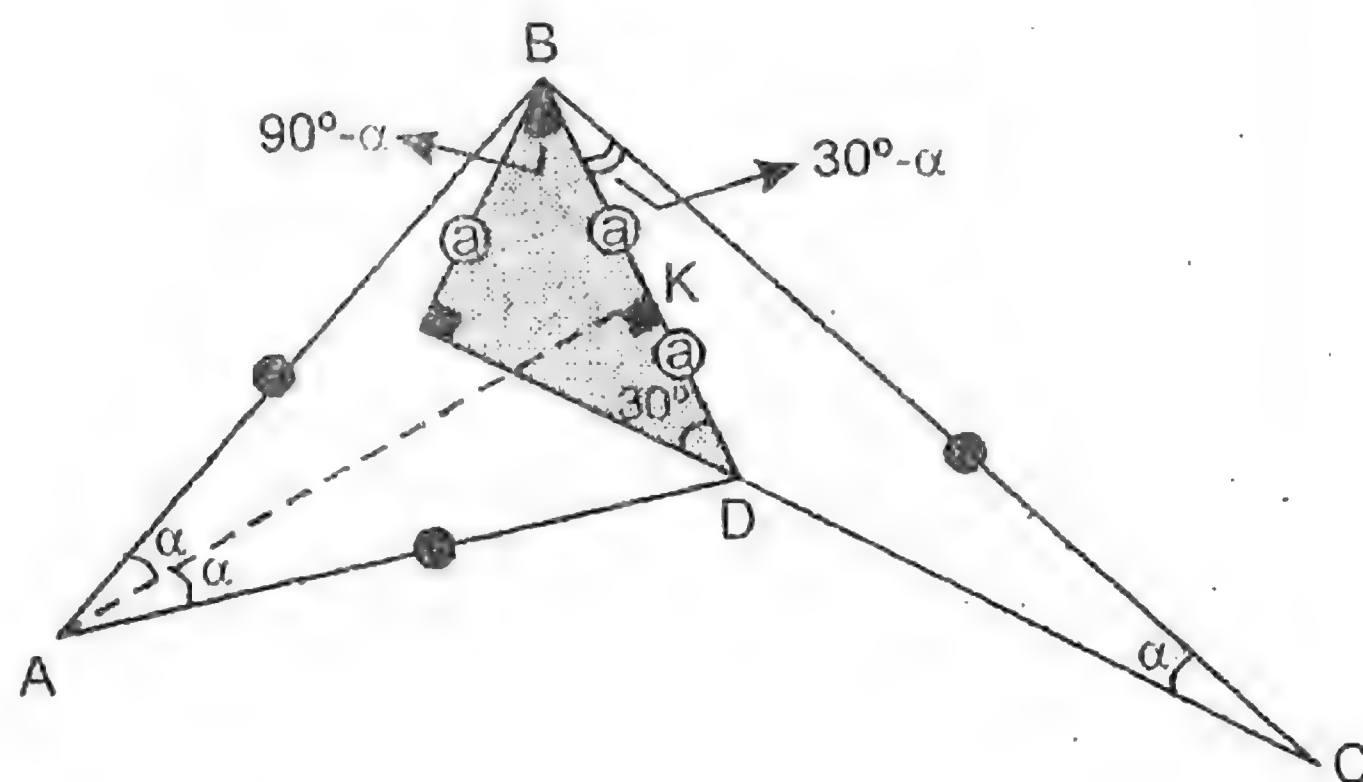


$$\text{Como } \triangle AKD \cong \triangle BTC \\ \Rightarrow BT = KD = a$$

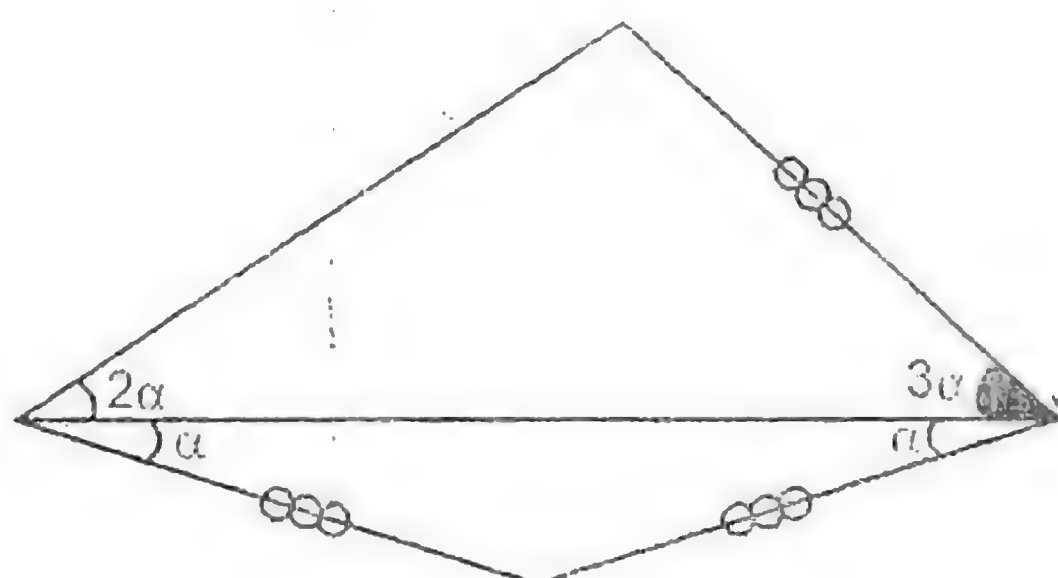
Luego se observa: $\triangle BTD$ es notable de 30° y 60°



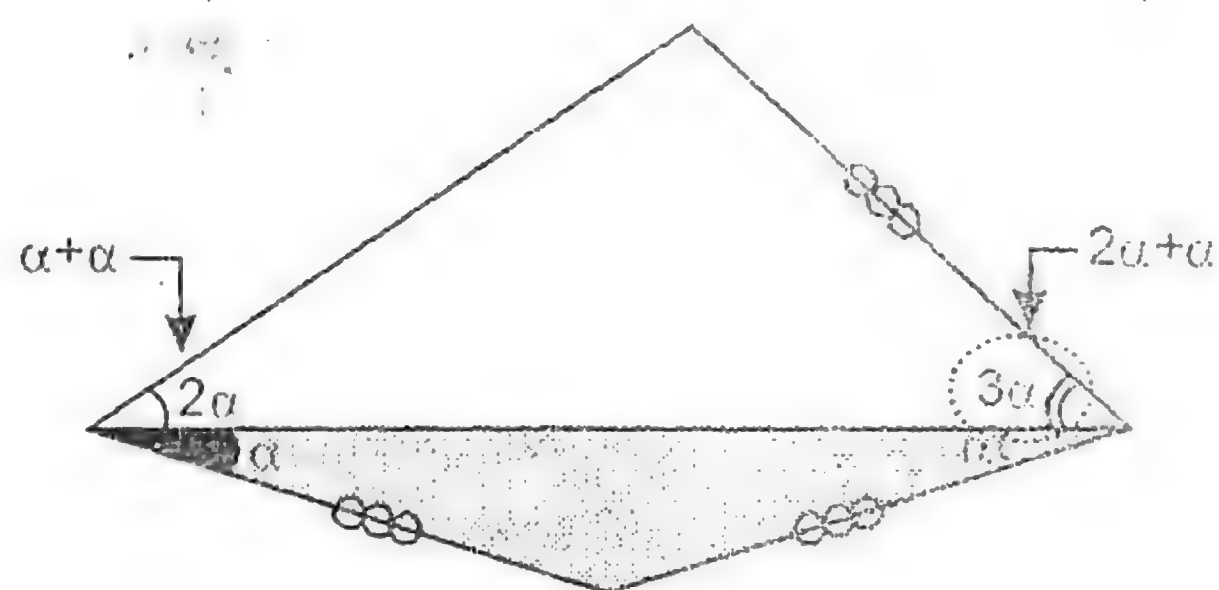
Ahora tenemos



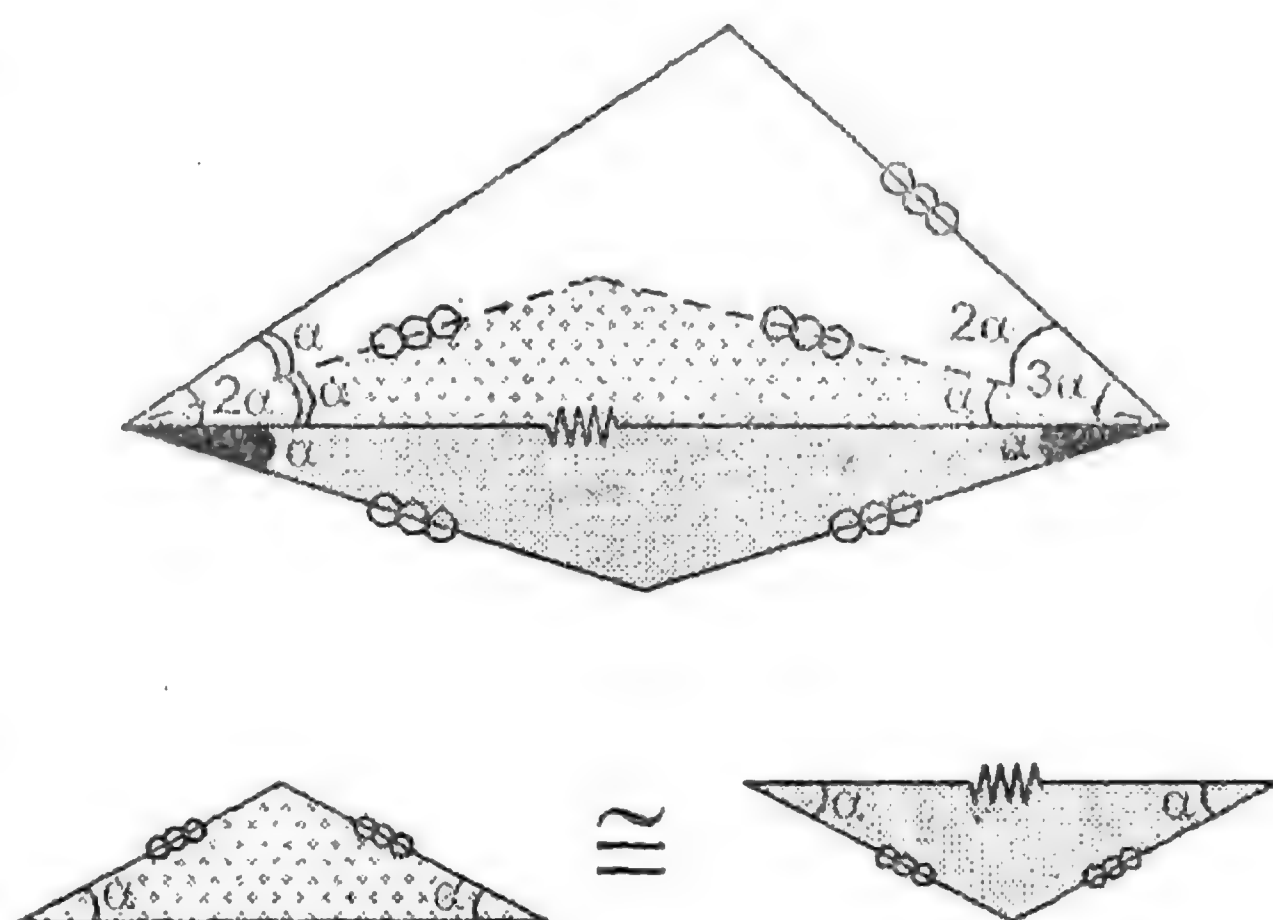
$$\text{En la figura se observa} \\ m\angle ABC = 90^\circ - \alpha + 30^\circ - \alpha \\ m\angle ABC = 120^\circ - 2\alpha$$

EJEMPLO N° 1Hallar α 

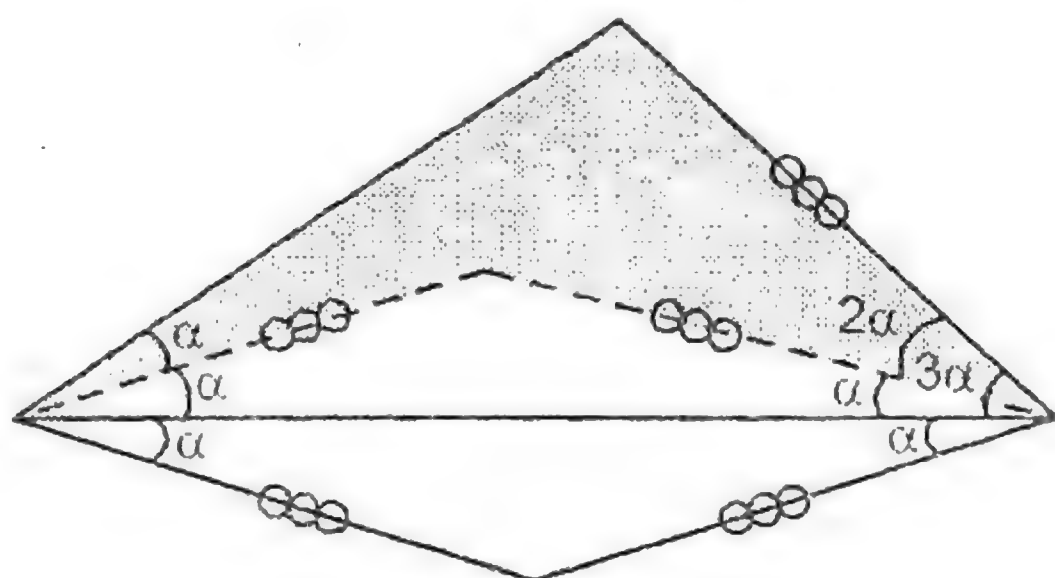
Solución: Observamos la figura y se obtiene:



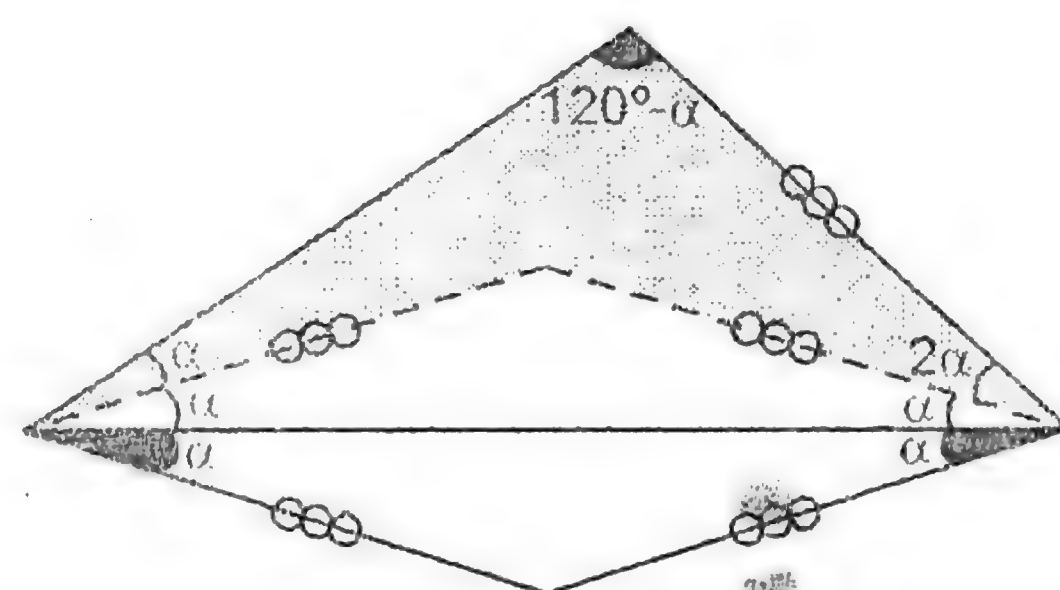
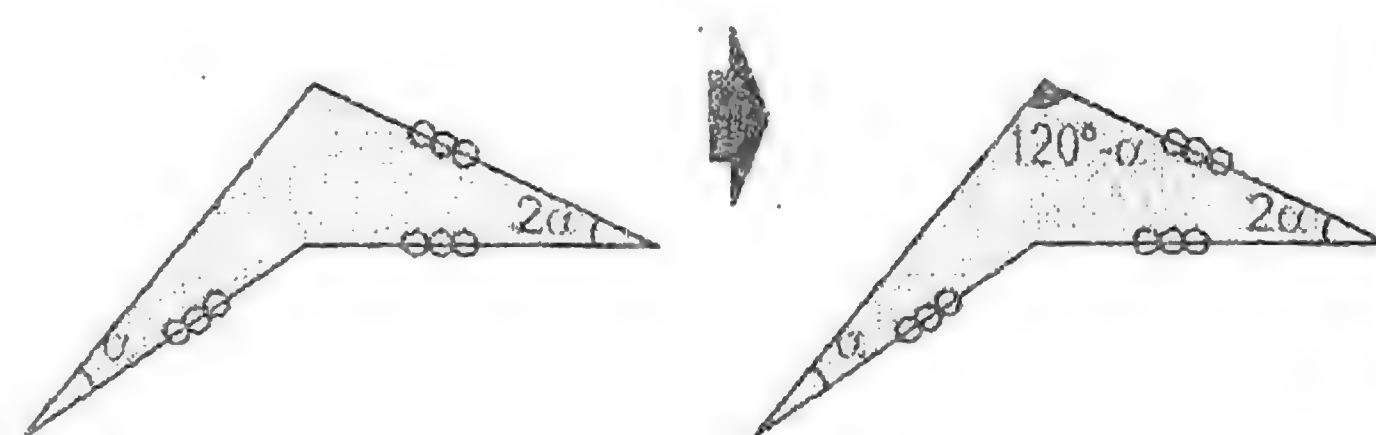
Paso N° 1: Construimos un triángulo congruente interiormente de la siguiente manera.



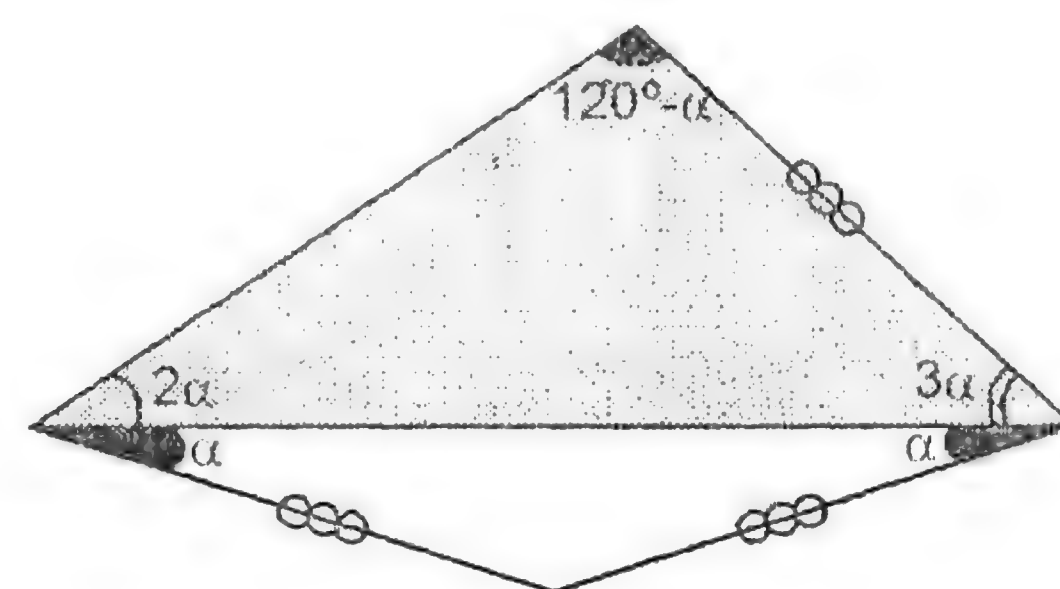
Paso N° 2: Ahora observamos un cuadrilátero concavo y con ello aplicamos el séptimo criterio de construcción



Aqui podemos observar que se cumple:



Paso N° 3: Finalmente observamos en la figura sombreada se cumple:



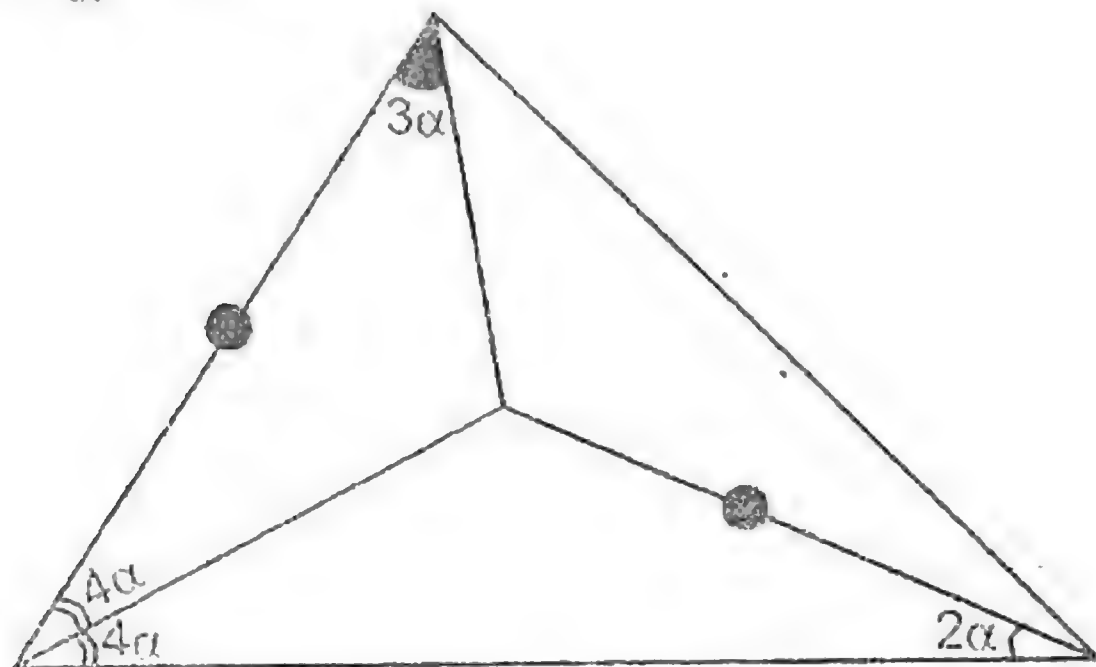
$$120^\circ - \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$4\alpha = 60^\circ$$

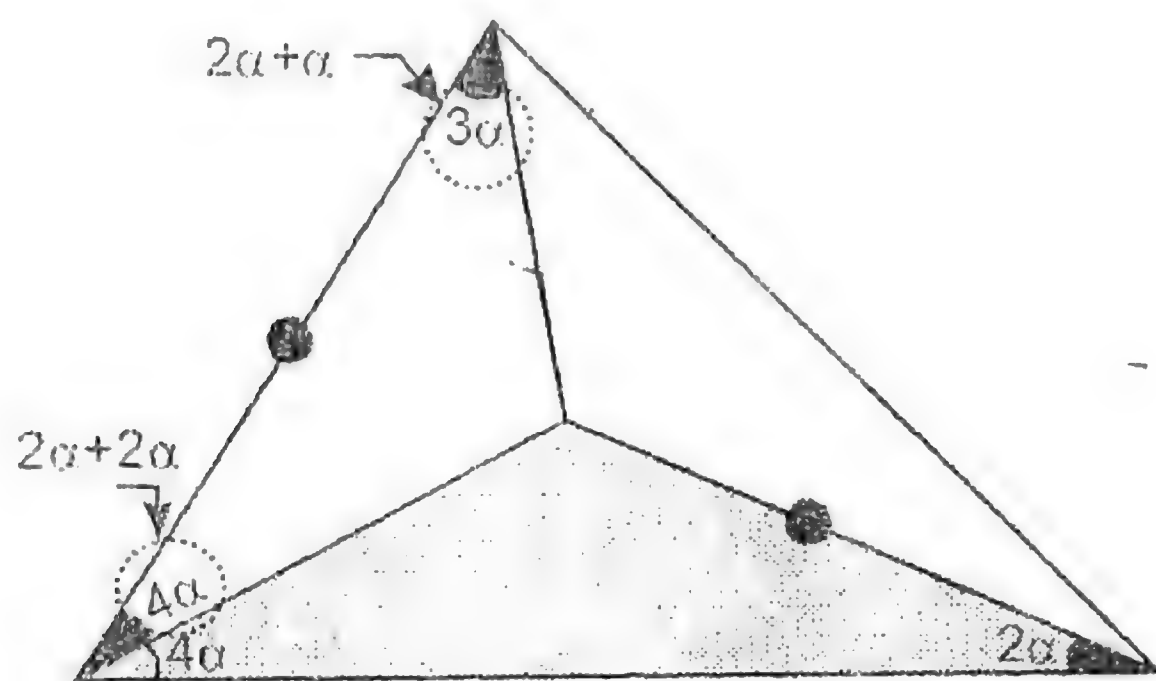
$$\alpha = 15^\circ$$

PROBLEMA N° 2

Sea α

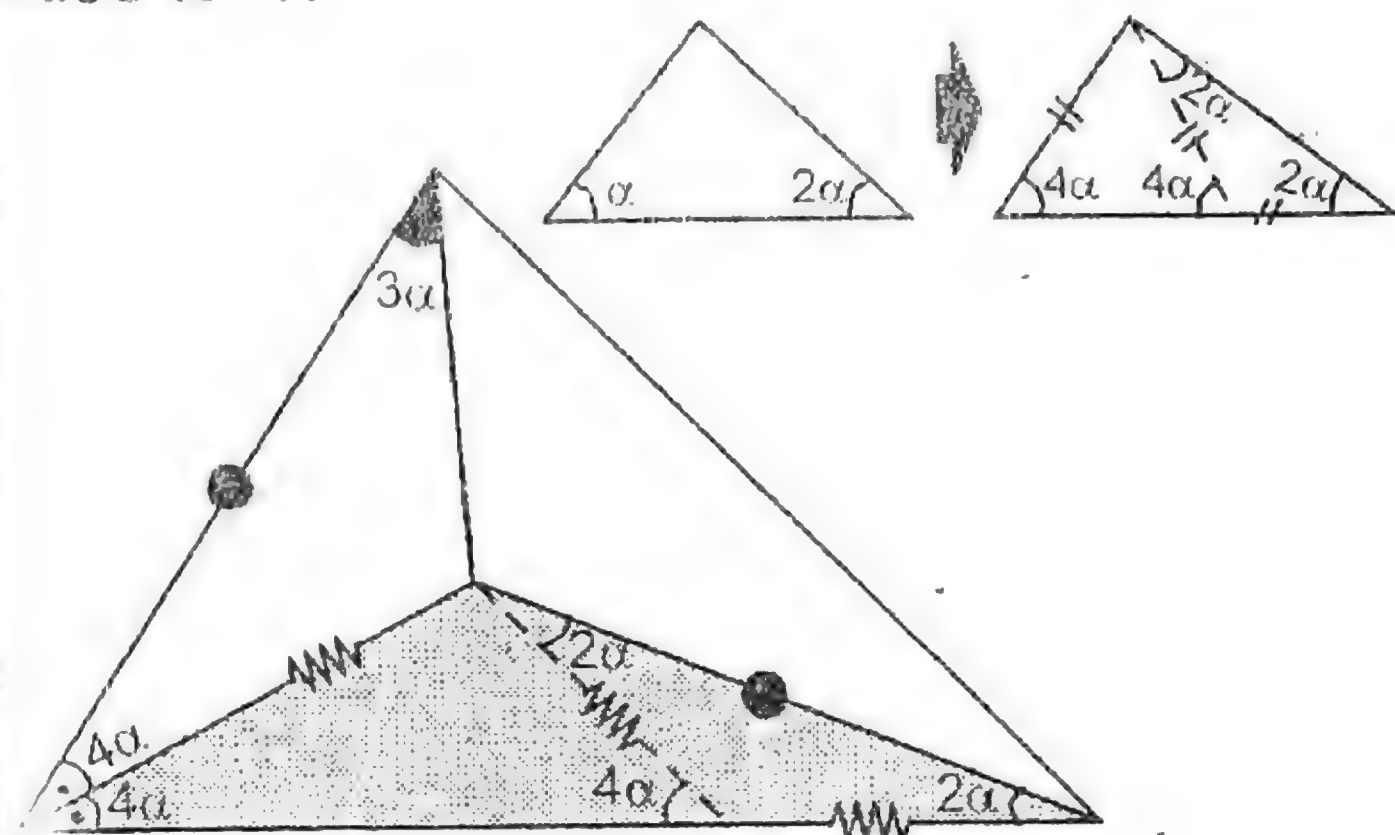


Conclusión:

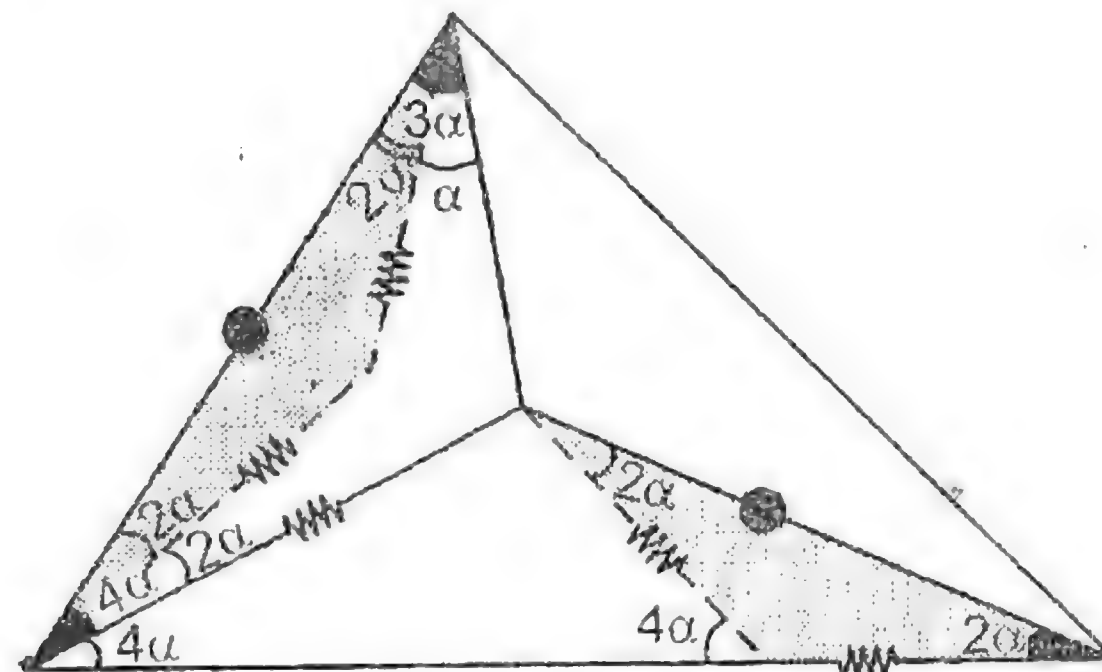
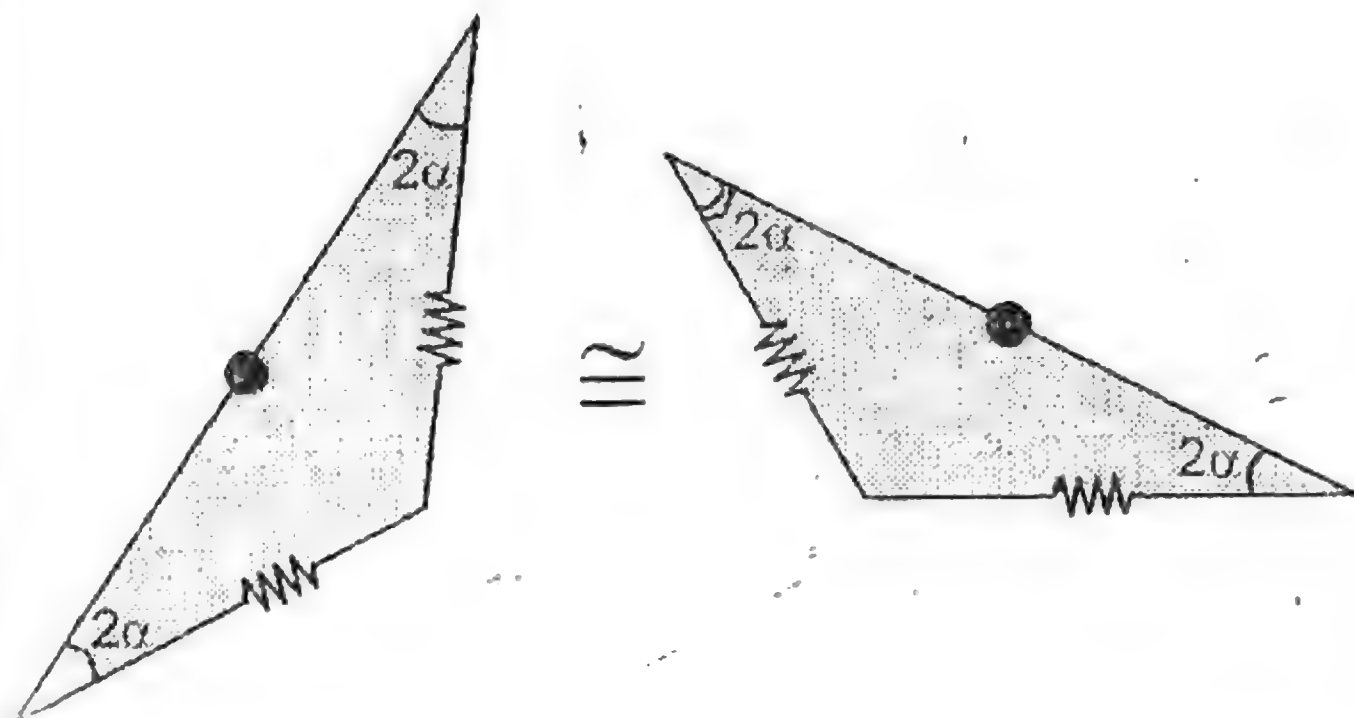


Se observa un triángulo donde se puede usar el primer criterio de construcción

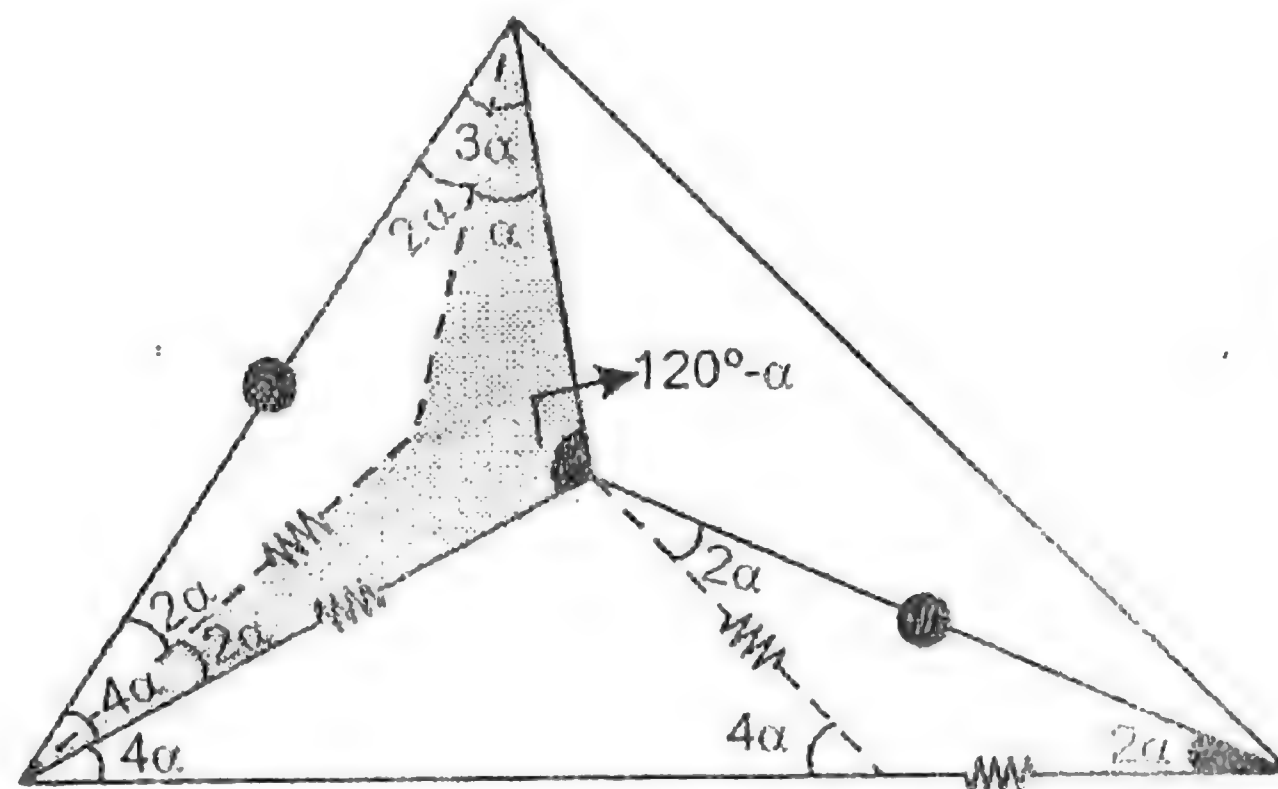
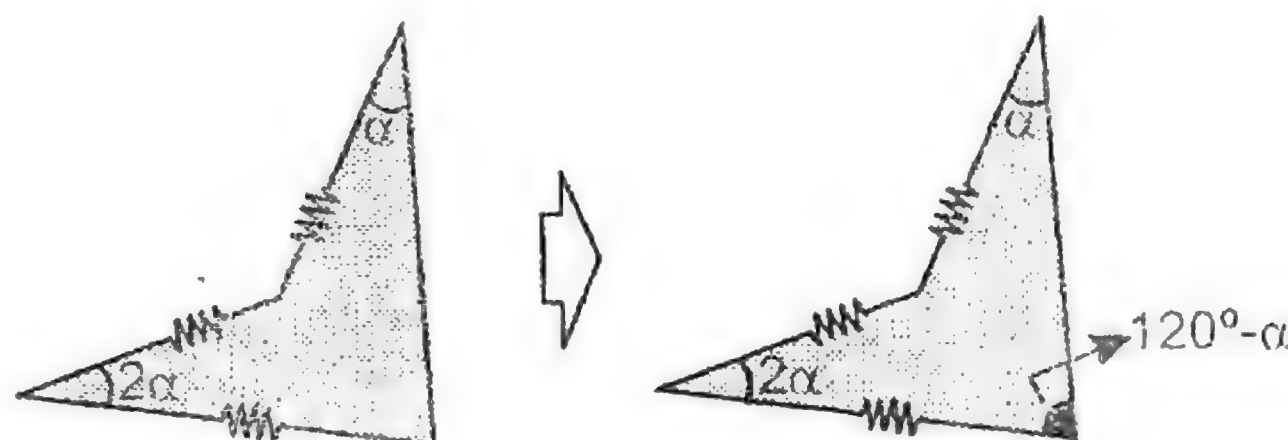
Paso N° 1:



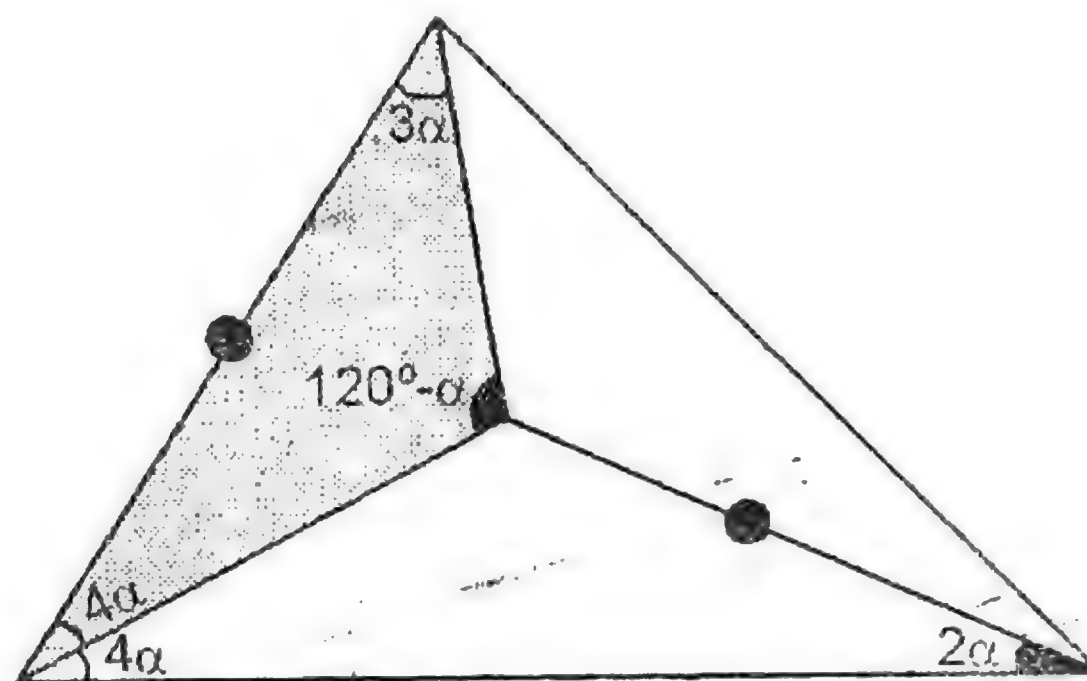
Paso N° 2: Construimos un triángulo congruente interiormente en la figura, de la siguiente manera y se obtiene:



Paso N° 3: En la figura observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple:



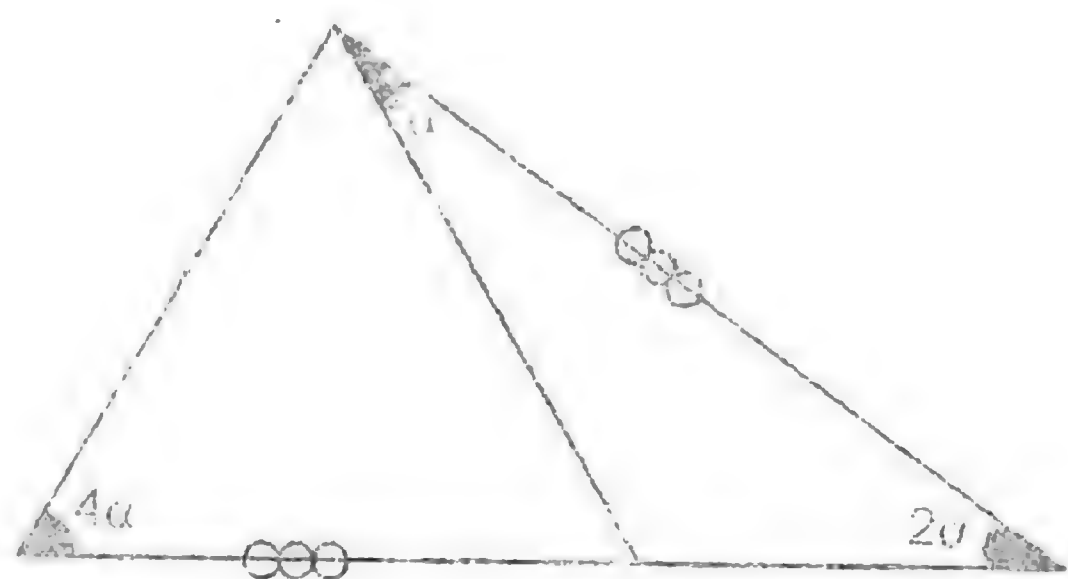
Paso N° 4: Luego en la figura sombreada, se tiene:



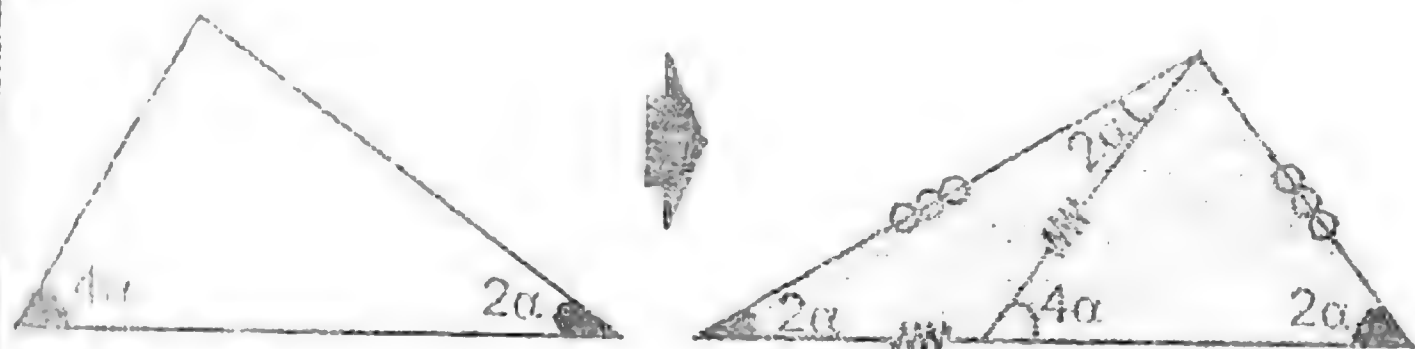
$$4\alpha + 120^\circ - \alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 60^\circ$$

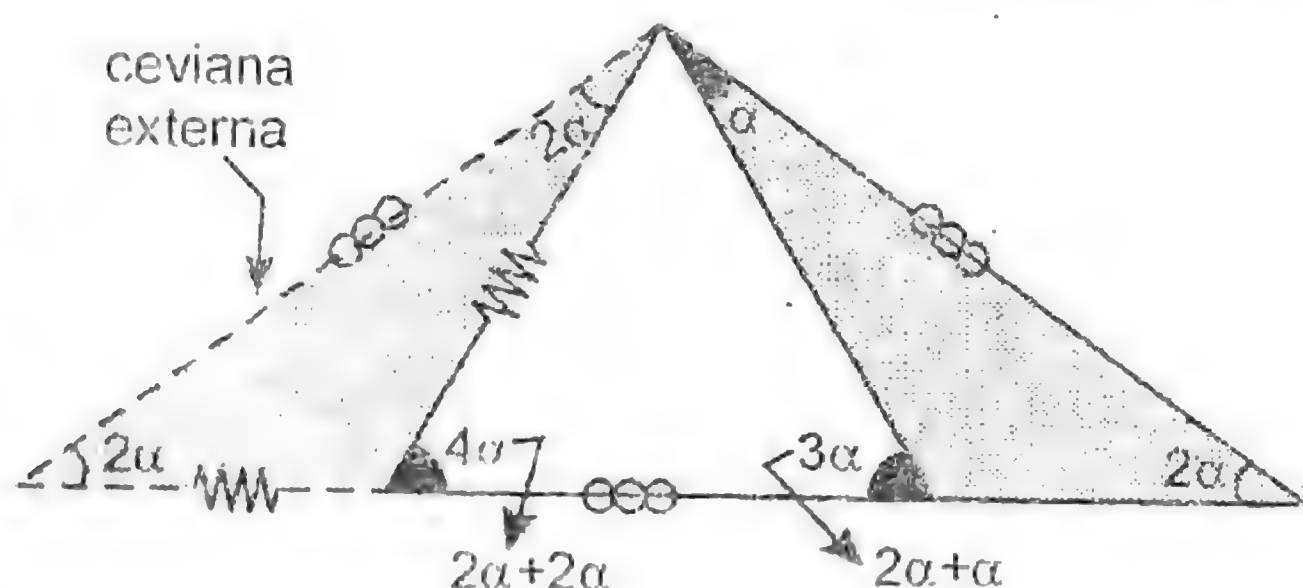
$$\alpha = 10^\circ$$

EJEMPLO N° 3Hallar " α ".

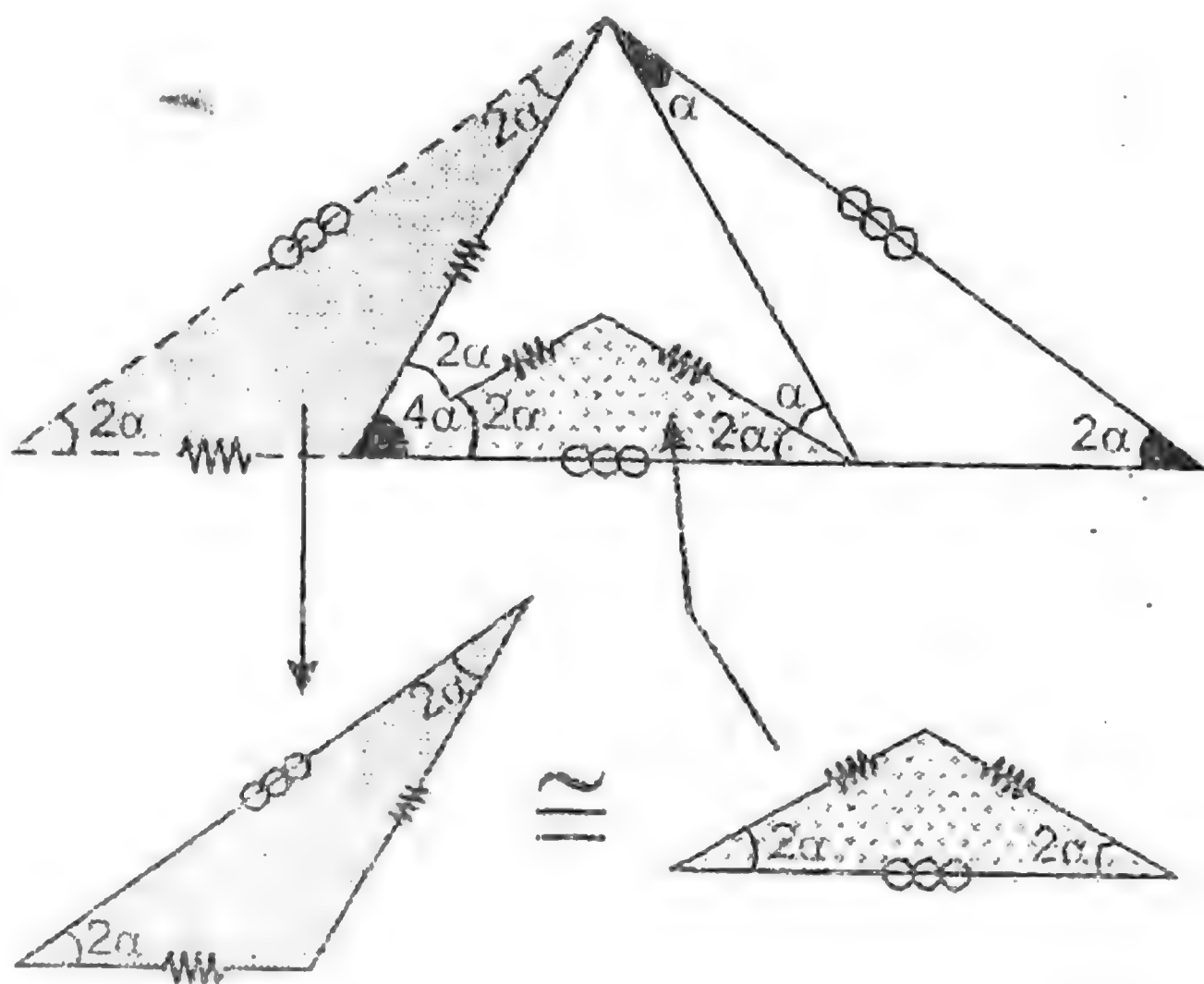
Solución: Observamos en la figura



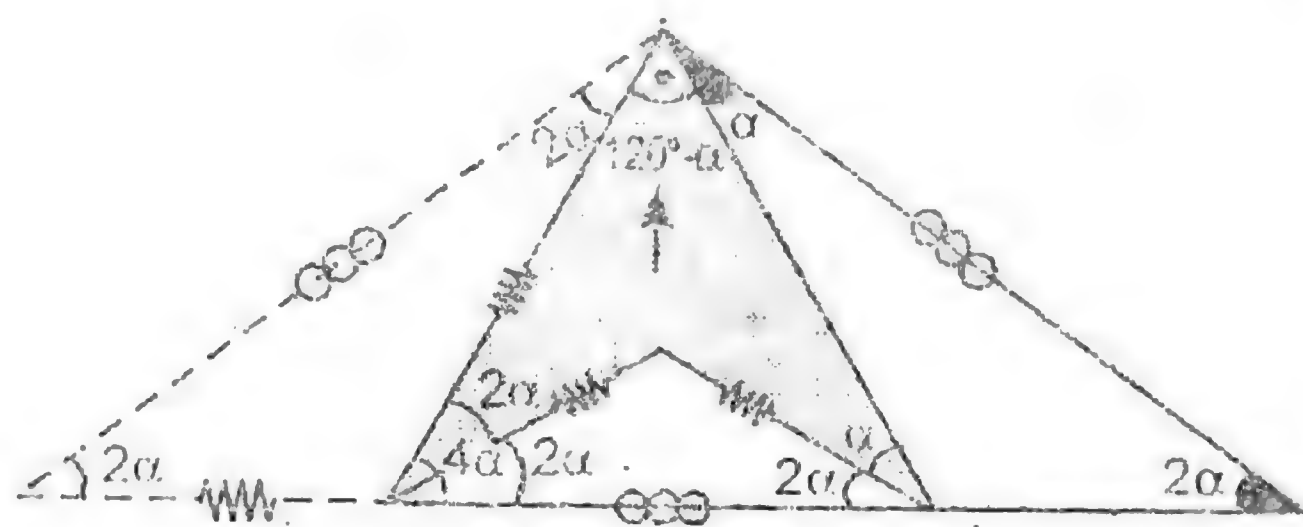
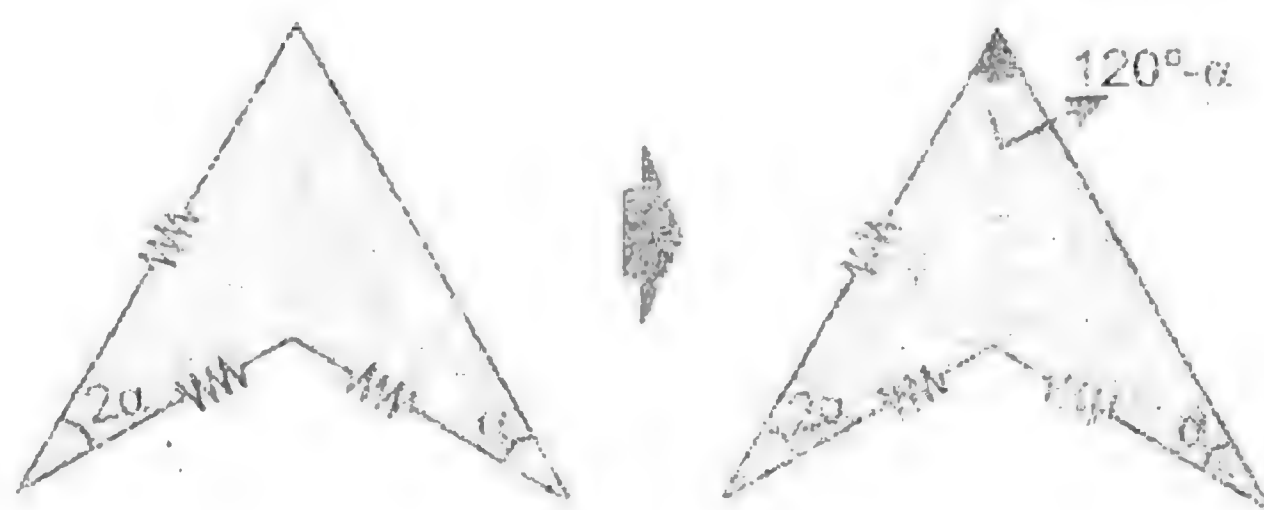
Paso N° 1: Primero aplicamos el primer criterio de construcción, trazando una ceviana externa.



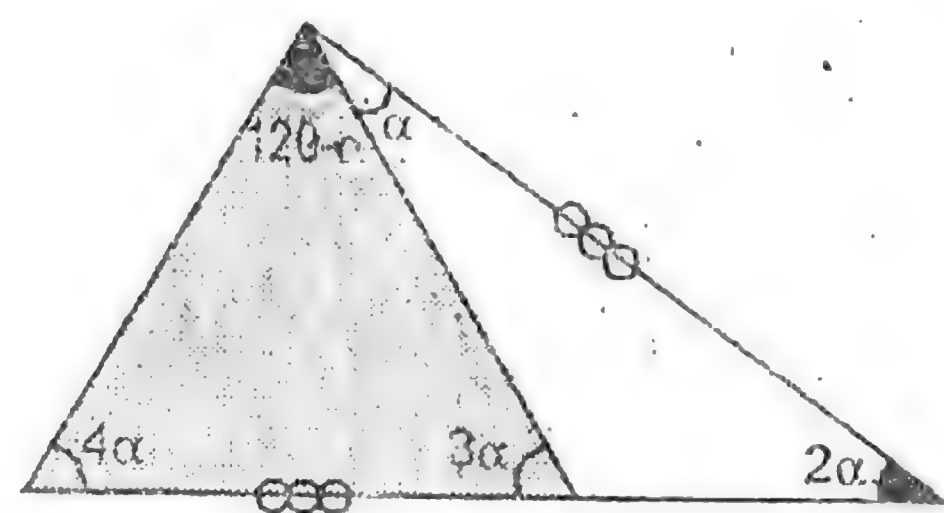
Paso N° 2: Ahora construimos un triángulo congruente interiormente para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente forma. caso (A.L.A.)



Paso N° 3: Luego en la nueva figura observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple:



Paso N° 4: Finalmente se observa en el figura sombreada que se cumple:



$$\therefore 4\alpha + 120^\circ - \alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

Curiosidad Matemática

¿ TODO TRIÁNGULO ES ISÓSCELES ?

Continuación el autor de esta obra realizará unas consideraciones geométricas para demostrar que todo triángulo es isósceles, lo cual por supuesto no es cierto, quedará pues para el lector averiguar cual o cuales de estas consideraciones se hizo en forma errónea.

Demostración:

Paso N° 1: Partimos de un triángulo cualquiera ABC.

Paso N° 2: Intersectamos la bisectriz del ángulo B con la mediatriz de \overline{AC} en un punto interior P.

Paso N° 3: Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y

$$\overline{PH} \perp \overline{BC}$$

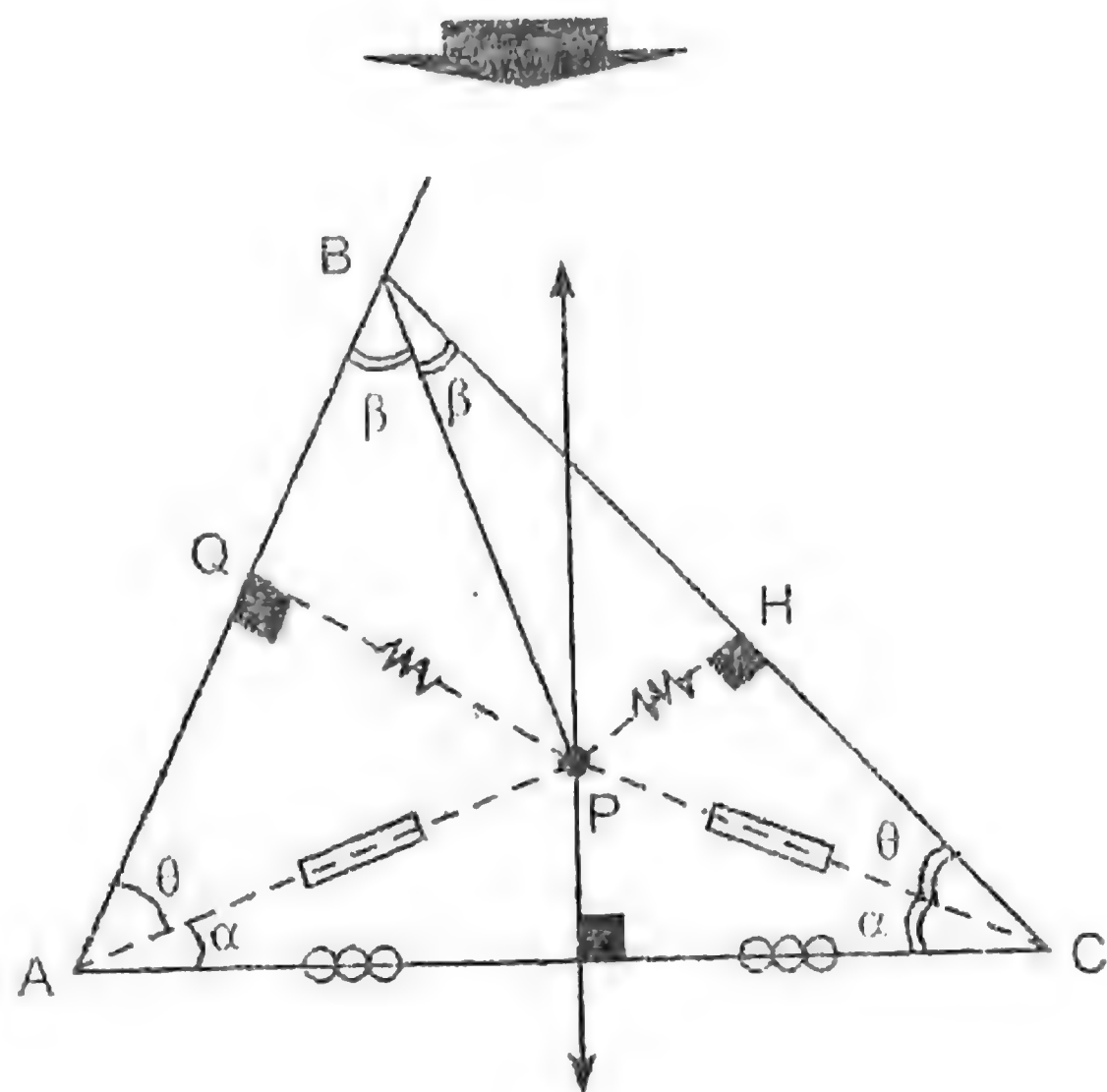
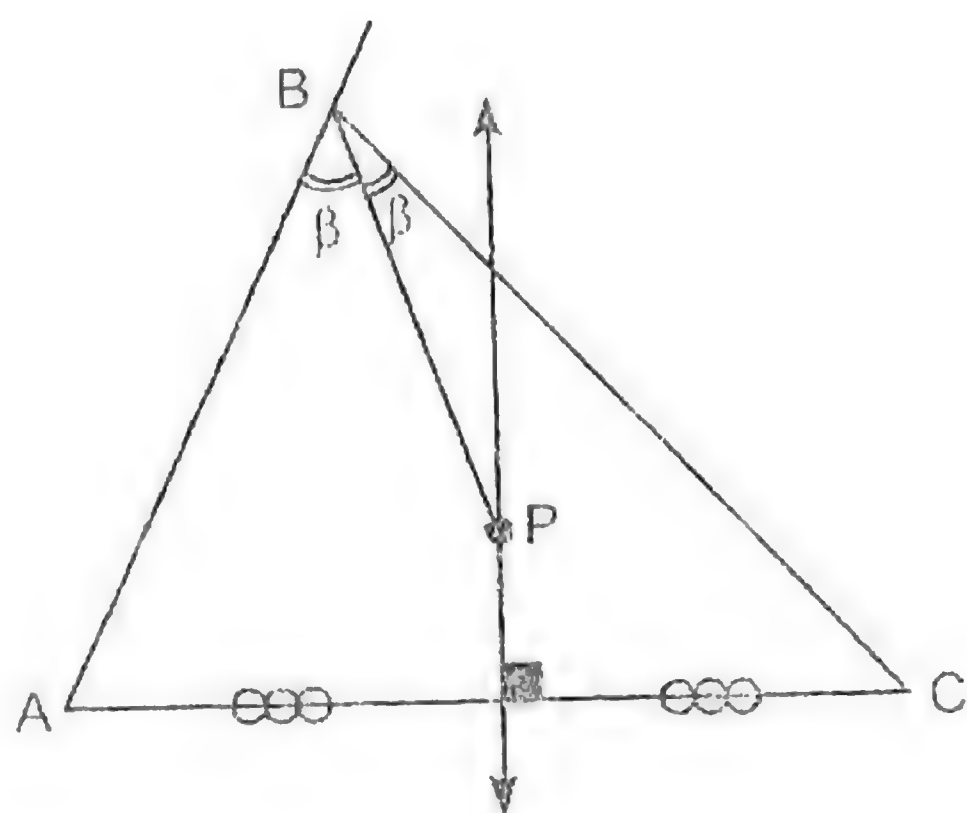
Paso N° 4: Se observa que cumple el teorema de la bisectriz: $PQ = PH$

Paso N° 5: Trazamos AP y PC donde se observa que se cumple el teorema de la mediatriz: $PA = PC$, además: $m\angle PAC = m\angle PCA = \alpha$

Paso N° 6: Se observa dos triángulos rectángulos congruentes $\triangle AQP \cong \triangle PHC$
 $\Rightarrow m\angle QAP = m\angle PCH = \theta$

Paso N° 7: Finalmente se observa en el triángulo ABC: $m\angle A = \theta + \alpha = m\angle C$

$\therefore \triangle ABC$ es isósceles

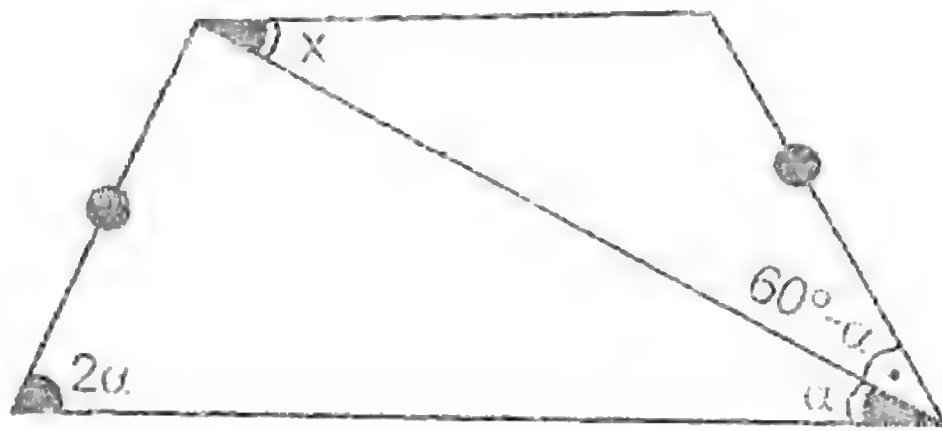


Extraído del Texto "Geometría Plana" de
Ernesto Quispe

Problemas Resueltos

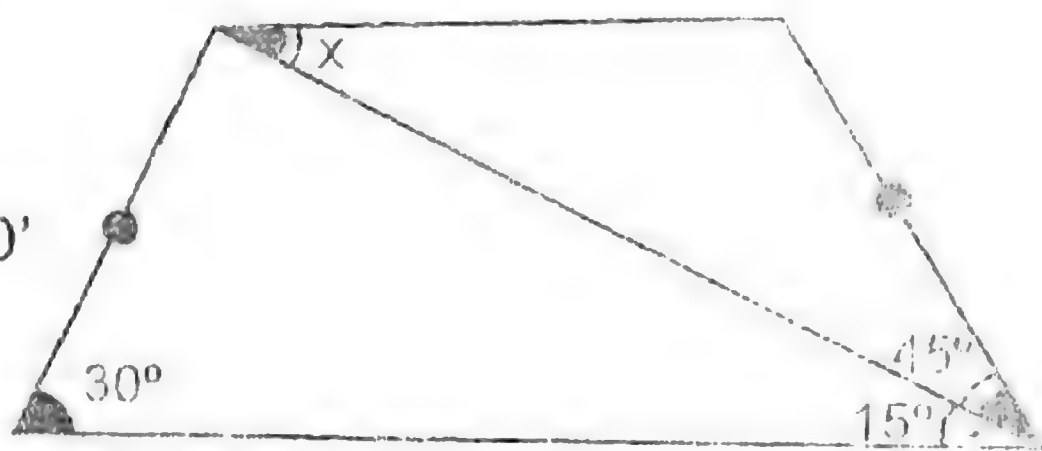
01. Calcular "x"

- A) 18°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 37°
 E) 45°



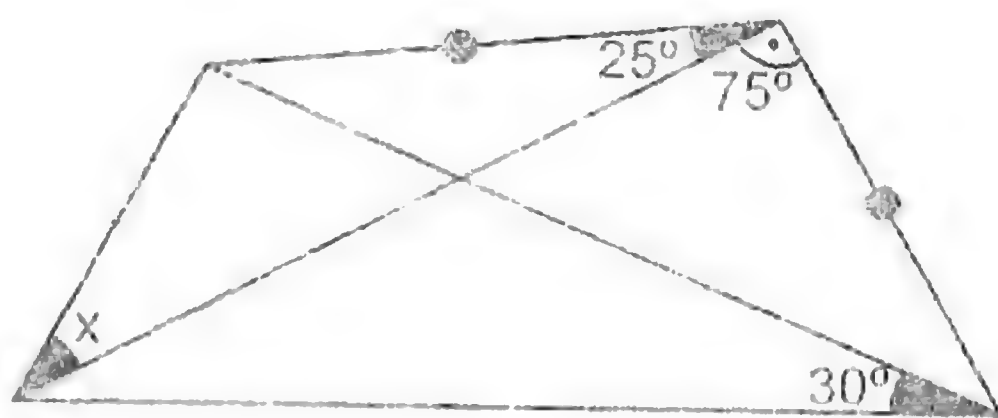
02. Calcular "x"

- A) 15°
 B) 18°
 C) $22^\circ 30'$
 D) 30°
 E) 40°



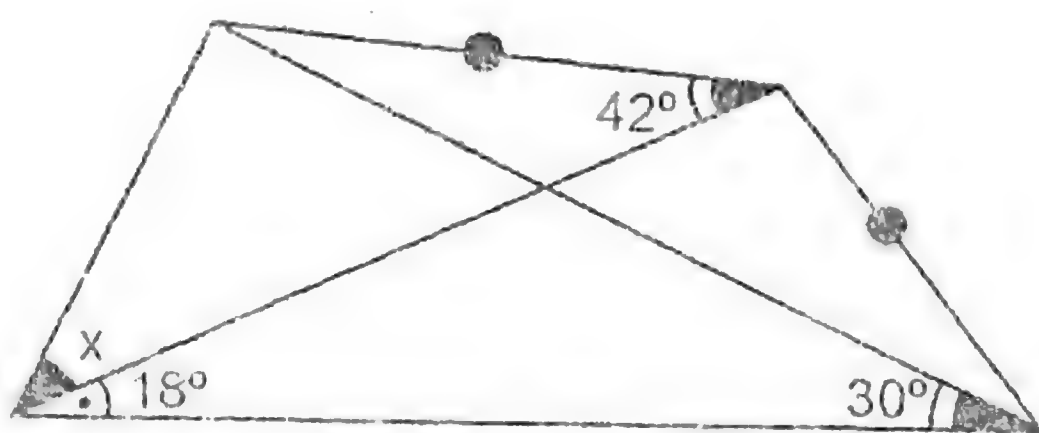
03. Calcular "x"

- A) 18°
 B) 20°
 C) 25°
 D) 30°
 E) 45°



04. Calcular "x"

- A) 15°
 B) 22°
 C) 28°
 D) 30°
 E) 36°

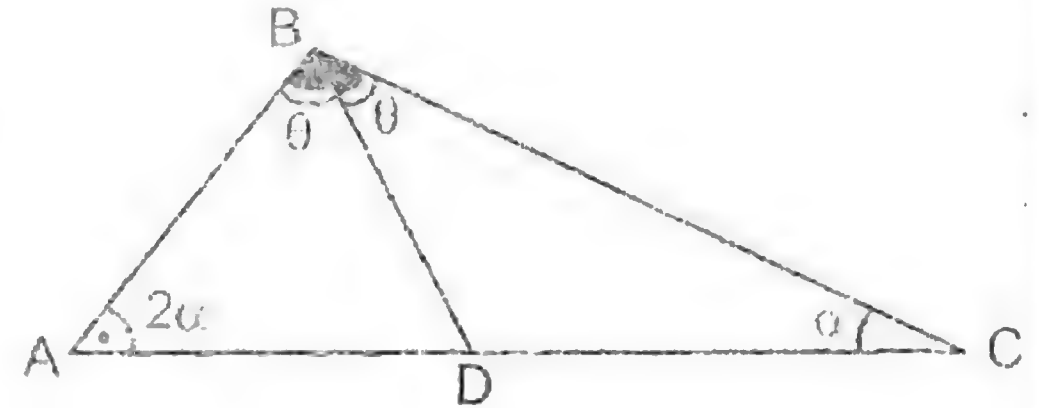


05. Calcular "θ"

- A) 5°
 B) 9°
 C) 10°
 D) 12°
 E) 14°

06. Calcular el máximo valor de "CD" si $AB = 8$

- A) 4
 B) 7
 C) 16
 D) 15
 E) 8



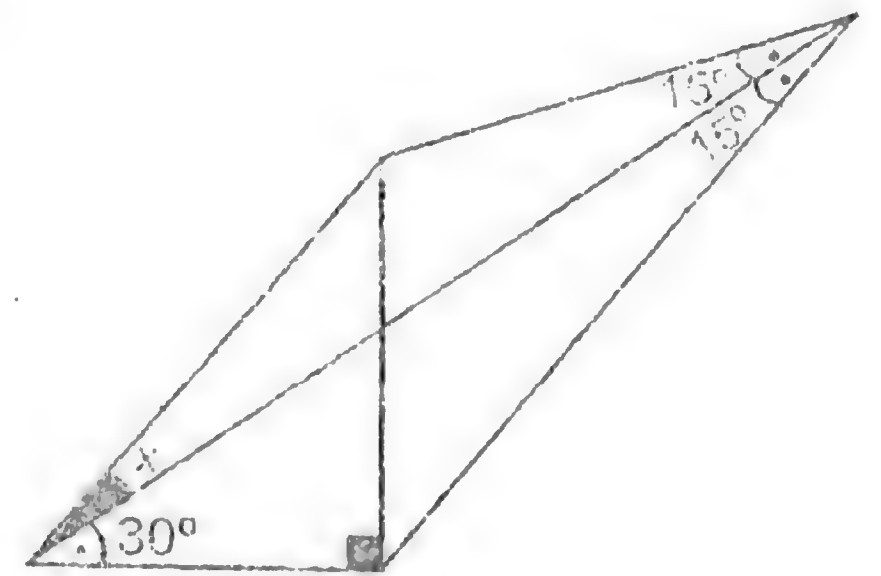
07. Calcular "α"

- A) 10°
 B) 12°
 C) 15°
 D) 18°
 E) 20°



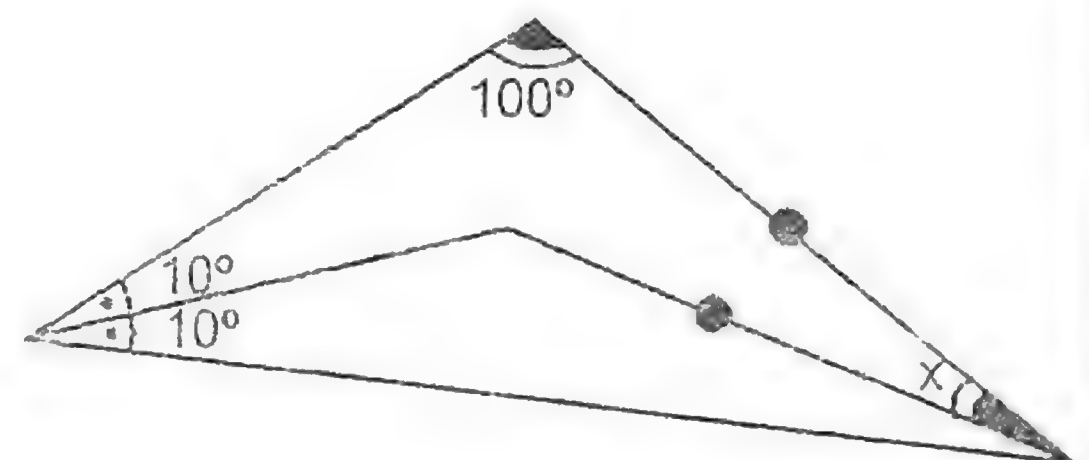
08. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 12°
 C) 15°
 D) 18°
 E) $22^\circ 30'$



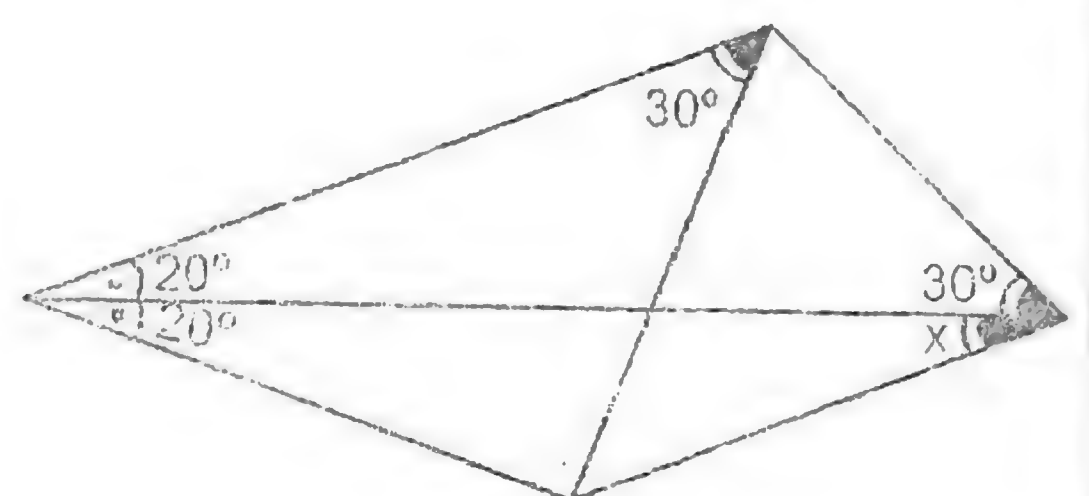
09. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 40°
 E) 60°



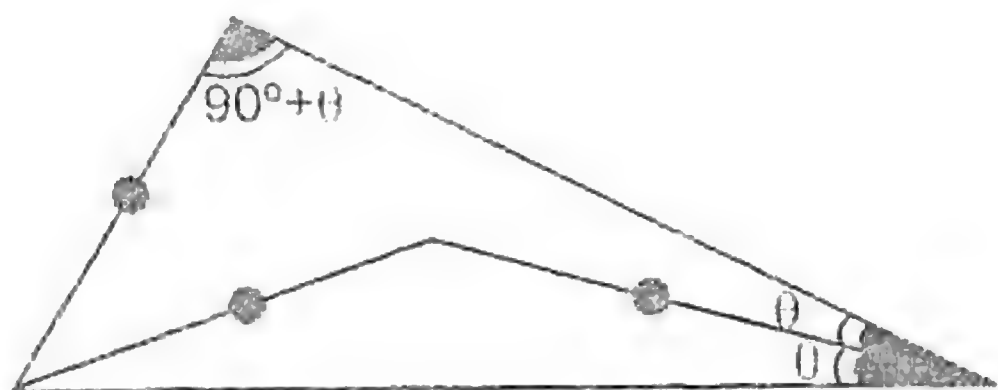
10. Calcular "x"

- A) 5°
 B) 10°
 C) 15°
 D) 18°
 E) 20°



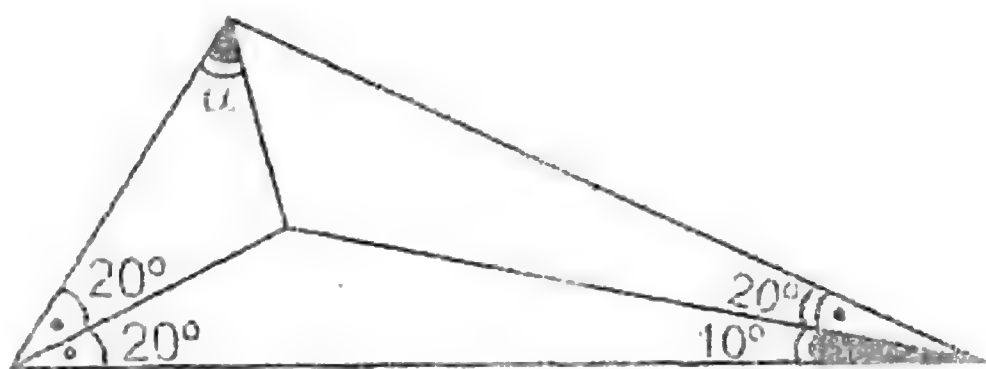
1. Calcular " θ "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



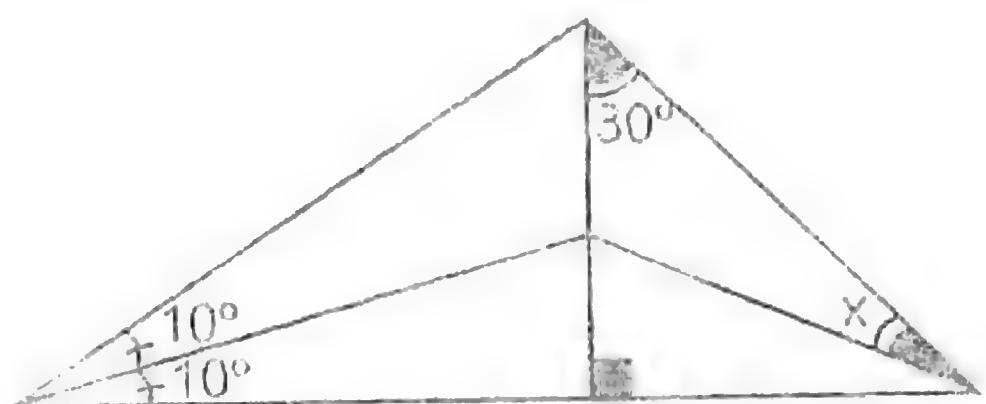
2. Calcular " α "

- A) 20°
- B) 30°
- C) 32°
- D) 37°
- E) 60°



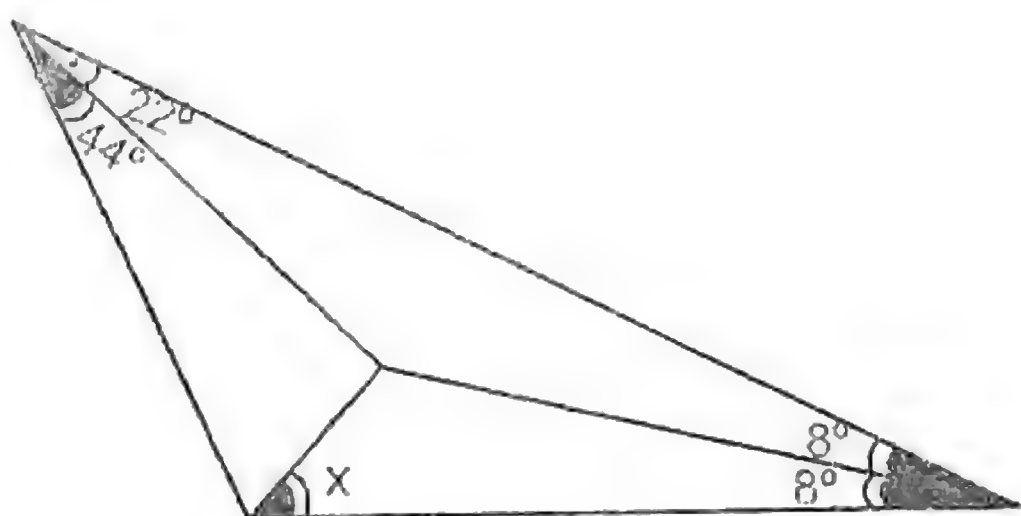
Calcular " x "

- A) 5°
- B) 10°
- C) 15°
- D) 20°
- E) 25°



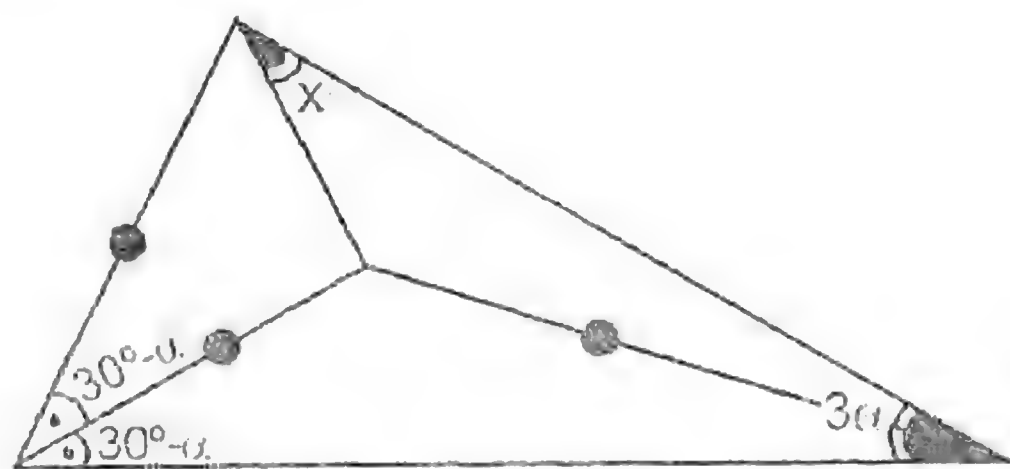
4. Calcular " x "

- A) 20°
- B) 30°
- C) 37°
- D) 45°
- E) 60°



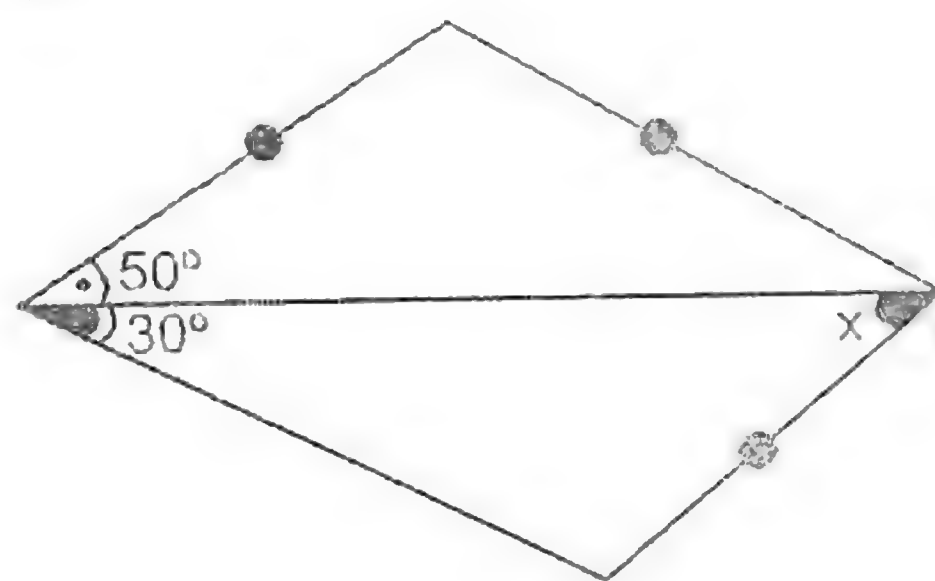
15. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 20°
- C) 45°
- D) 30°
- E) 60°



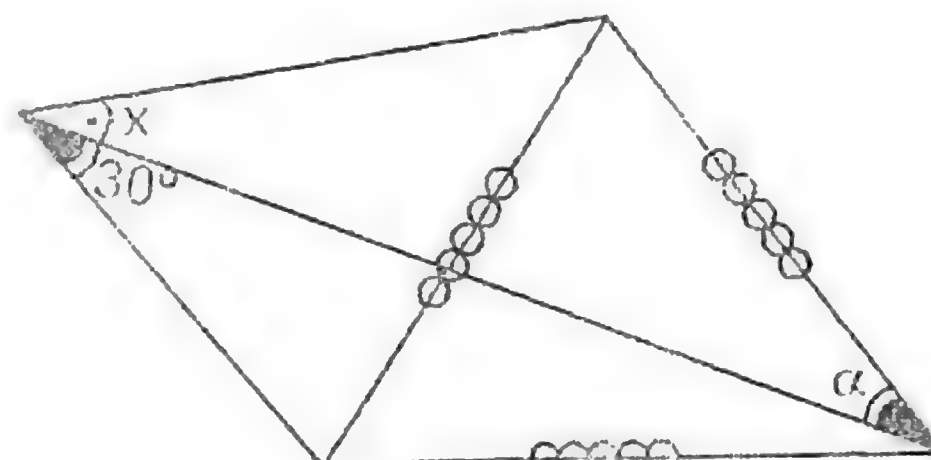
16. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 20°
- E) 30°



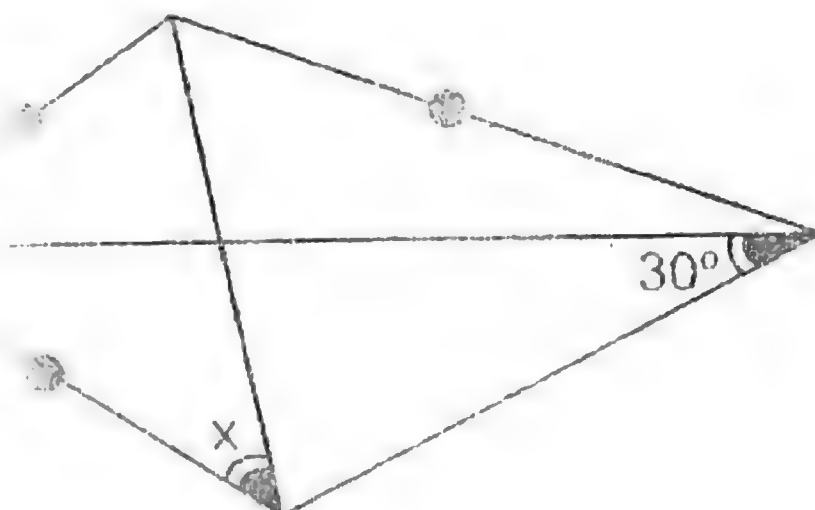
17. Calcular " x "

- A) $\alpha/2$
- B) α
- C) $30 - \alpha$
- D) 2α
- E) $60 - \alpha$



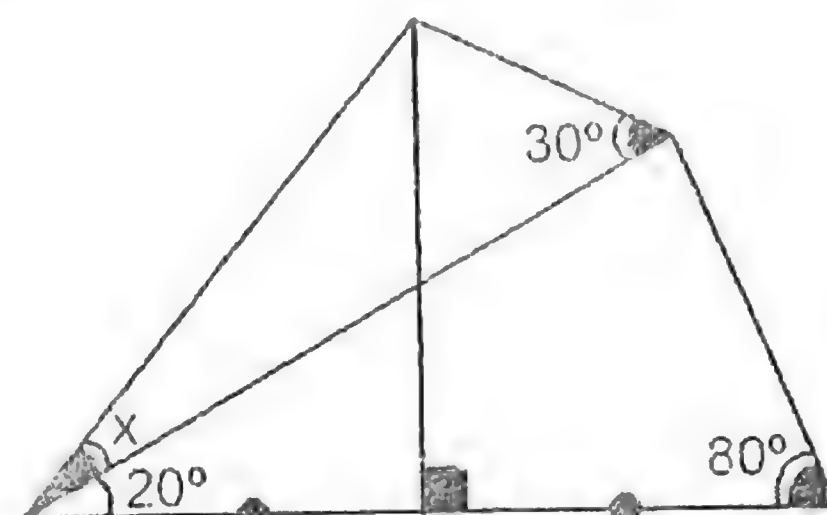
18. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



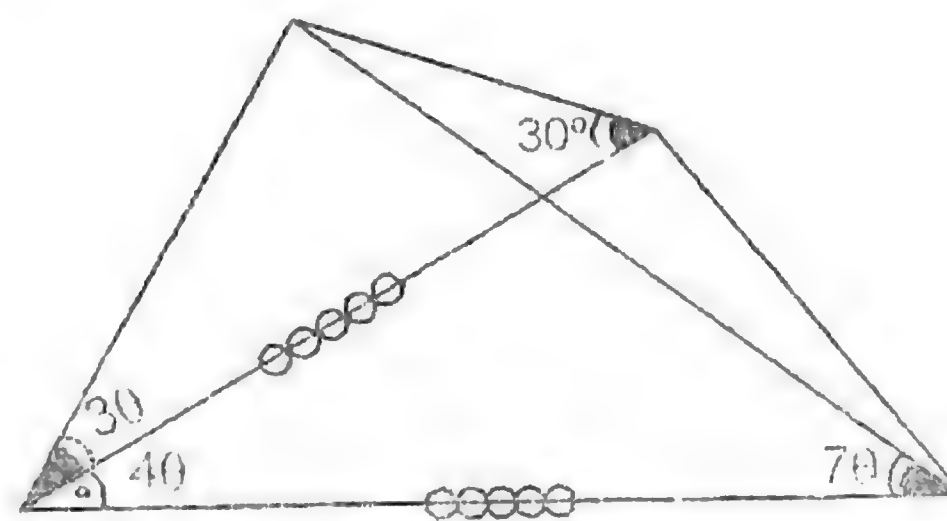
19. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 15°
- C) 18°
- D) 20°
- E) 24°



20. Calcular " θ "

- A) 6°
- B) 8°
- C) 9°
- D) 10°
- E) 12°



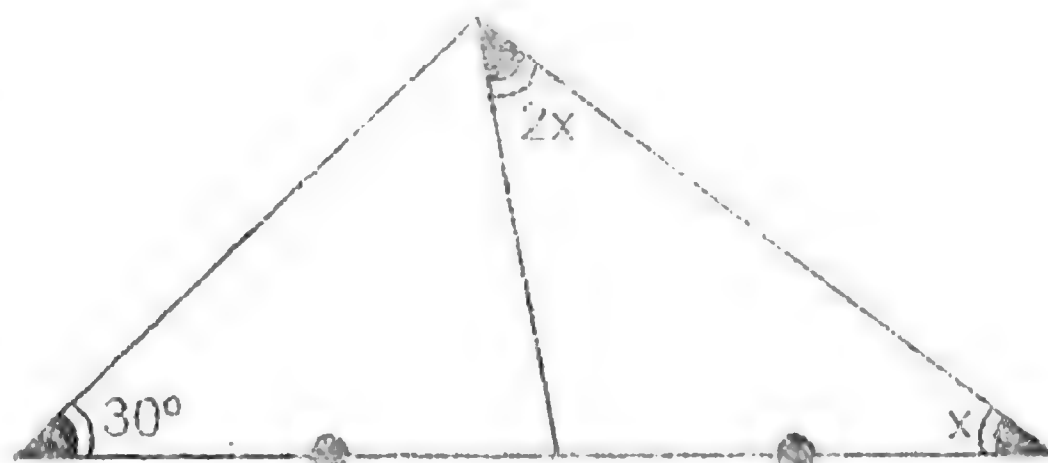
21. Calcular "x"

- A) 10°
- B) 15°
- C) 18°
- D) 20°
- E) 25°



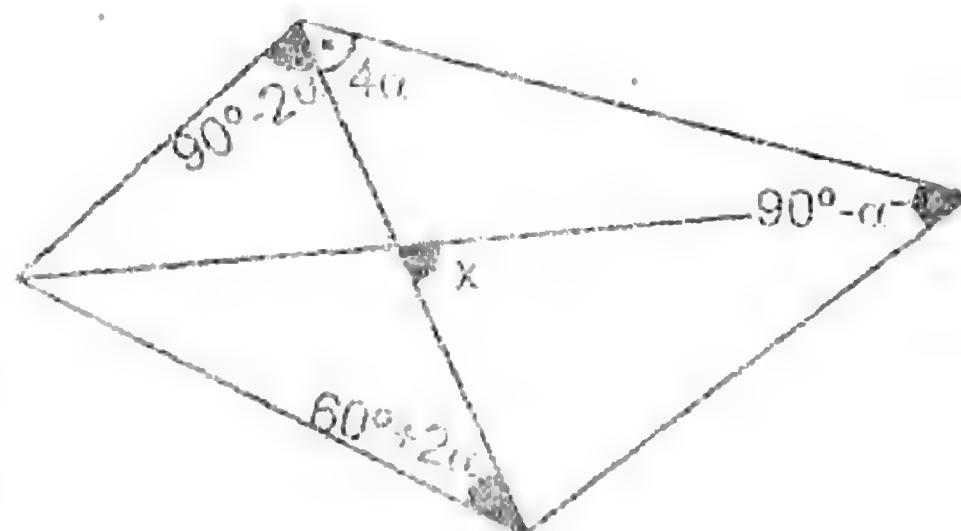
22. Calcular "x"

- A) 5°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



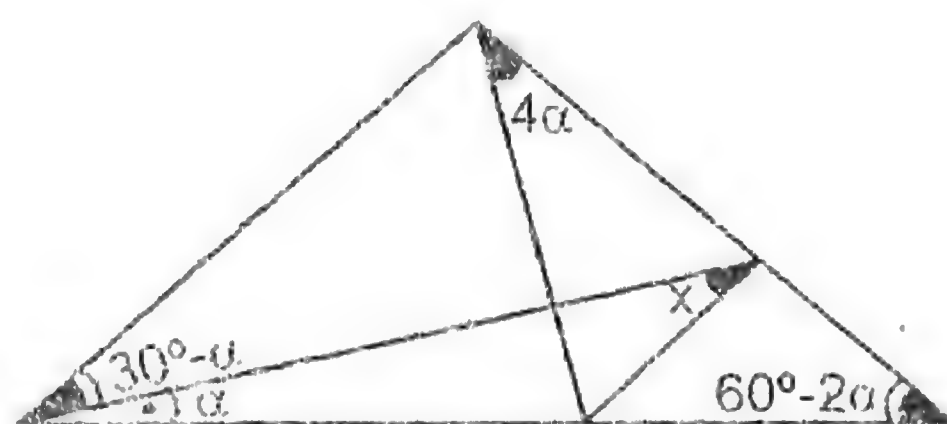
23. Calcular "x"

- A) 90°
- B) $90^\circ - \alpha$
- C) $90^\circ + \alpha$
- D) $60^\circ + 3\alpha$
- E) $75^\circ + 2\alpha$



24. Calcular "x"

- A) α
- B) $30^\circ + \alpha$
- C) 3α
- D) 30°
- E) $30 - \alpha$



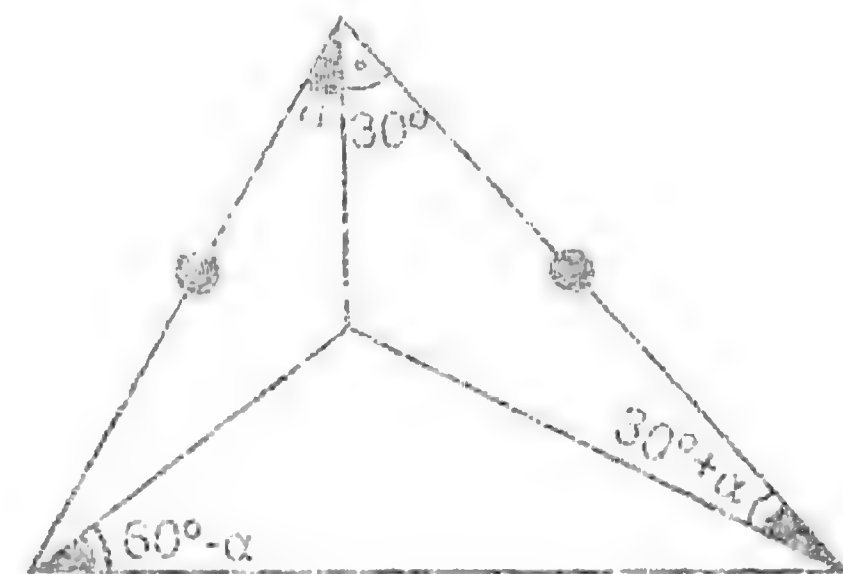
25. Calcular "x"

- A) 18°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 37°
- E) 45°



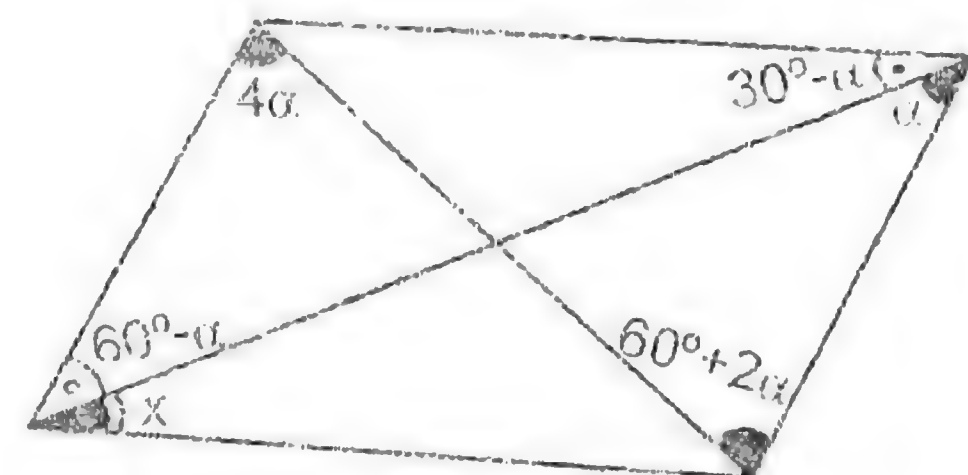
26. Calcular "alpha"

- A) 3°
- B) 9°
- C) 10°
- D) 12°
- E) 15°



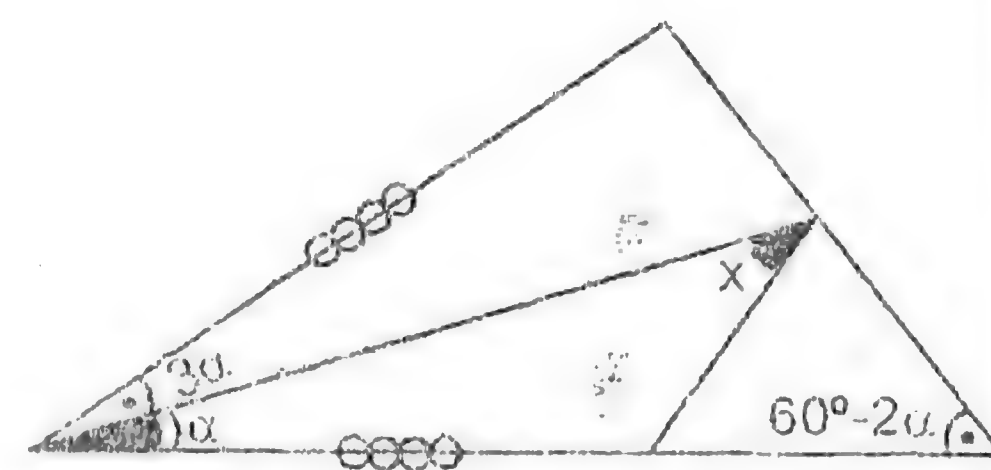
27. Calcular "x"

- A) 18°
- B) 24°
- C) 36°
- D) 30°
- E) 45°



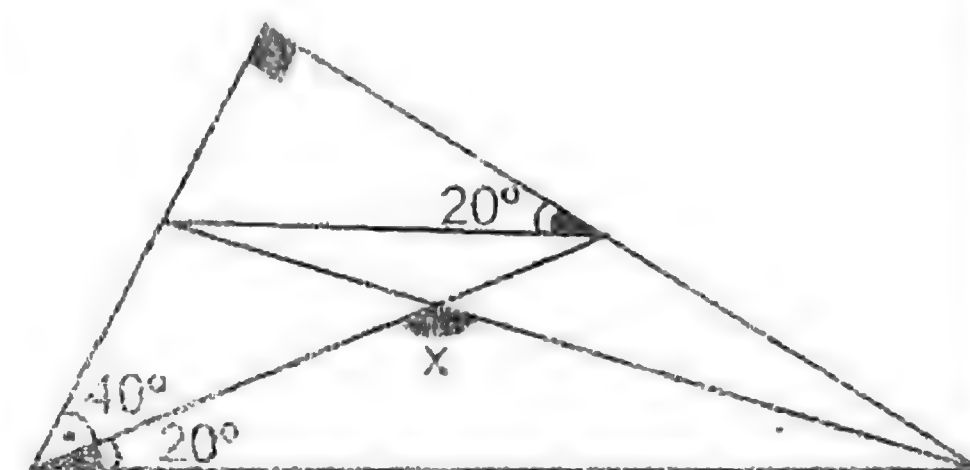
28. Calcular "x"

- A) 15°
- B) 18°
- C) 24°
- D) 30°
- E) 36°



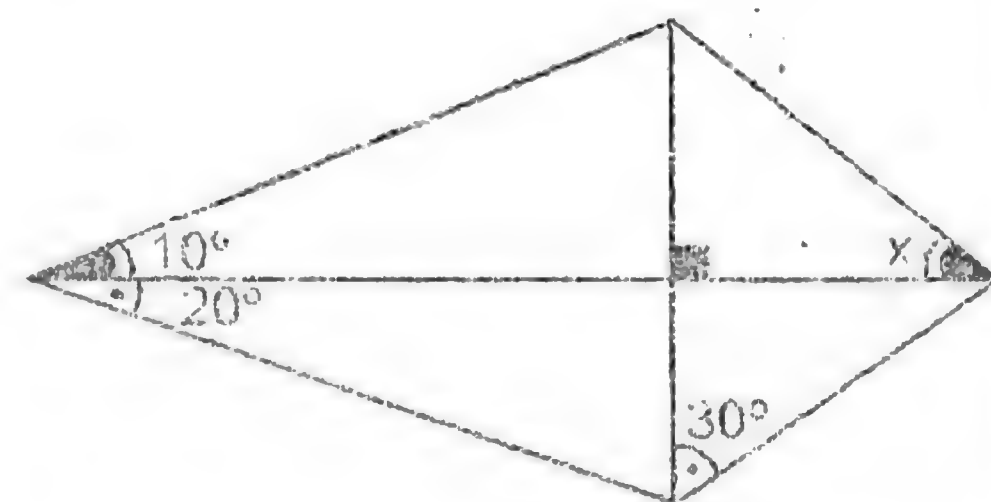
29. Calcular "x"

- A) 120°
- B) 140°
- C) 130°
- D) 135°
- E) 150°



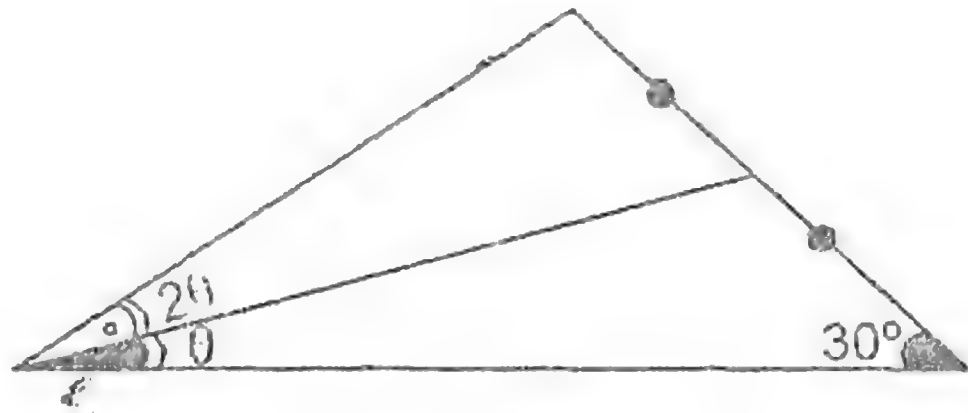
30. Calcular "x"

- A) 20°
- B) 30°
- C) 40°
- D) 50°
- E) 60°



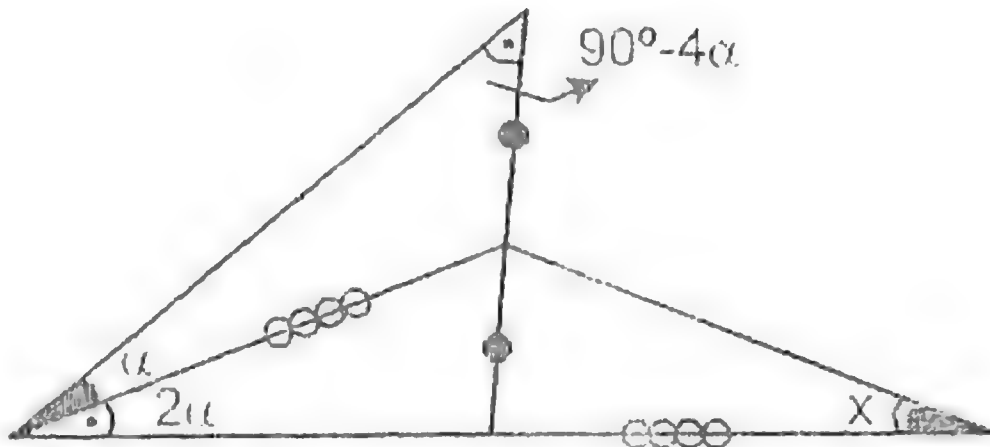
1. Calcular " θ "

- A) 15°
- B) 18°
- C) 20°
- D) 24°
- E) 26°



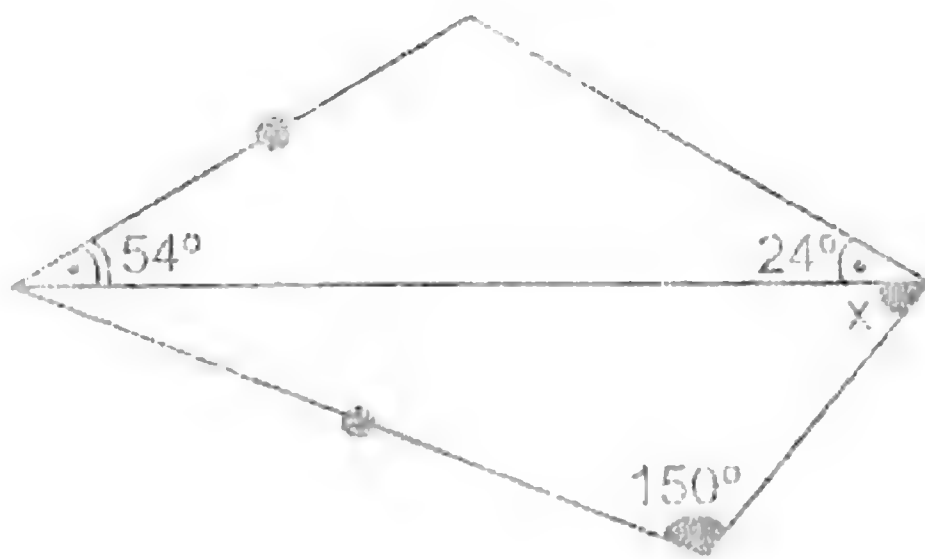
2. Calcular " x "

- A) 20°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 36°
- E) 54°



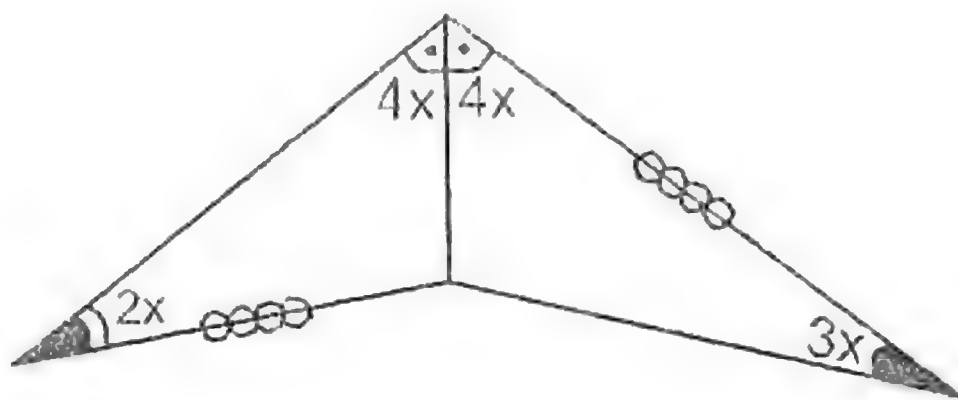
3. Calcular " x "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 11°
- D) 12°
- E) 15°



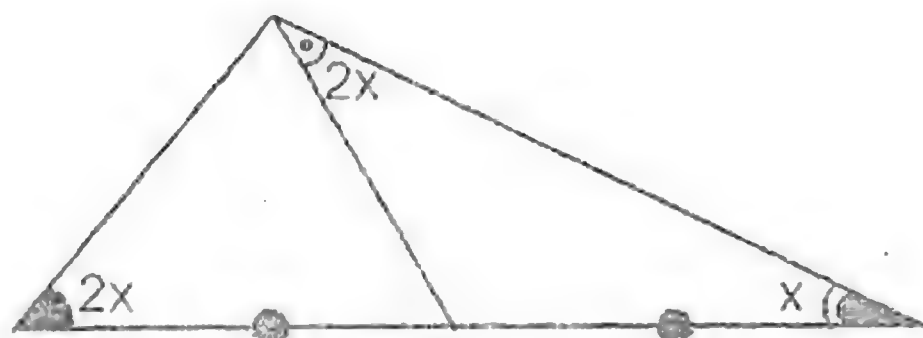
4. Calcular " x "

- A) 8°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



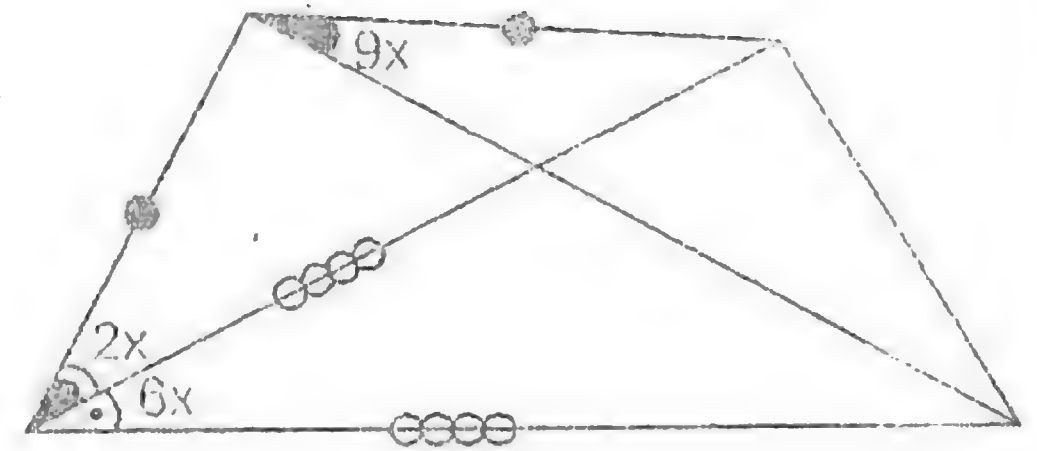
5. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



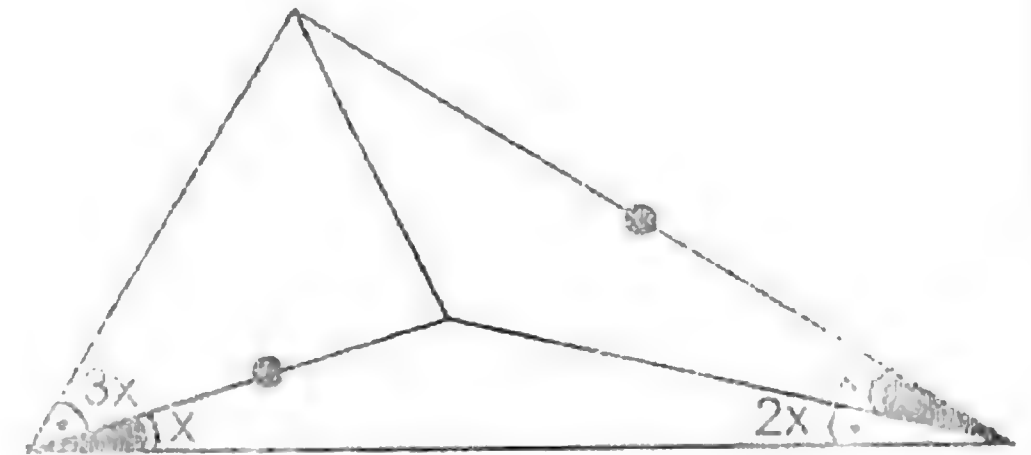
36. Calcular " x "

- A) 3°
- B) 6°
- C) 9°
- D) 10°
- E) 12°



37. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



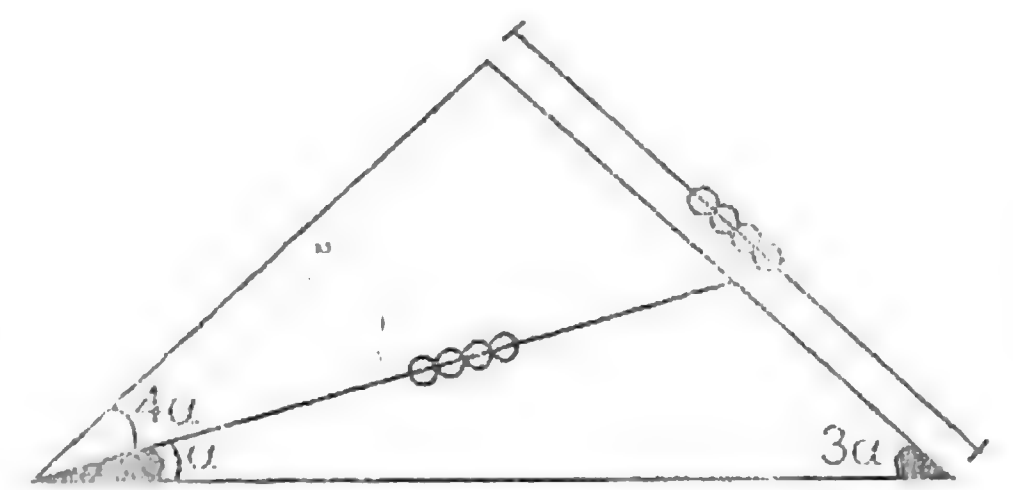
38. Calcular "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



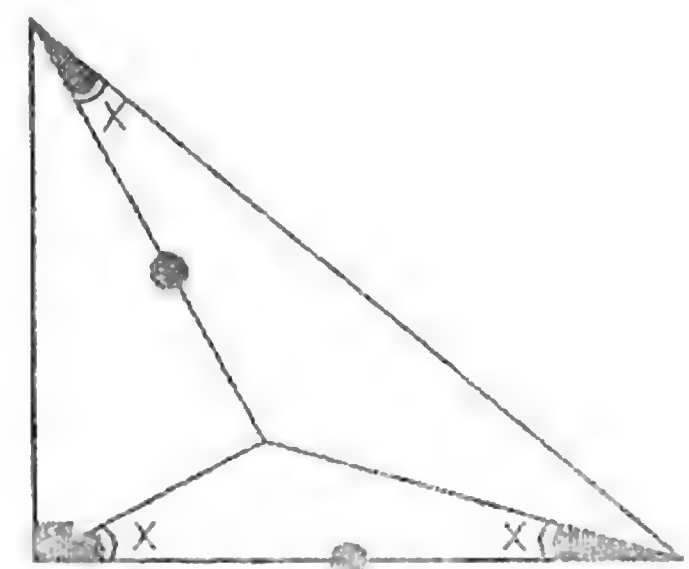
39. Calcular " α "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



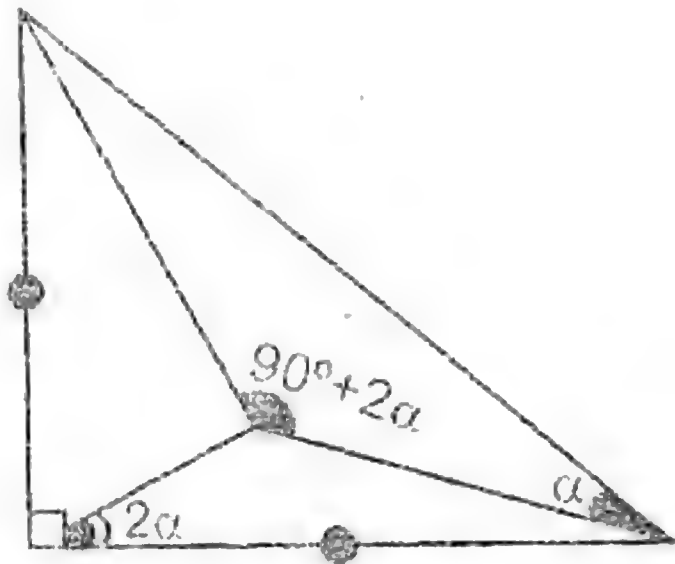
40. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) $22^\circ 30'$



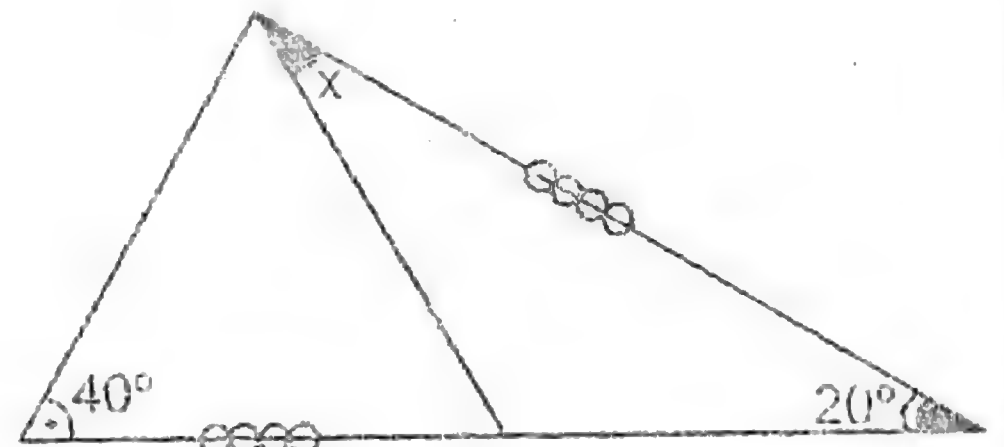
41. Calcular " α "

- A) 10°
- B) $22^\circ 30'$
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



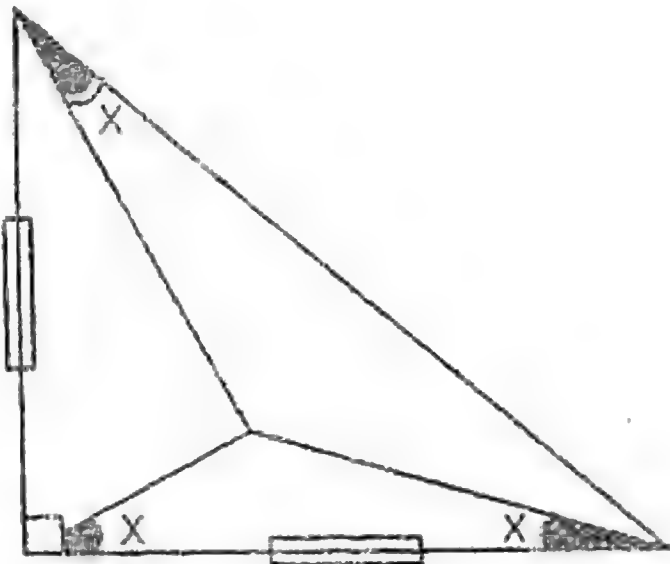
46. Calcular " x "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



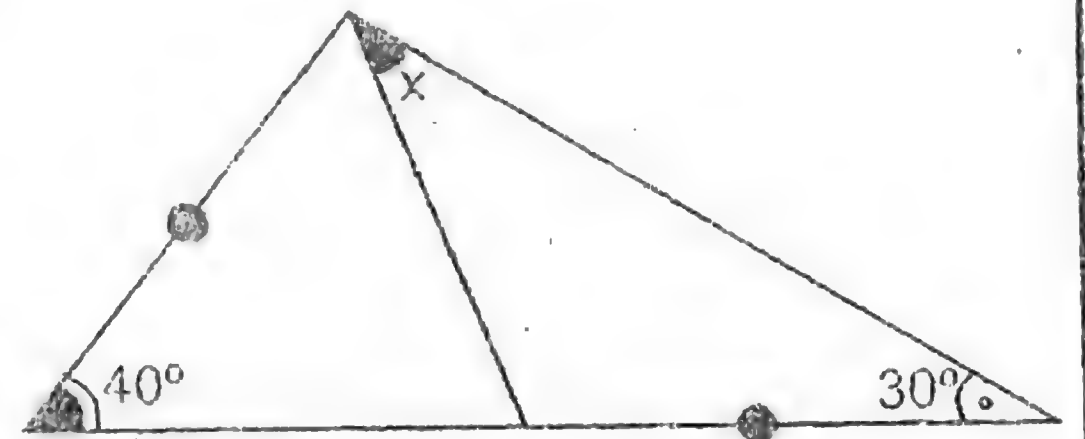
42. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 20°
- E) 24°



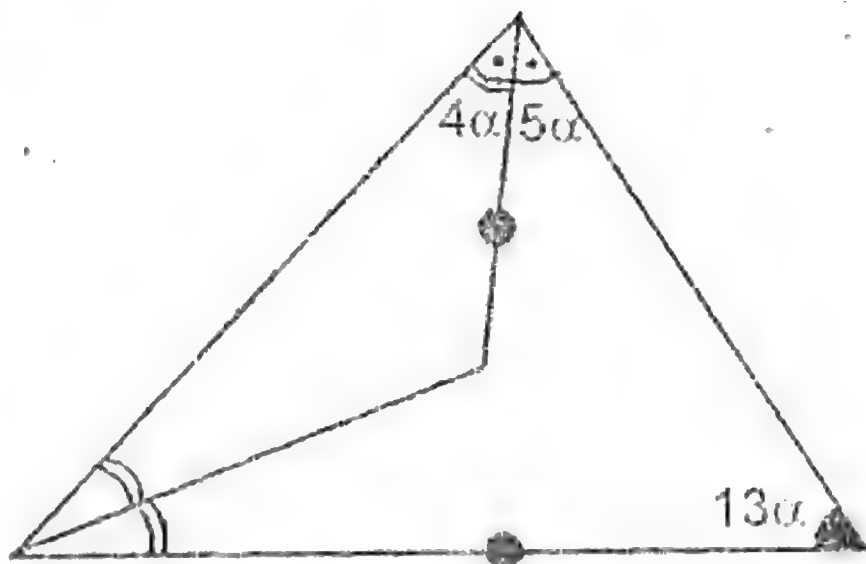
47. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 40°
- C) 45°
- D) 50°
- E) 54°



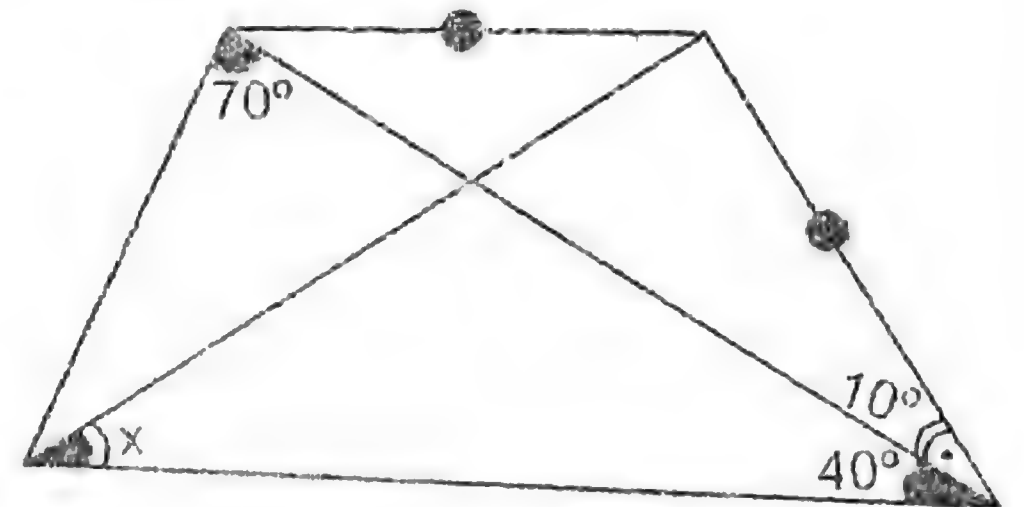
43. Calcular " α "

- A) 4°
- B) $4^\circ 30'$
- C) 5°
- D) $6^\circ 30'$
- E) 9°



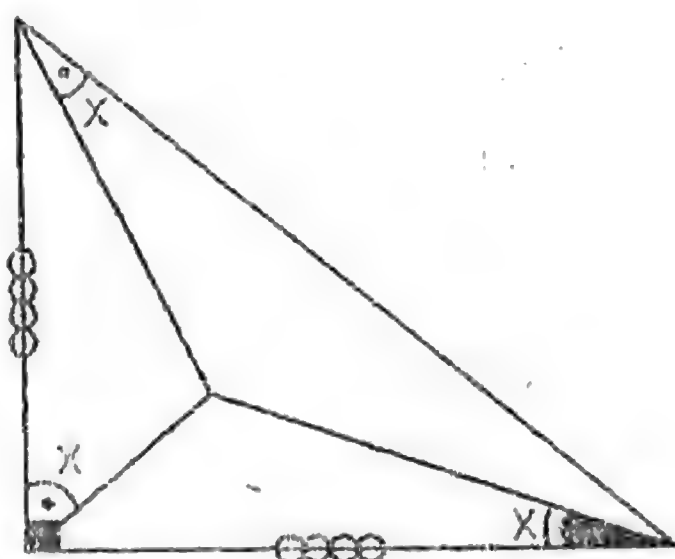
48. Calcular " x "

- A) 20°
- B) 24°
- C) 40°
- D) 30°
- E) 36°



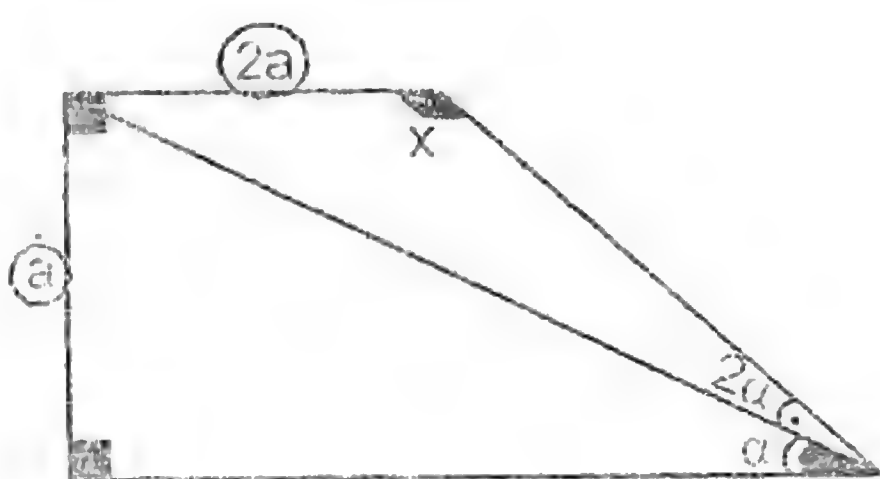
44. Calcular " x "

- A) $39^\circ/2$
- B) $53^\circ/2$
- C) 30°
- D) 37°
- E) 53°



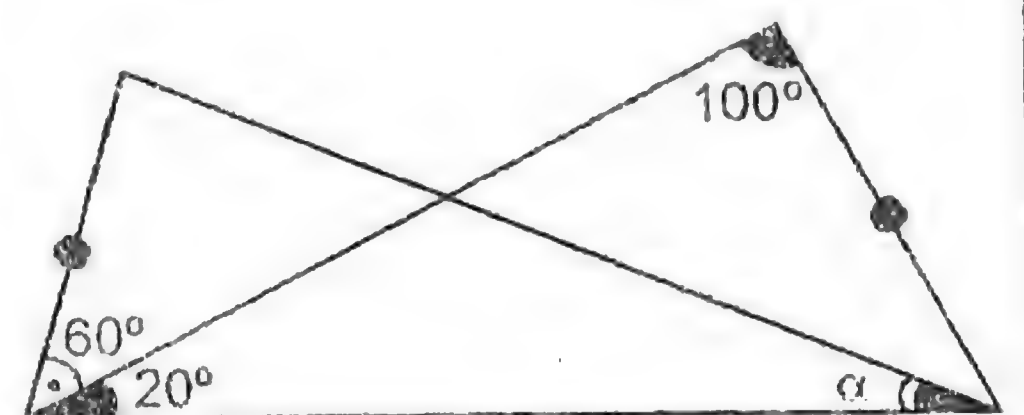
45. Calcular " x "

- A) 108°
- B) 112°
- C) $112^\circ 30'$
- D) 120°
- E) 135°



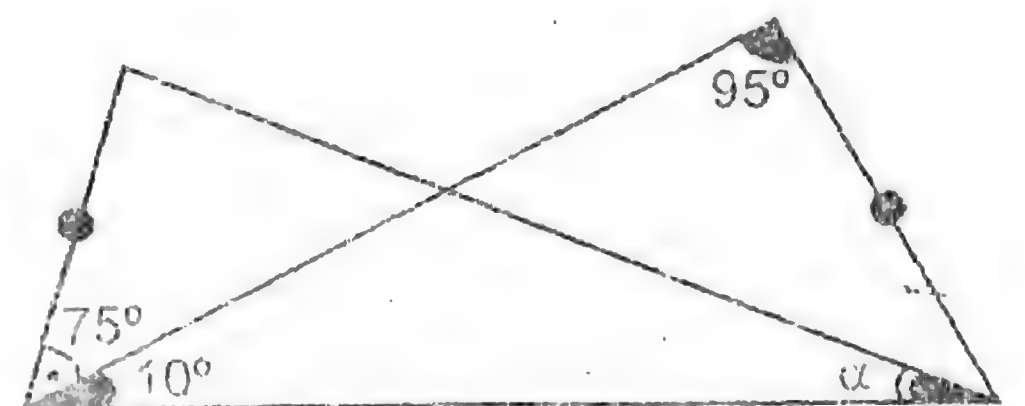
49. Calcular " α "

- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 30°



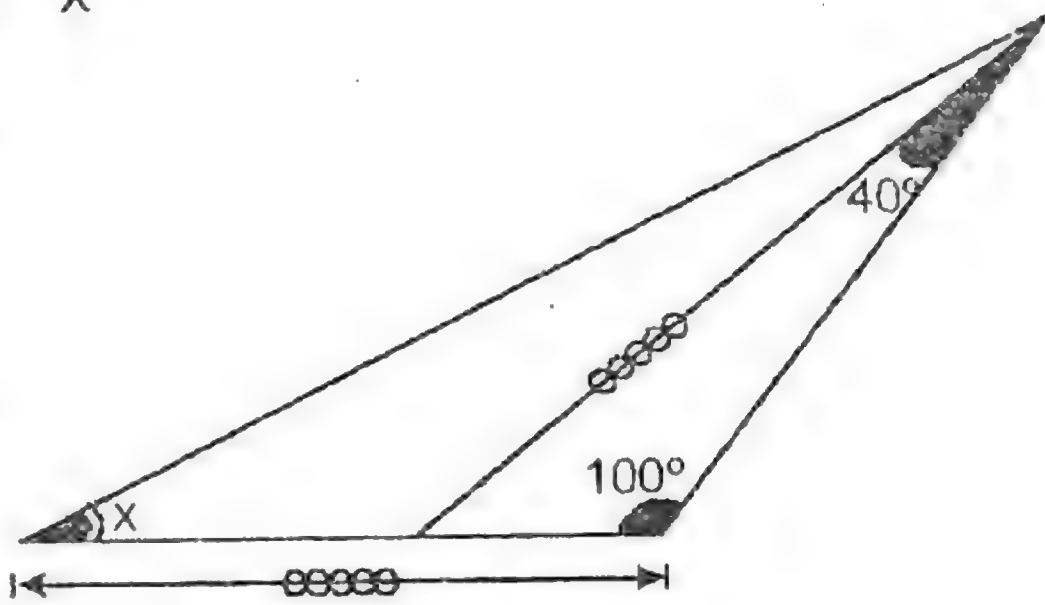
50. Calcular " α "

- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 30°
- E) 40°



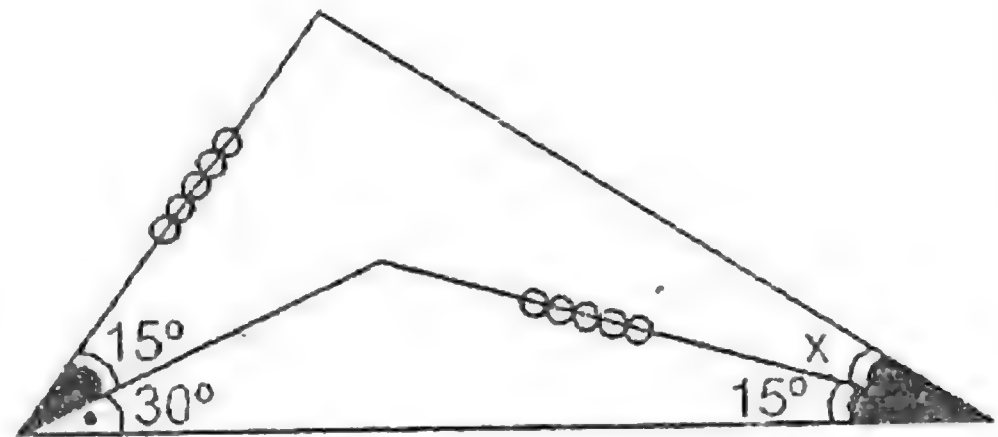
Calcular "x"

- A) 10°
- B) 20°
- C) 24°
- D) 30°
- E) 36°



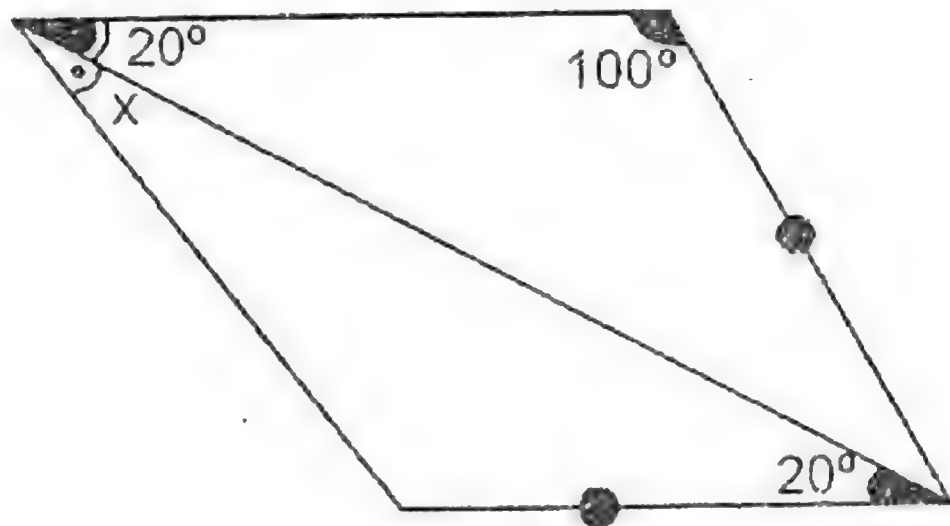
56. Calcular "x"

- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 45°
- E) 60°



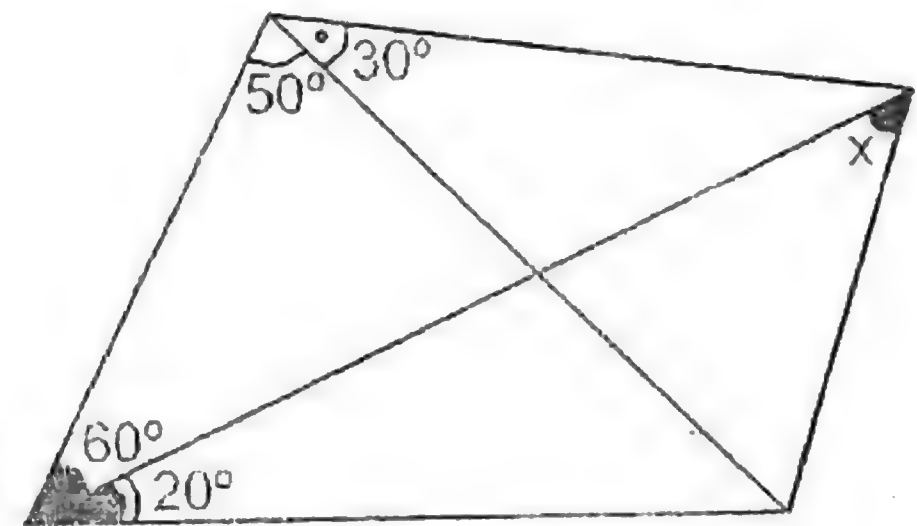
Calcular "x"

- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 30°



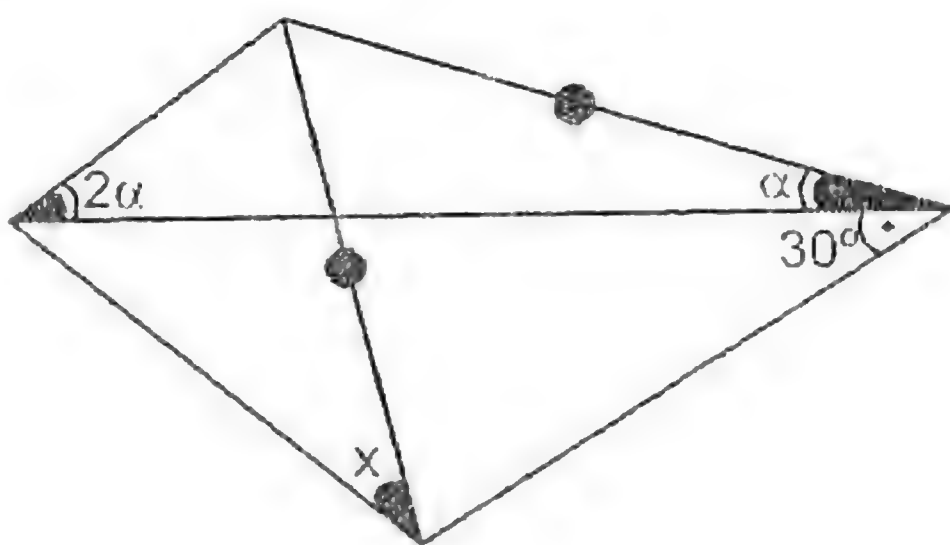
57. Calcular "x"

- A) 15°
- B) 20°
- C) 24°
- D) 30°
- E) 36°



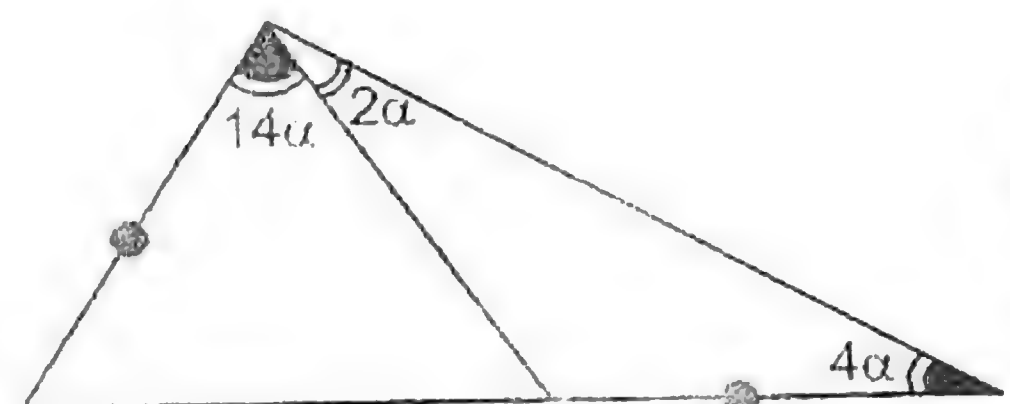
Calcular "x"

- A) 18°
- B) 24°
- C) 26°
- D) 30°
- E) 36°



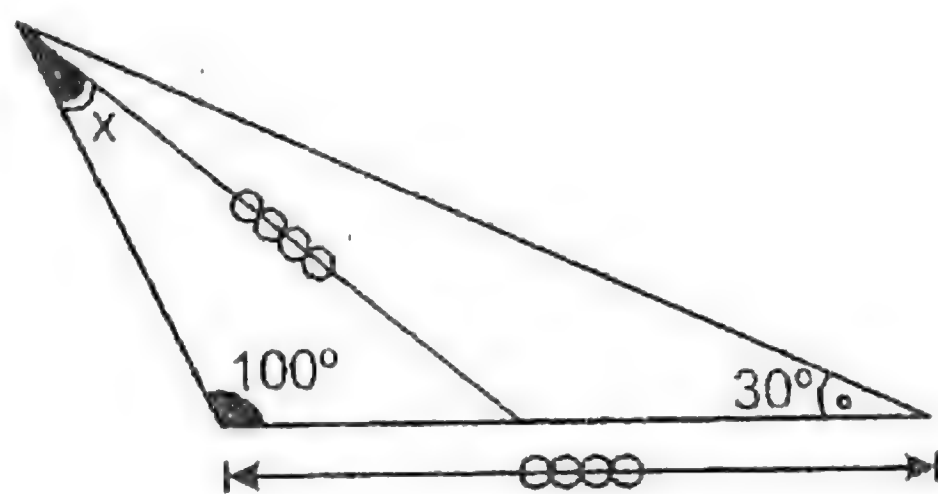
58. Calcular "alpha"

- A) 4°
- B) 5°
- C) 6°
- D) $7,5^\circ$
- E) 8°



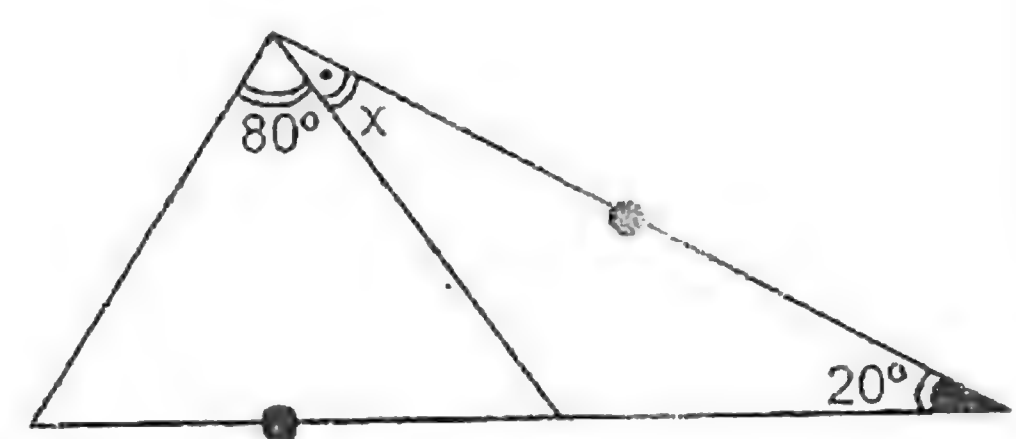
Calcular "x"

- A) 30°
- B) 32°
- C) 37°
- D) 15°
- E) 40°



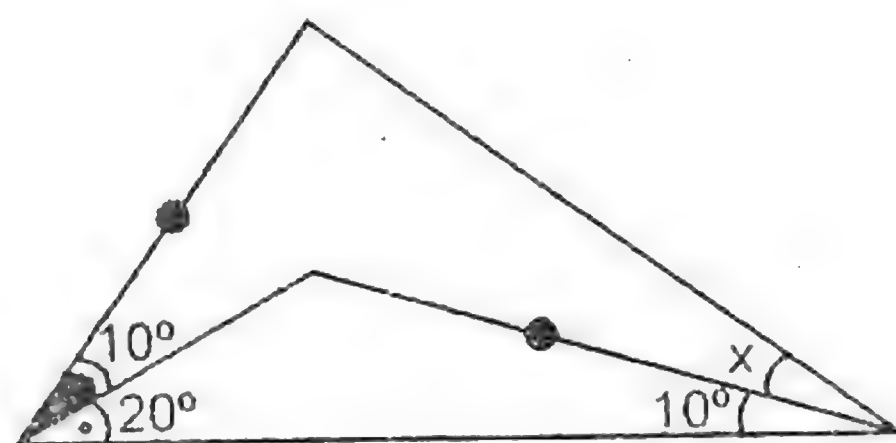
59. Calcular "x"

- A) 40°
- B) 50°
- C) 60°
- D) 70°
- E) 75°



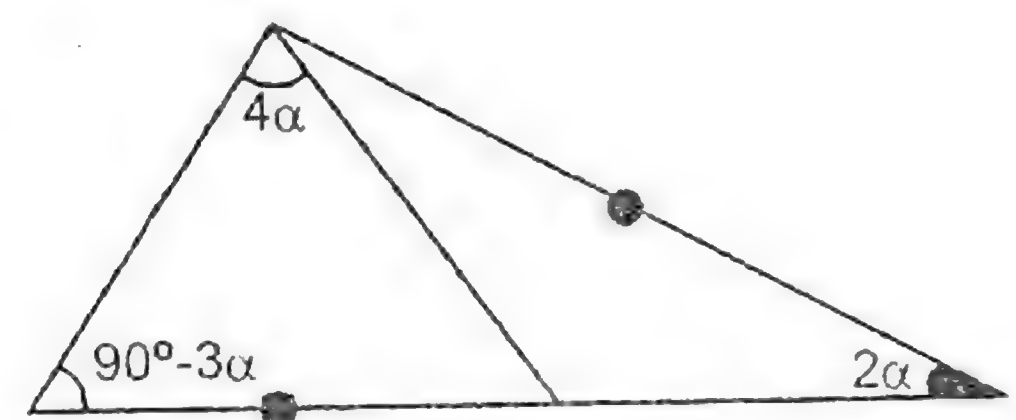
Calcular "x"

- A) 5°
- B) 8°
- C) 10°
- D) 15°
- E) 30°



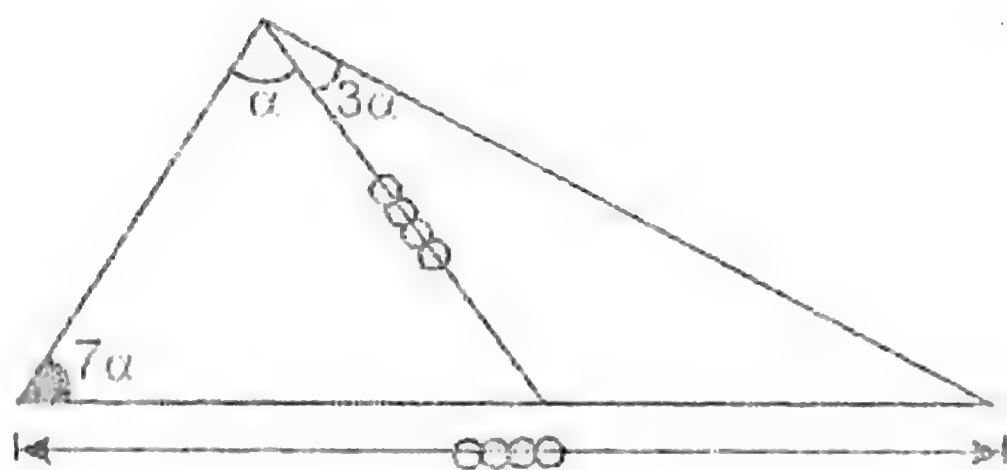
60. Calcular "alpha"

- A) 18°
- B) 16°
- C) 20°
- D) 22°
- E) 24°



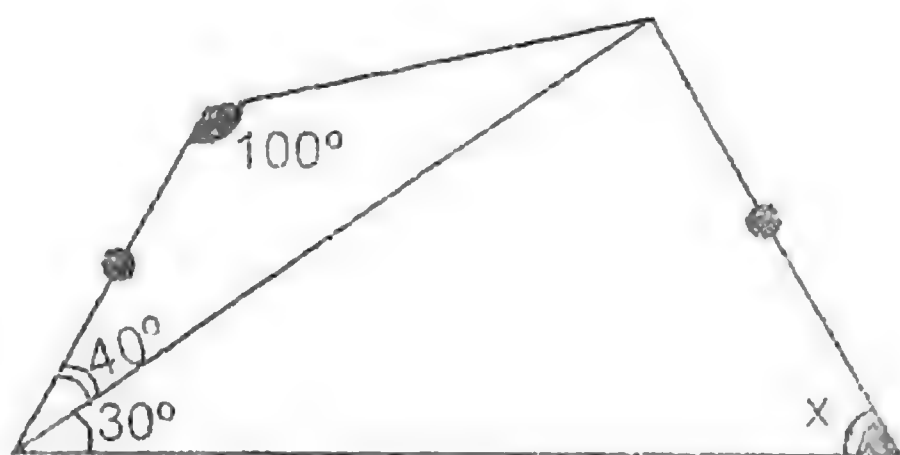
61. Calcular " α "

- A) 8°
- B) 9°
- C) 10°
- D) 12°
- E) 15°



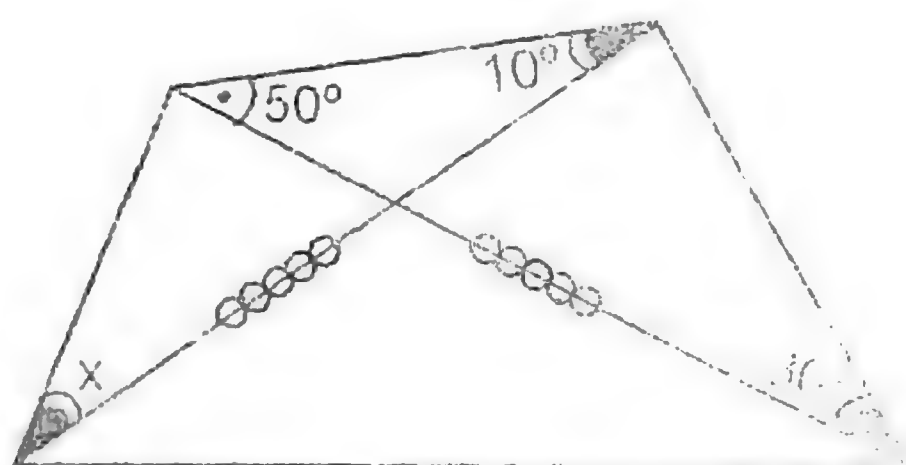
62. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 45°
- C) 50°
- D) 55°
- E) 60°



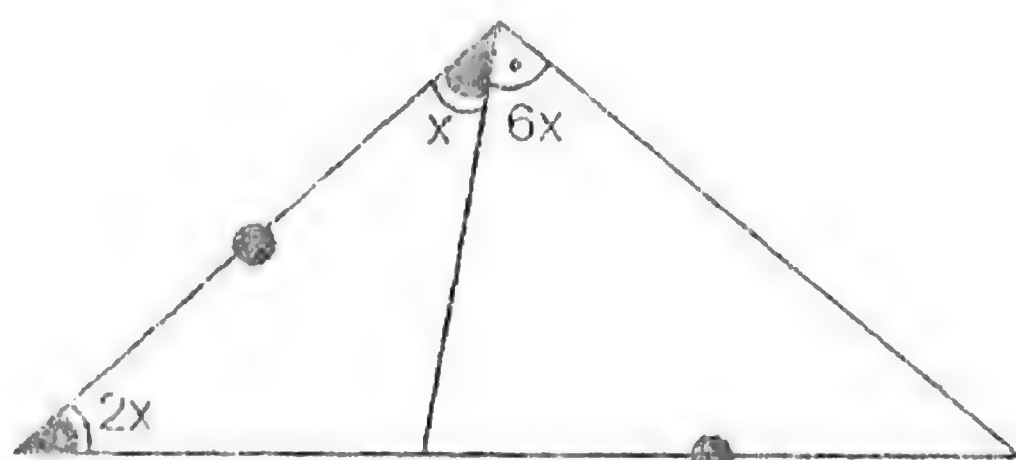
63. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 30°



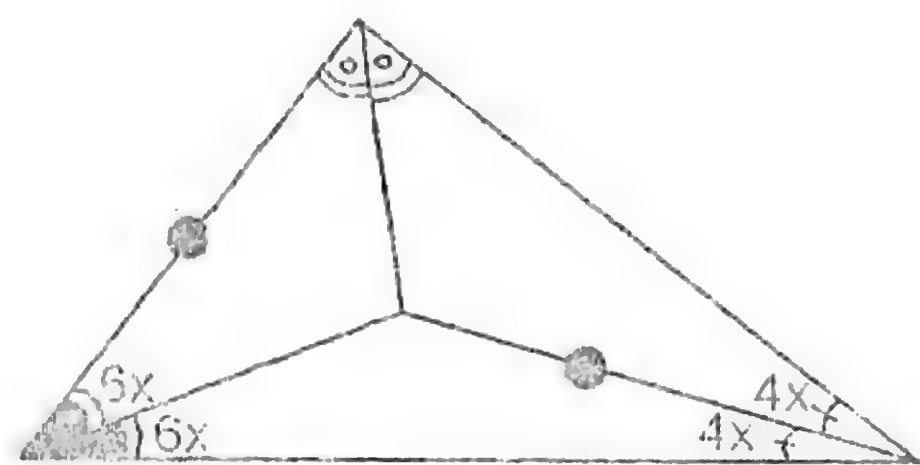
64. Calcular " x "

- A) 15°
- B) 8°
- C) 10°
- D) 12°
- E) 6°



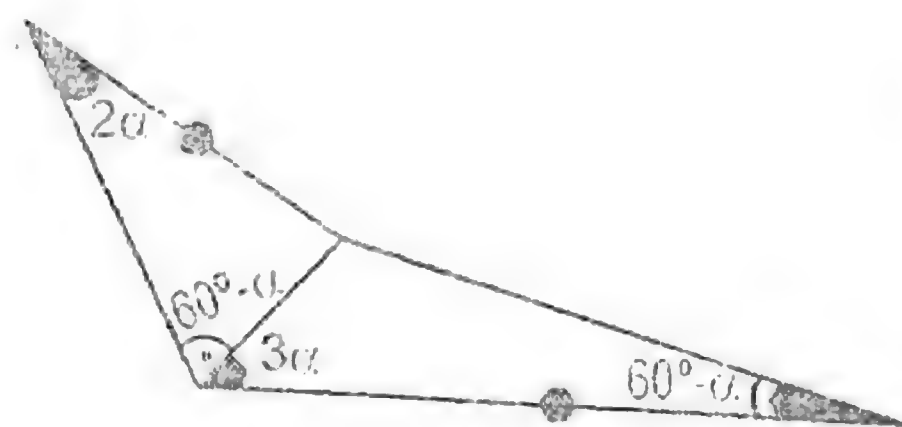
65. Calcular " x "

- A) 4°
- B) 5°
- C) $4,8^\circ$
- D) $5,5^\circ$
- E) 6°



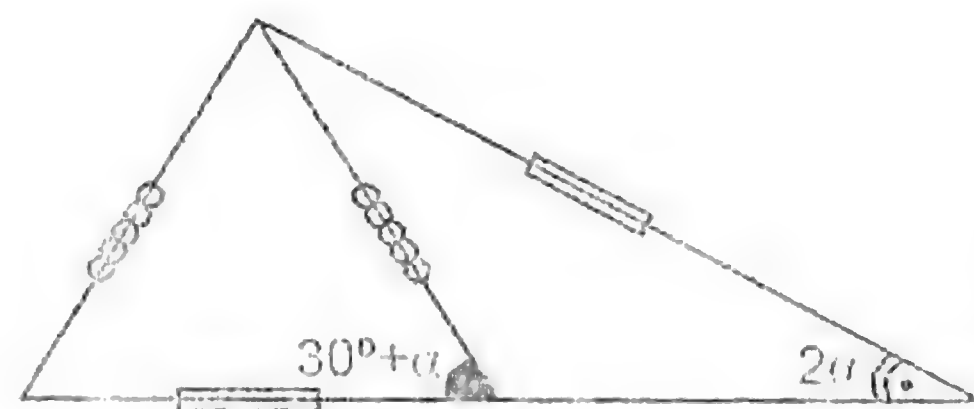
66. Calcular " α "

- A) $7^\circ 30'$
- B) 10°
- C) 15°
- D) 5°
- E) 30°



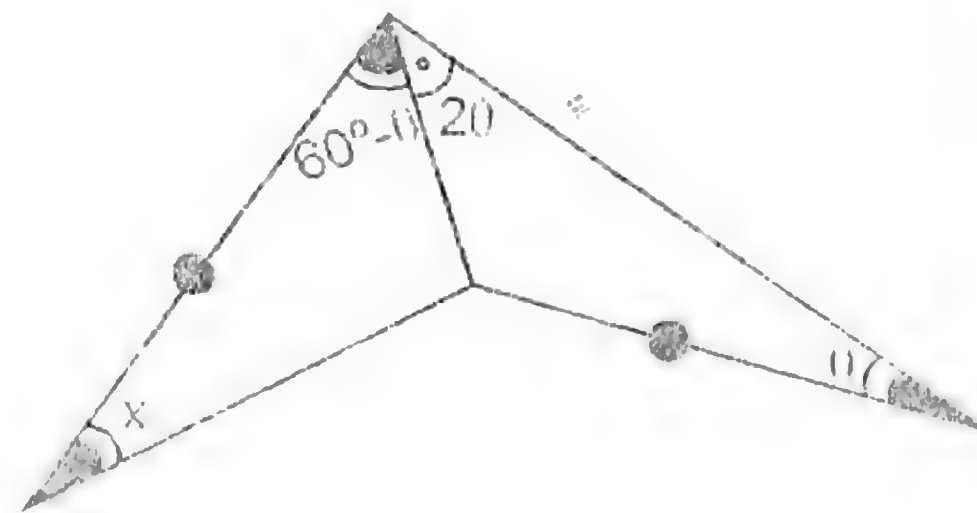
67. Calcular " α "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



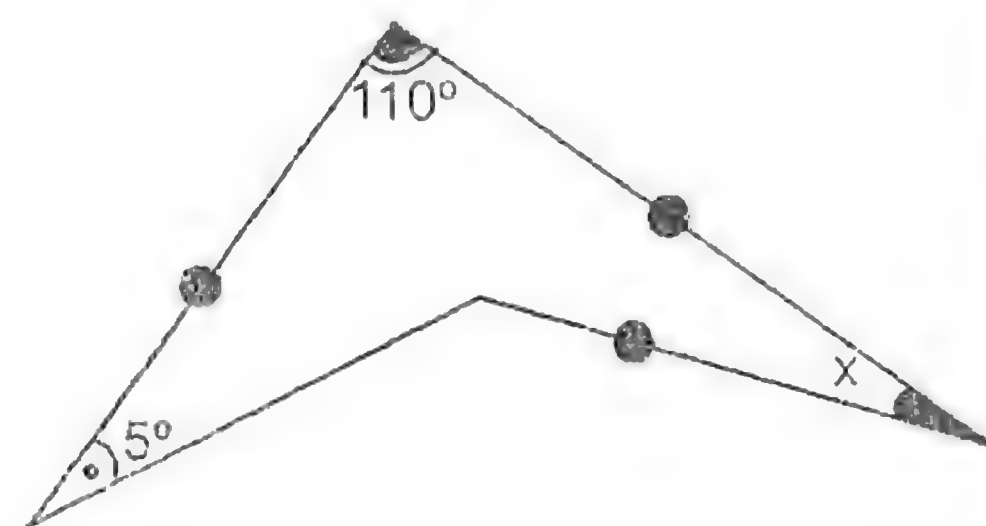
68. Calcular " x "

- A) $30^\circ - 0$
- B) 30°
- C) $30^\circ + 0$
- D) 20°
- E) 40°



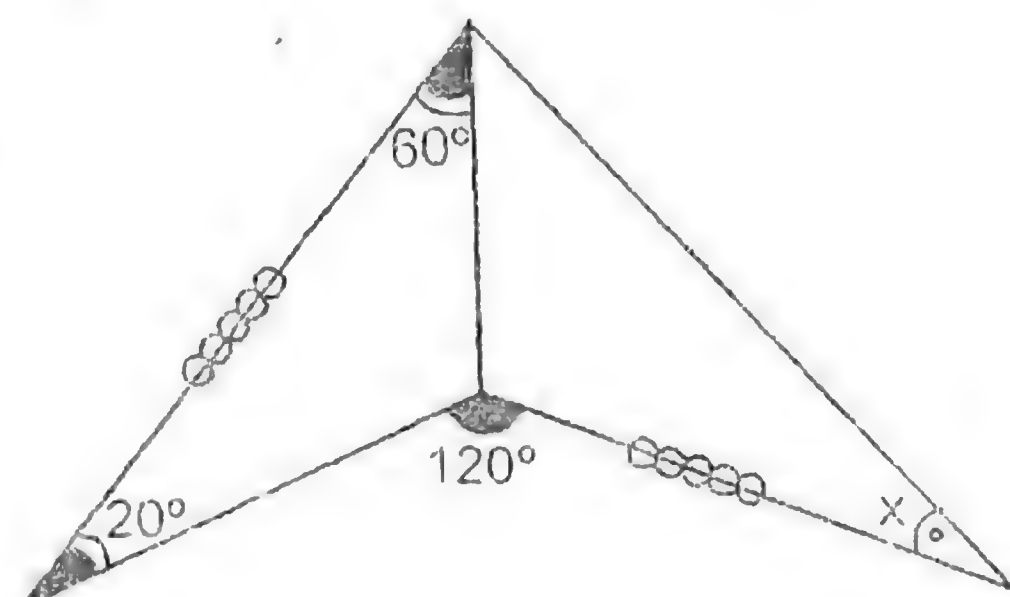
69. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



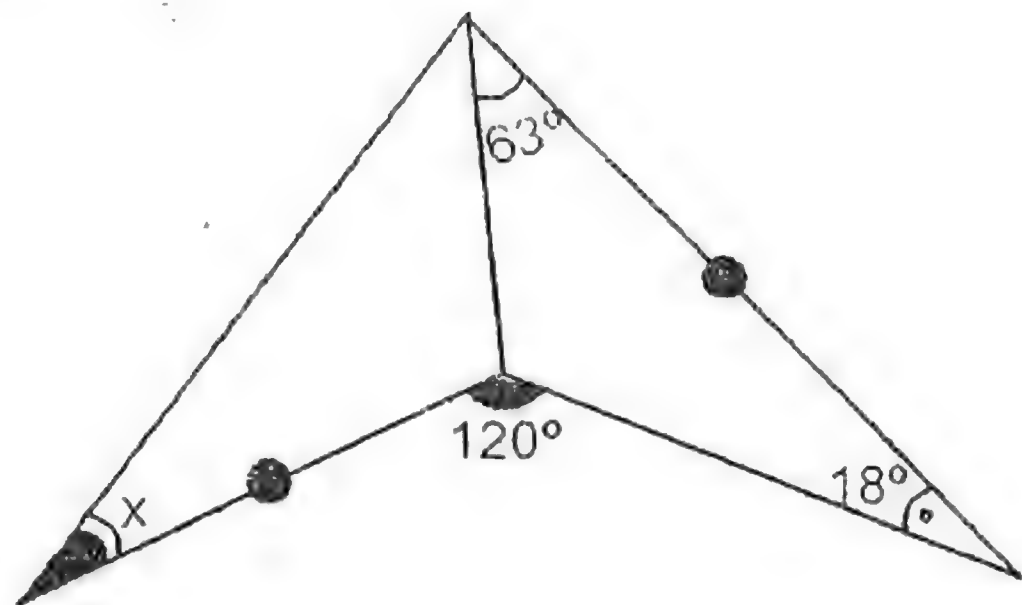
70. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 5°
- E) 15°



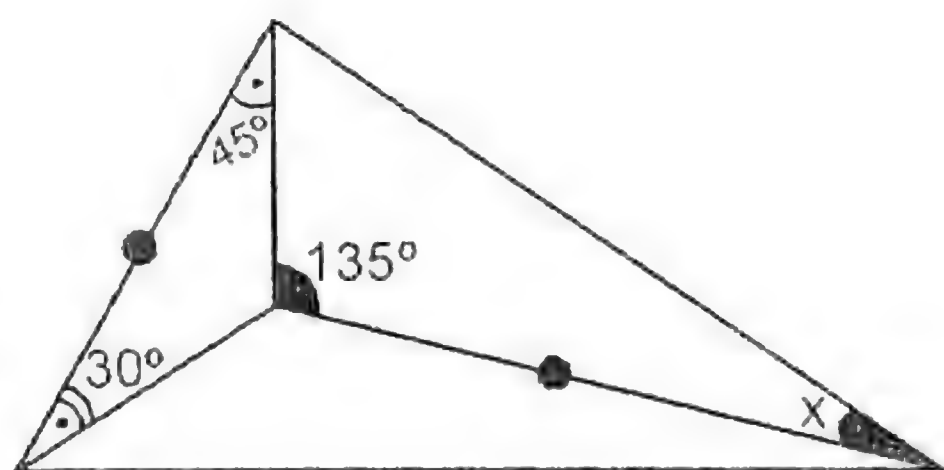
71. Calcular "x"

- A) 6°
- B) 7°
- C) 8°
- D) 9°
- E) 10°



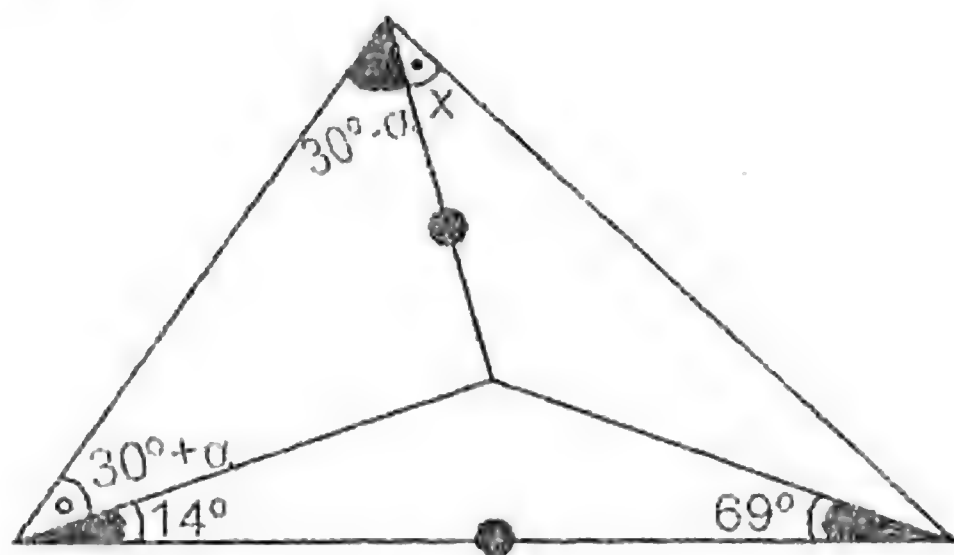
72. Calcular "x"

- A) 15°
- B) $12^\circ 30'$
- C) $22^\circ 30'$
- D) $18^\circ 30'$
- E) 30°



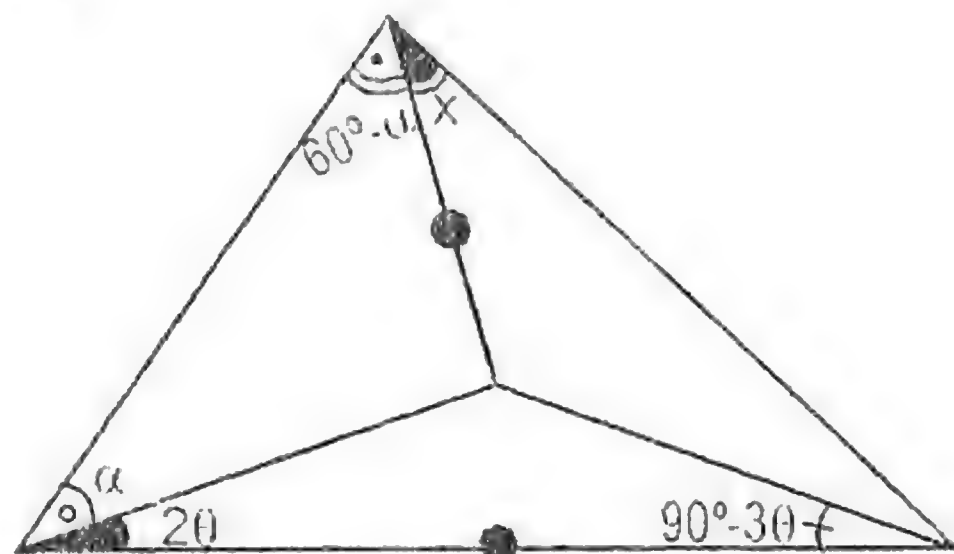
73. Calcular "x"

- A) 3°
- B) 6°
- C) 7°
- D) 9°
- E) 13



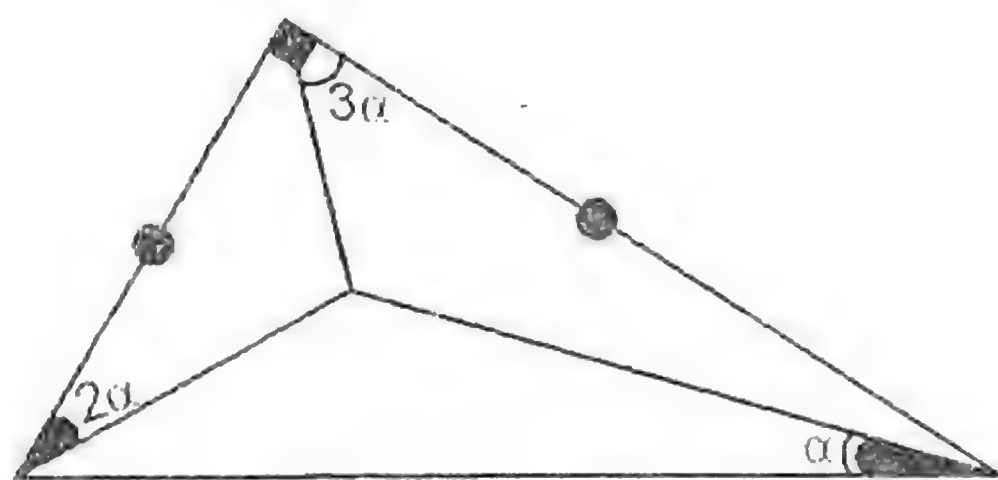
74. Calcular "x"

- A) 10°
- B) 15°
- C) 18°
- D) α
- E) θ



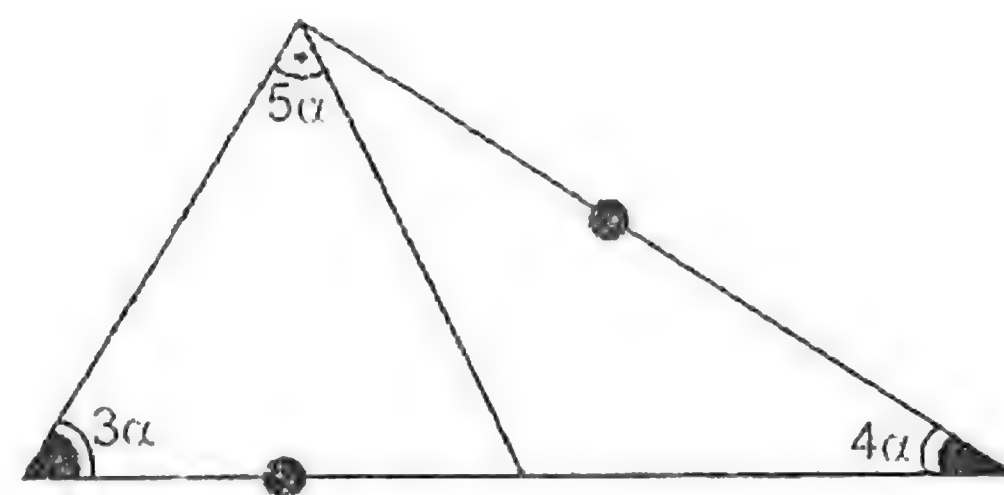
75. Calcular "x"

- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 20°



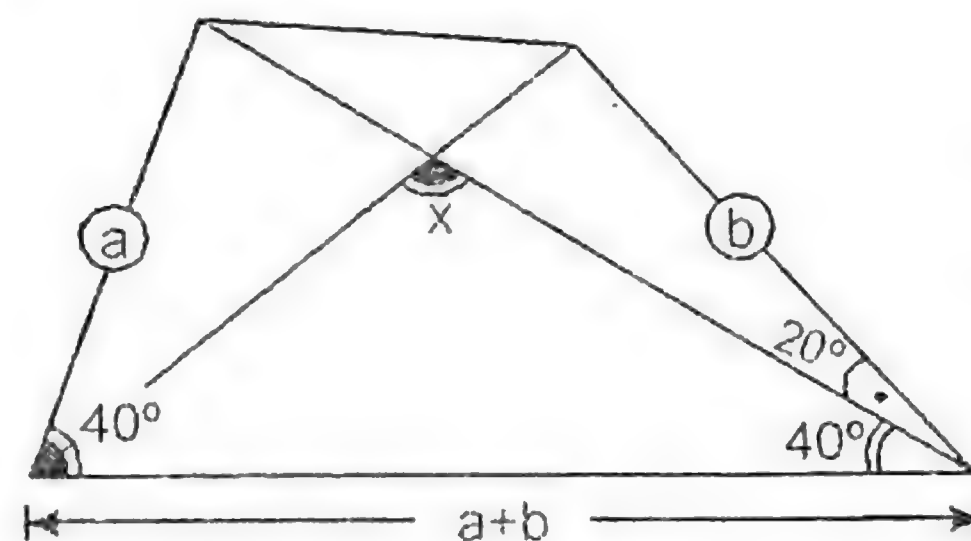
76. Calcular "α"

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



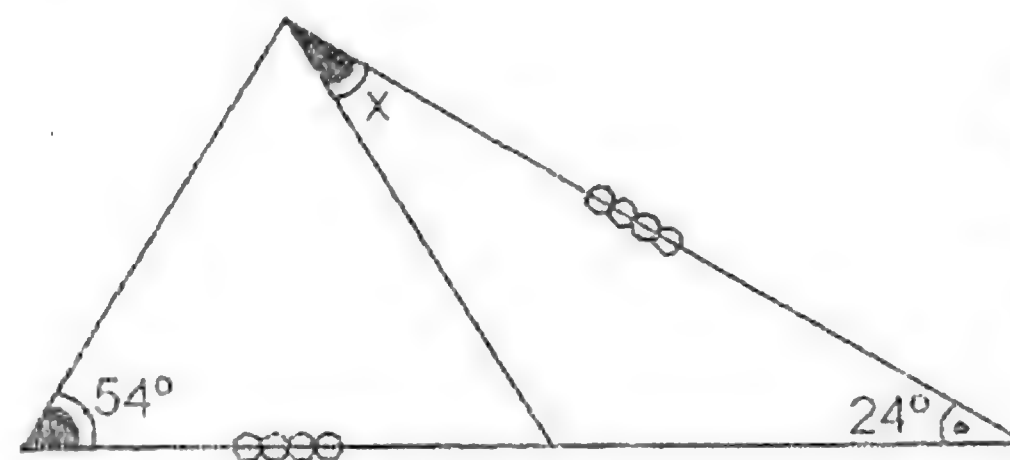
77. Calcular "α"

- A) 100°
- B) 110°
- C) 120°
- D) 130°
- E) 135°



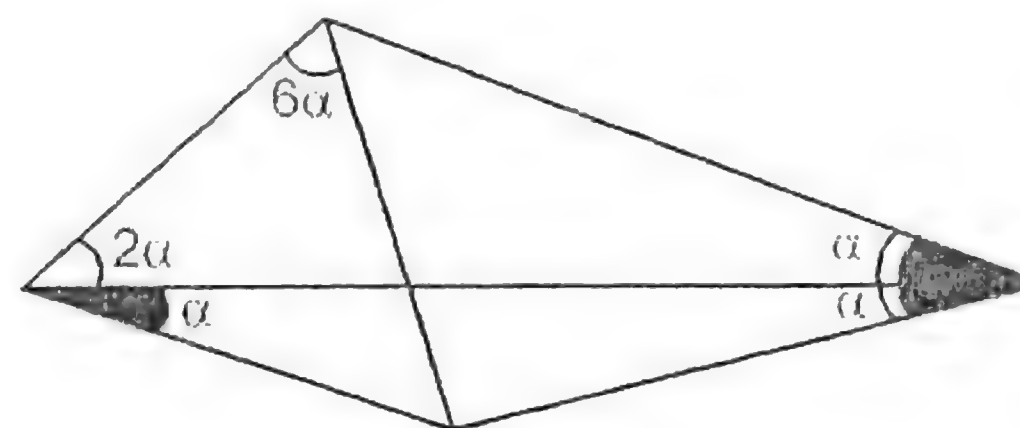
78. Calcular "x"

- A) 5°
- B) 6°
- C) 12°
- D) 16°
- E) 18°



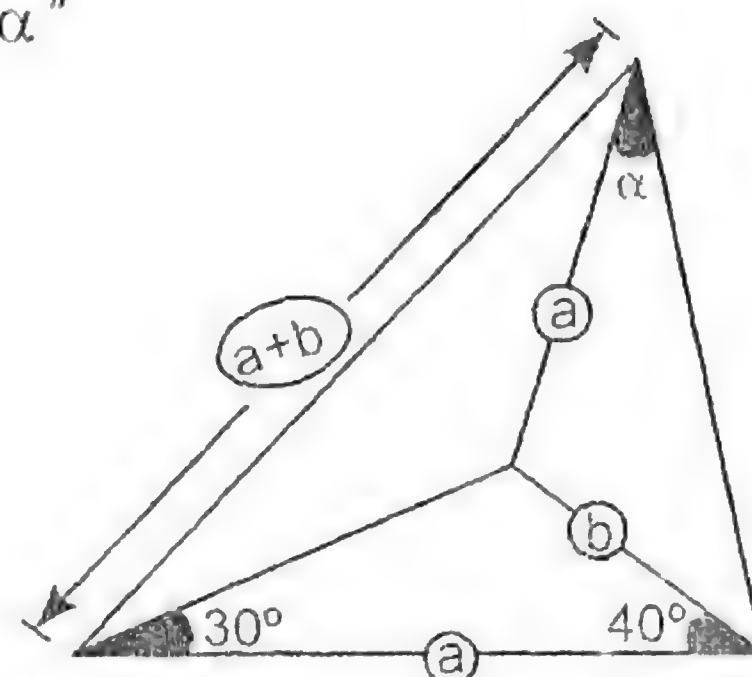
79. Calcular "α"

- A) 10°
- B) 12
- C) 15°
- D) 16°
- E) 18°



80. Calcular "α"

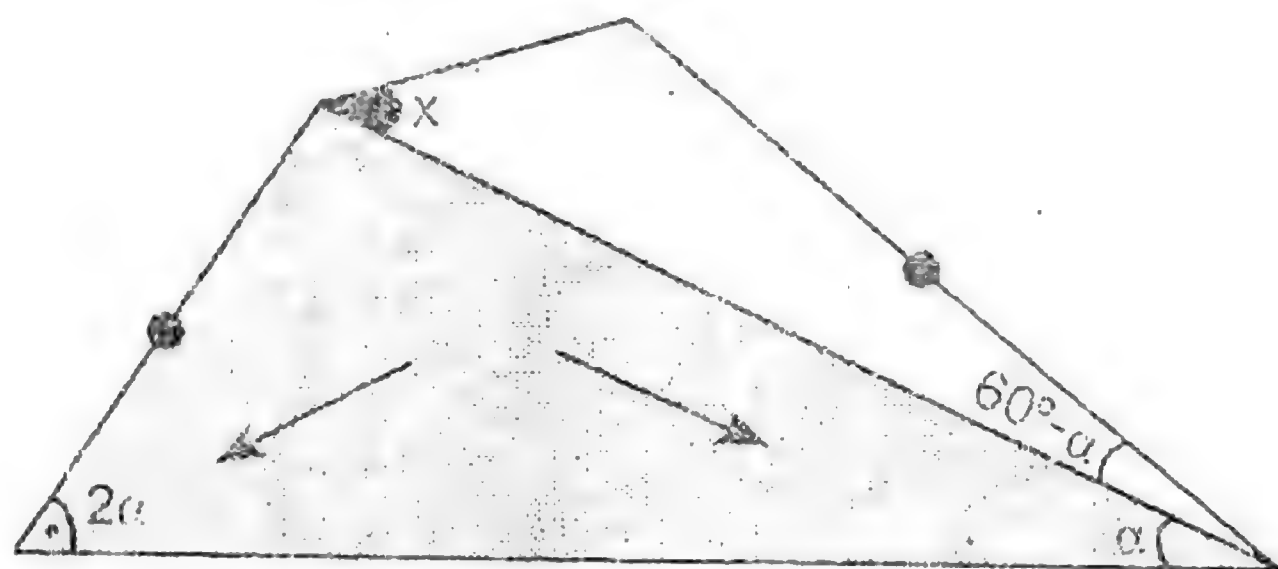
- A) 10°
- B) 15°
- C) 18°
- D) 20°
- E) 24°



Problemas Resueltos

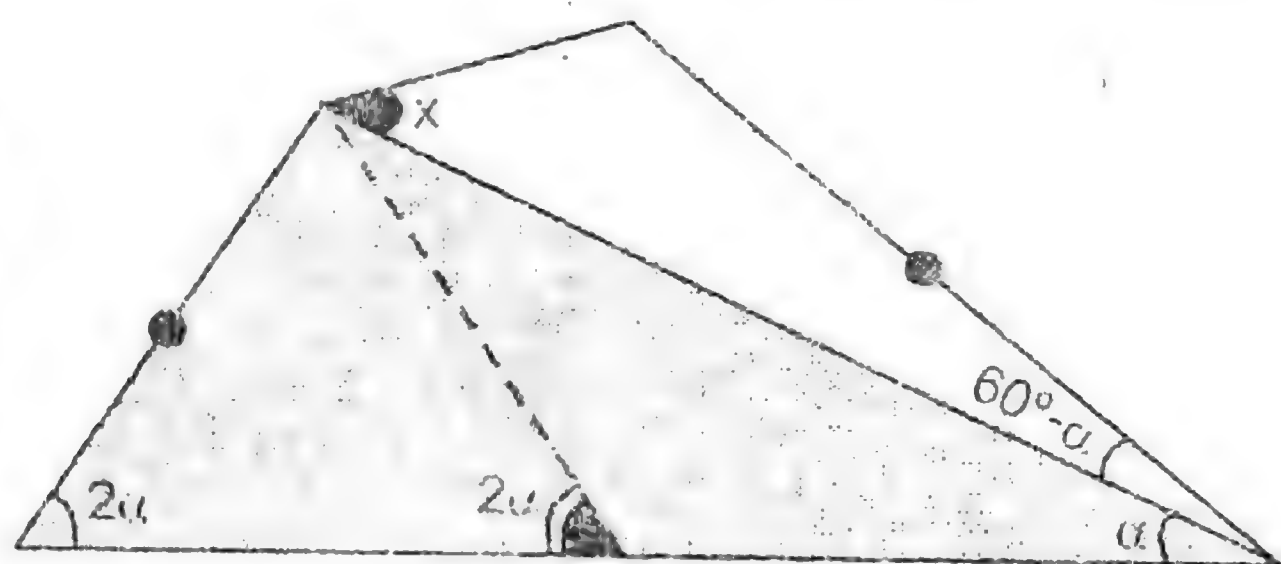
Solución N° 1

Observamos en el gráfico que hay un triángulo que tiene 2 ángulos interiores en la relación de 1 a 2.



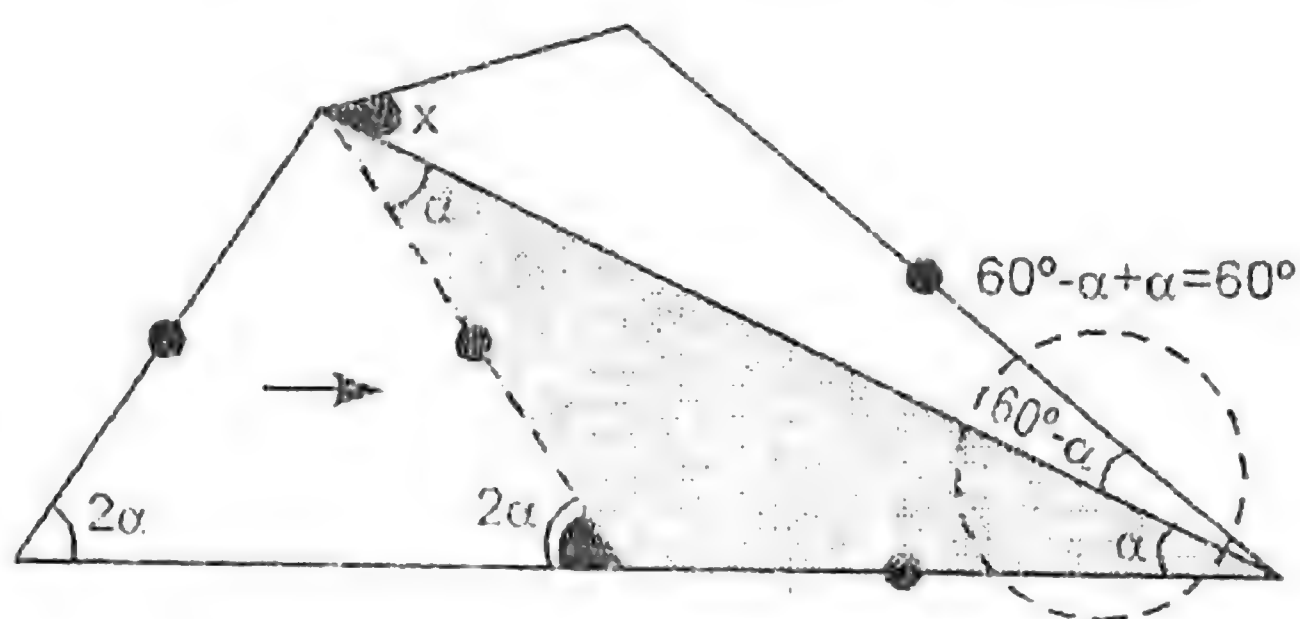
Paso N° 1

Entonces aplicamos el primer criterio de construcción: trazamos la ceviana interna.

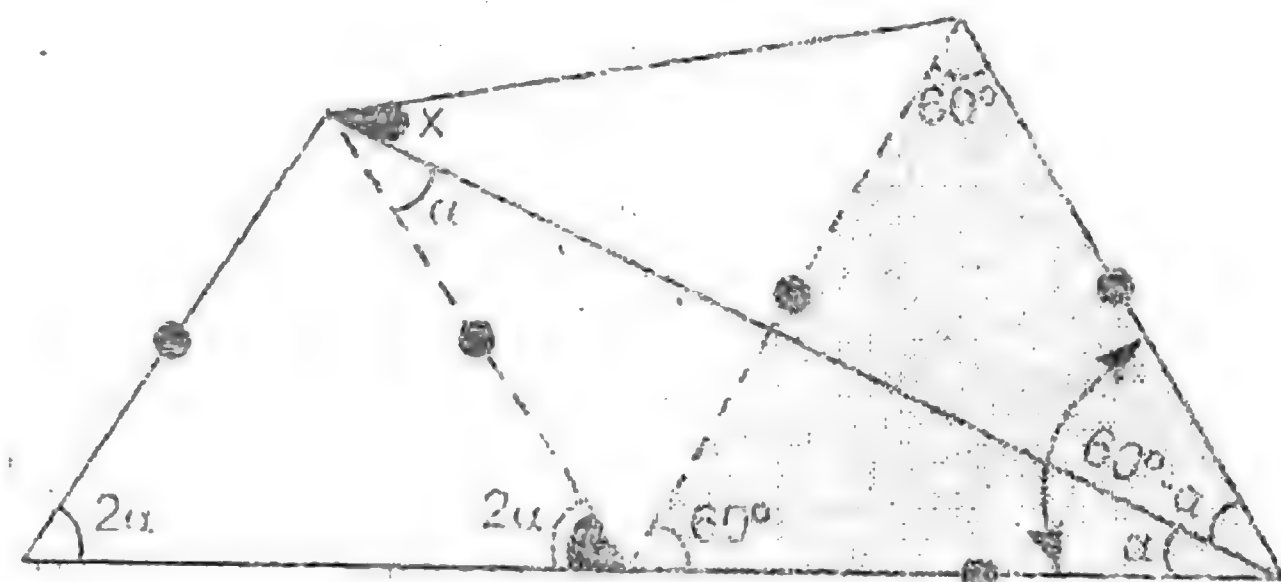


Paso N° 2

Ahora completamos los ángulos internos y se observa que se tiene triángulos isosceles.

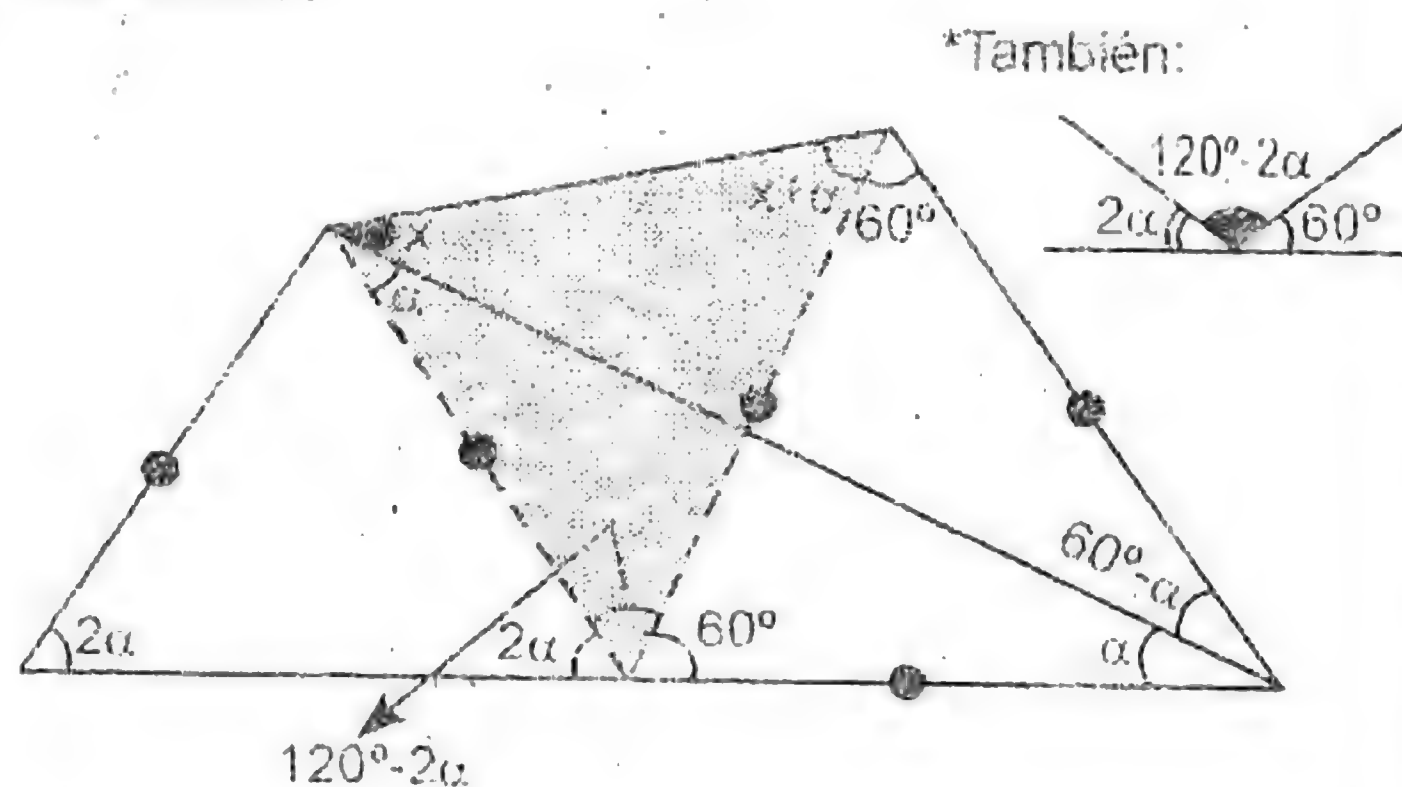


Paso N° 3: Se observa un ángulo de 60° y lados iguales, entonces buscamos el triángulo equilátero de la siguiente manera:



Paso N° 4

Se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.



Paso N° 5: Finalmente en la figura sombreada se cumple:

$$(x+\alpha) + (x+\alpha) + 120^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

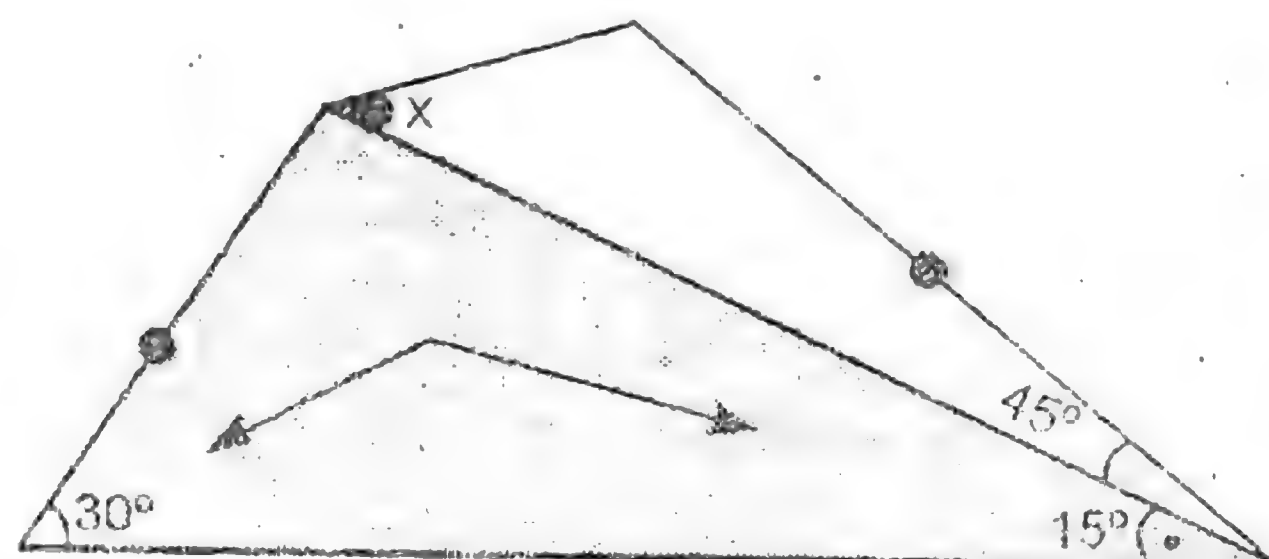
$$2x + 2\alpha + 120^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

$$2x = 60^\circ$$

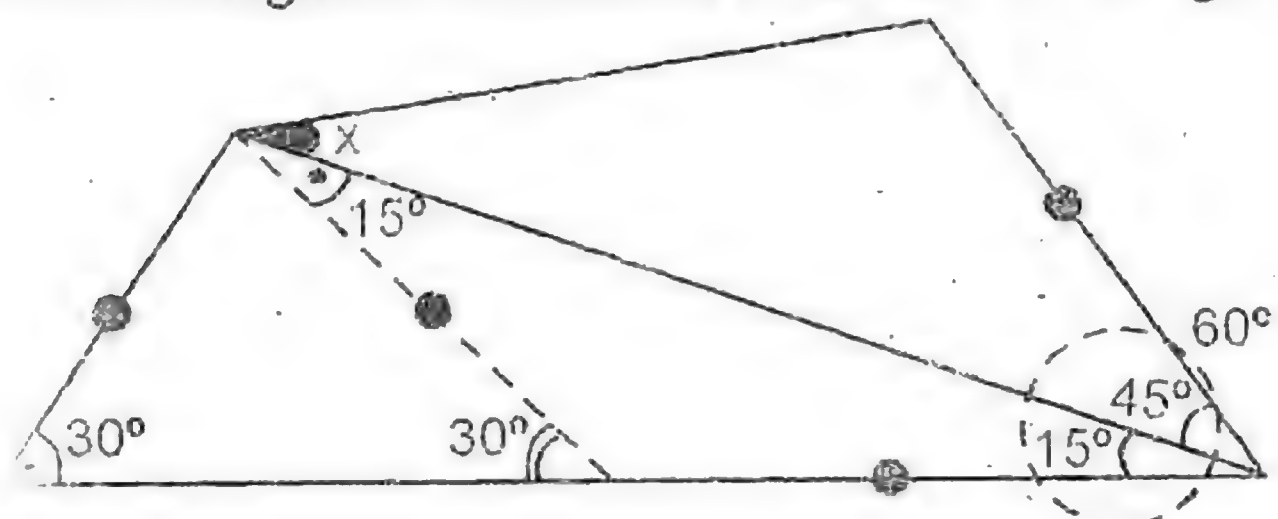
$$x = 30^\circ$$

Solución N° 2

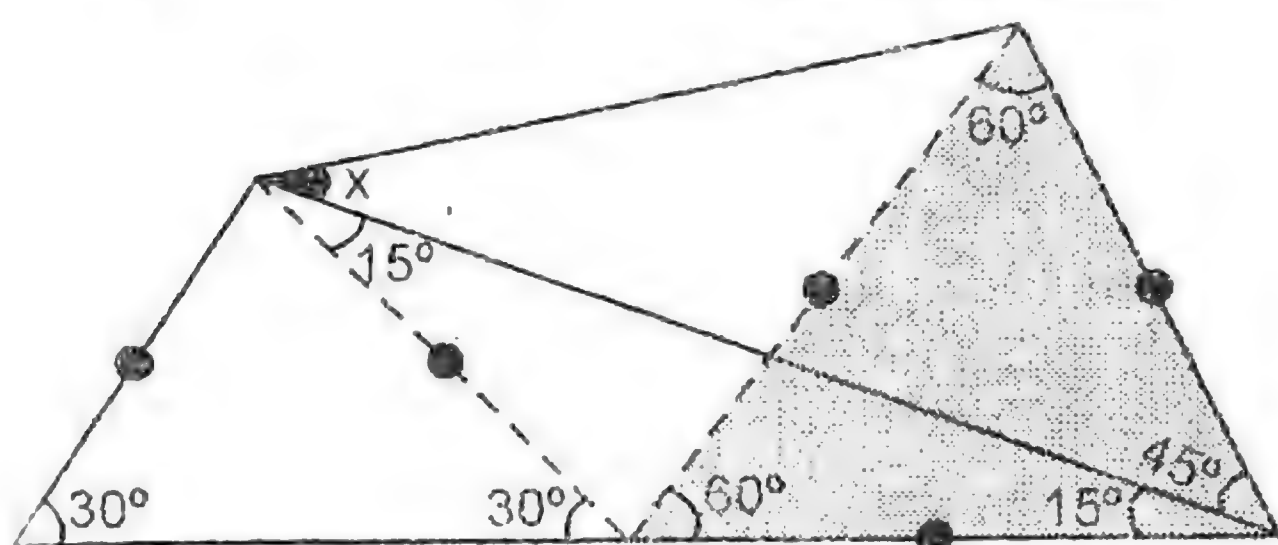
Se observa 2 ángulos interiores en la relación de 1 y 2



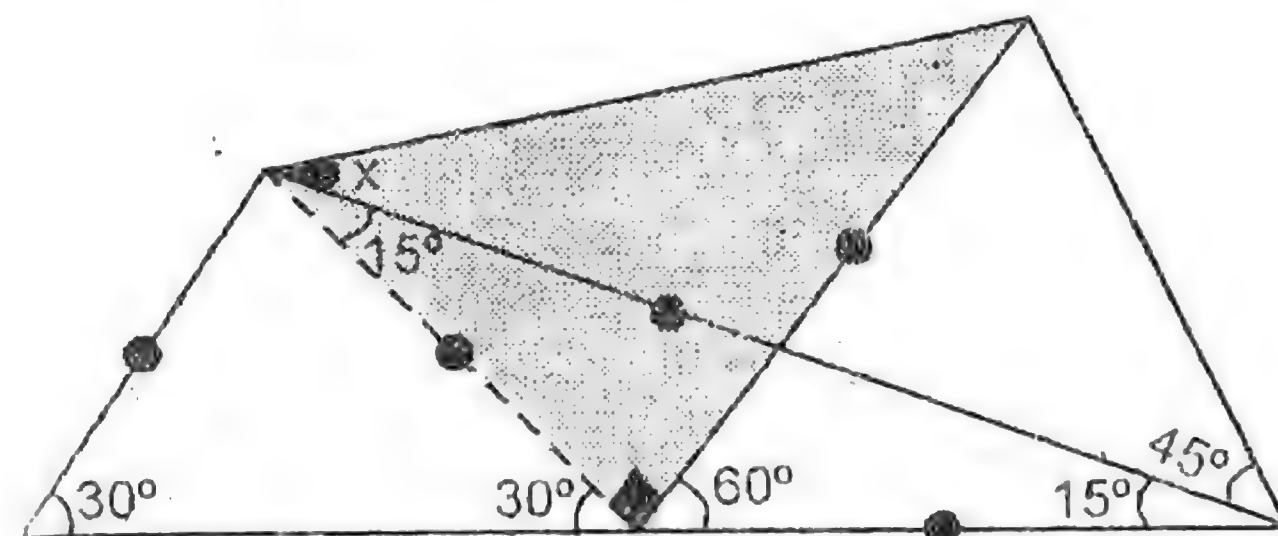
Paso N°1: Aplicamos el primer Criterio para formar triángulos isósceles internos en la figura.



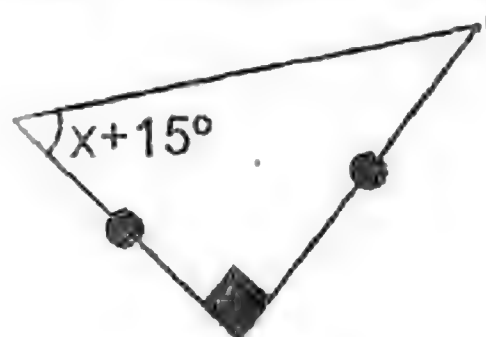
Paso N°2: Se observa que se tiene un triángulo equilátero



Paso N° 3: Luego se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.



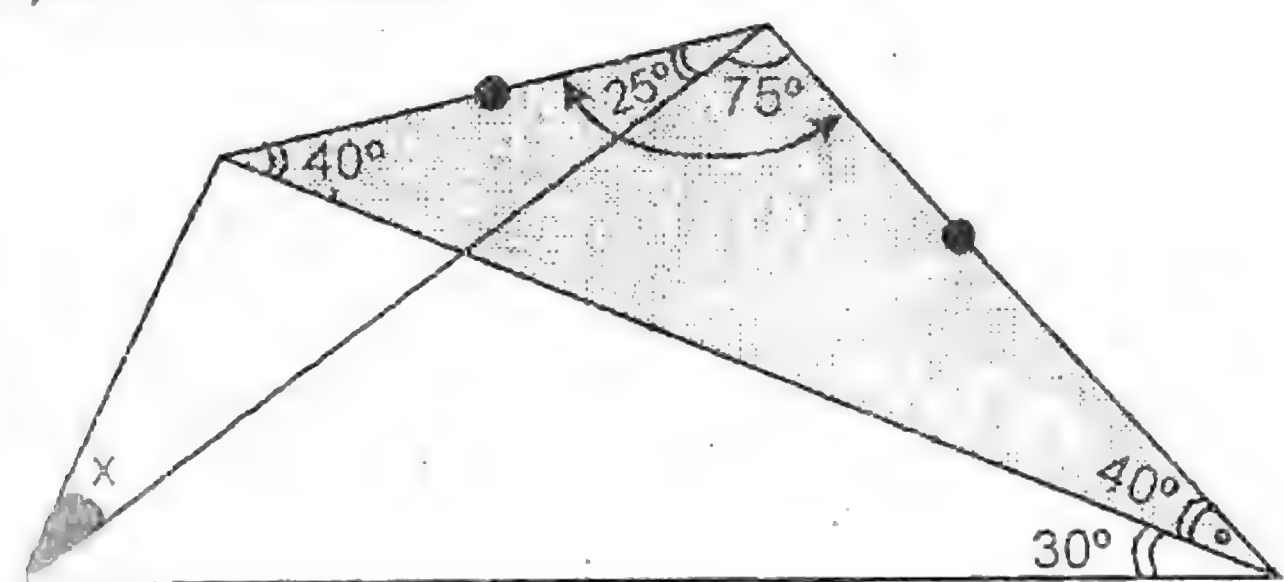
Paso N° 4: Se observa que la figura sombreada es un triángulo rectángulo isósceles de 45°.



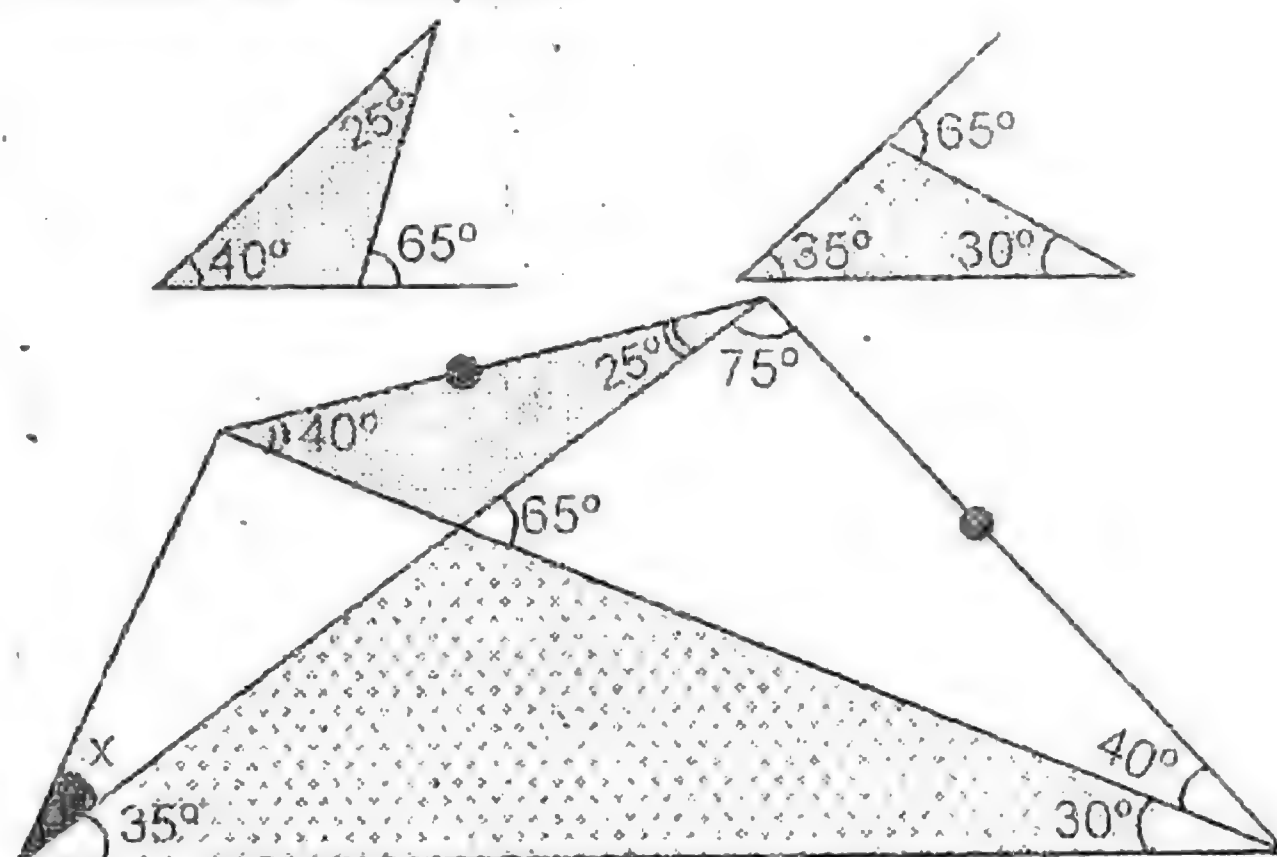
$$\begin{aligned} \therefore x + 15^\circ &= 45^\circ \\ \Rightarrow x &= 30^\circ \end{aligned}$$

Solución N°3

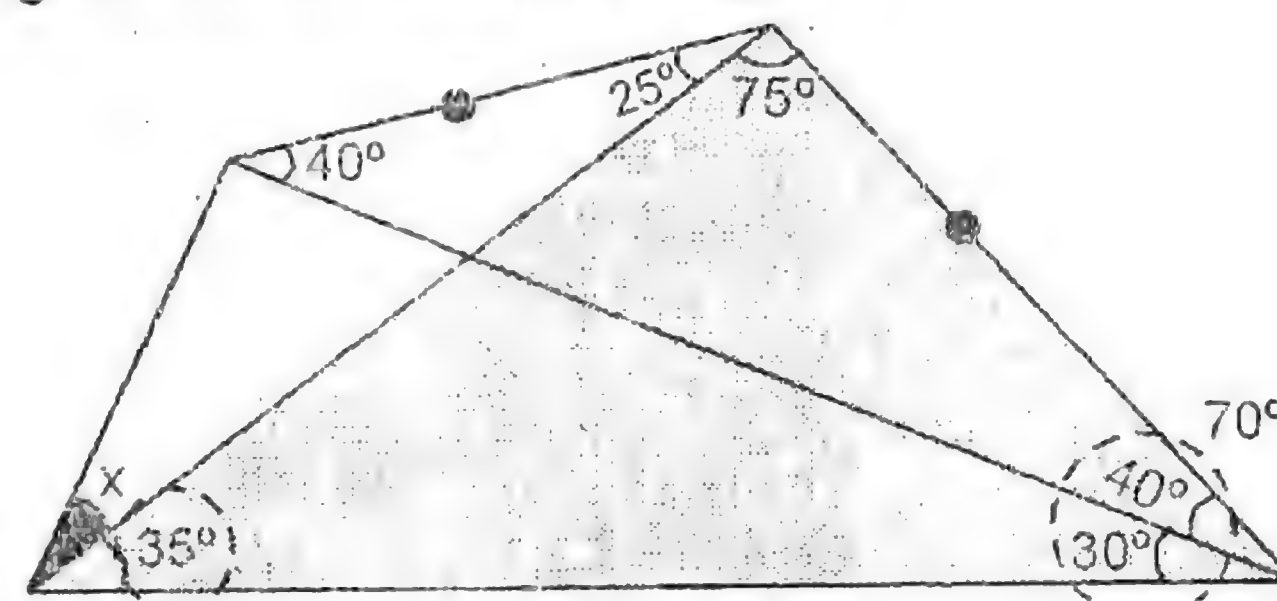
En el triángulo sombreado se completa los ángulos internos.



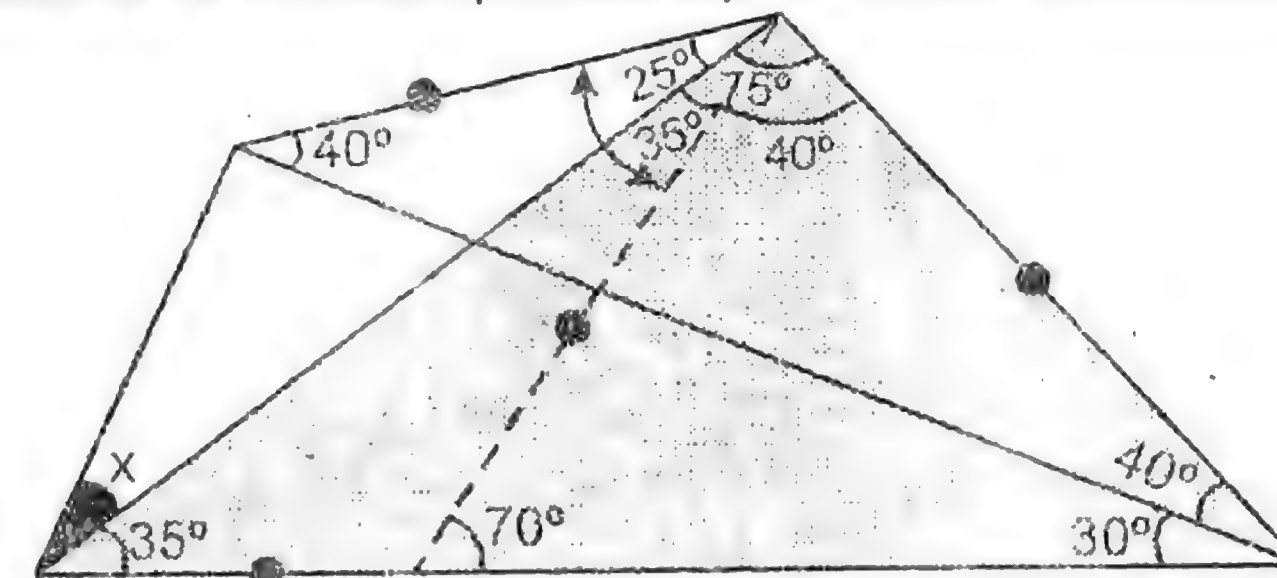
Paso N° 1: Observamos las siguientes figuras en donde se cumplen:



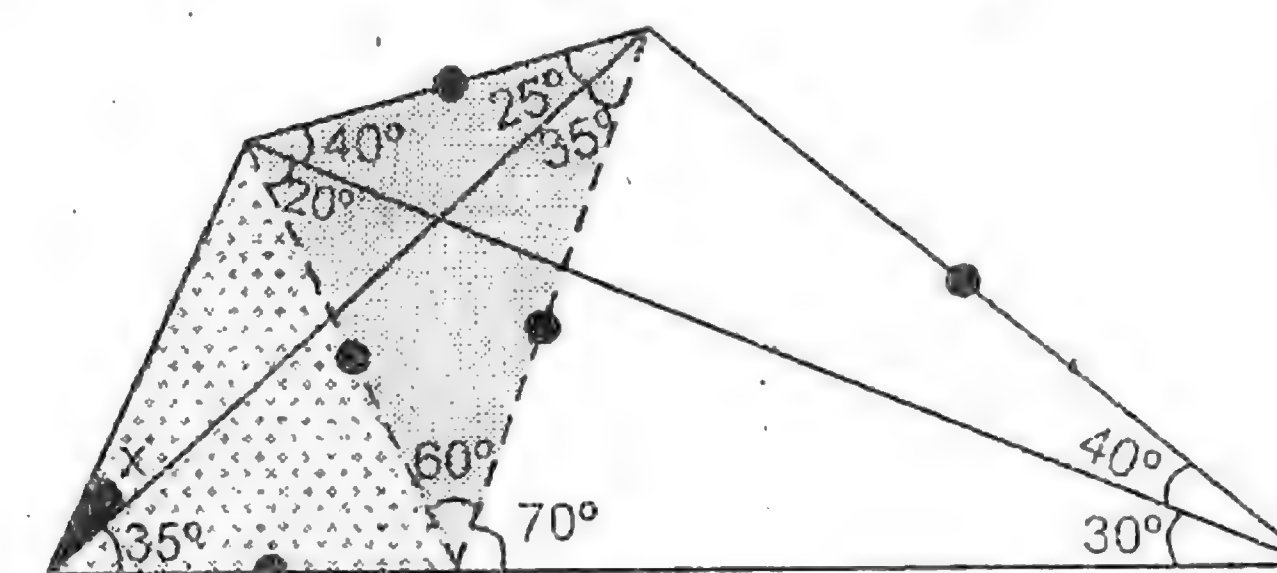
Paso N° 2: Se observa un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2



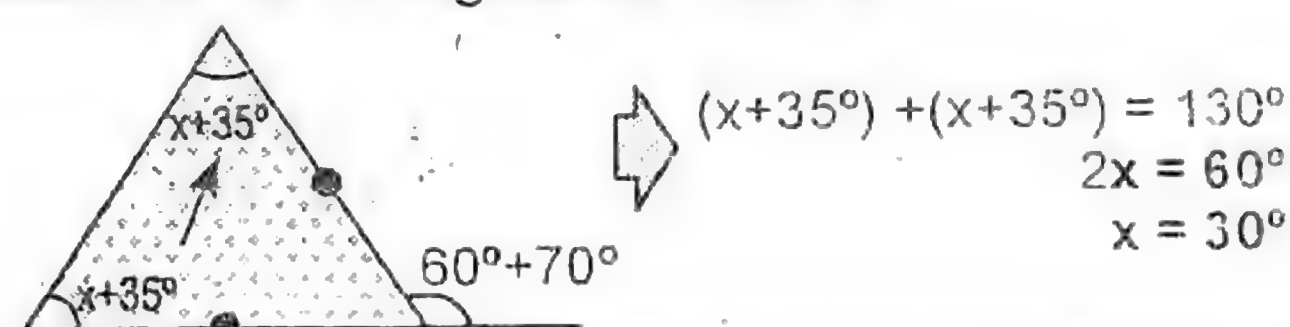
Paso N° 3: Entonces aplicamos el primer criterio de construcción.



Paso N° 4: Ahora en la figura se observa un triángulo equilátero.



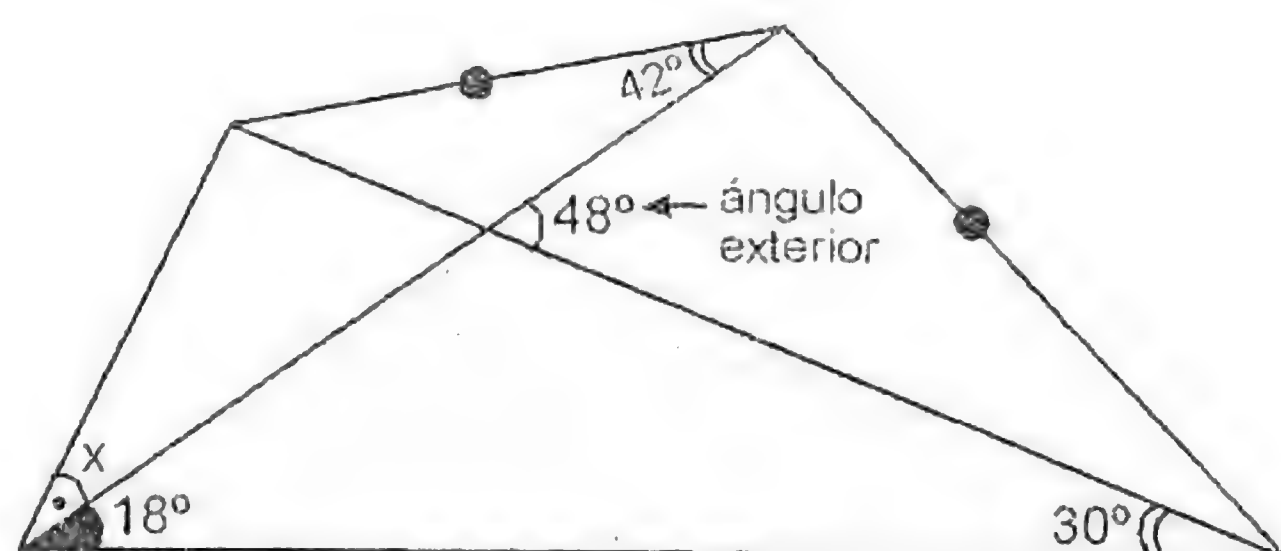
Paso N° 5: Finalmente se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma:



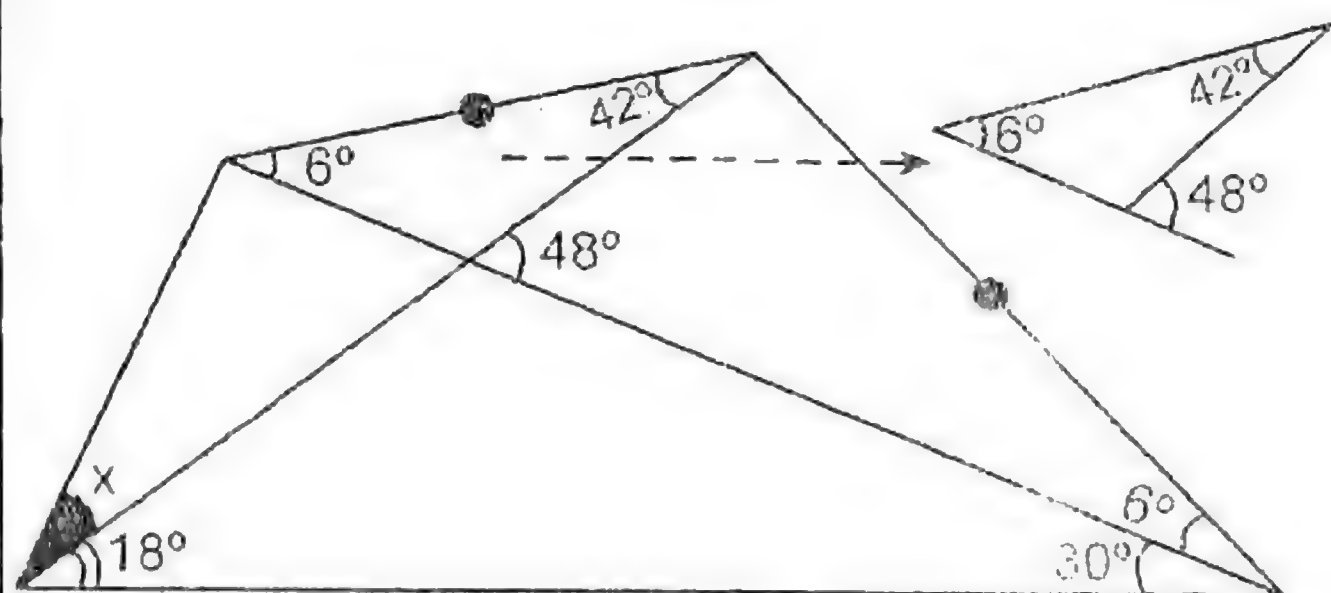
$$\begin{aligned} (x+35^\circ) + (x+35^\circ) &= 130^\circ \\ 2x &= 60^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

Solución N°4

Paso N° 1: Se observa el triángulo sombreado:

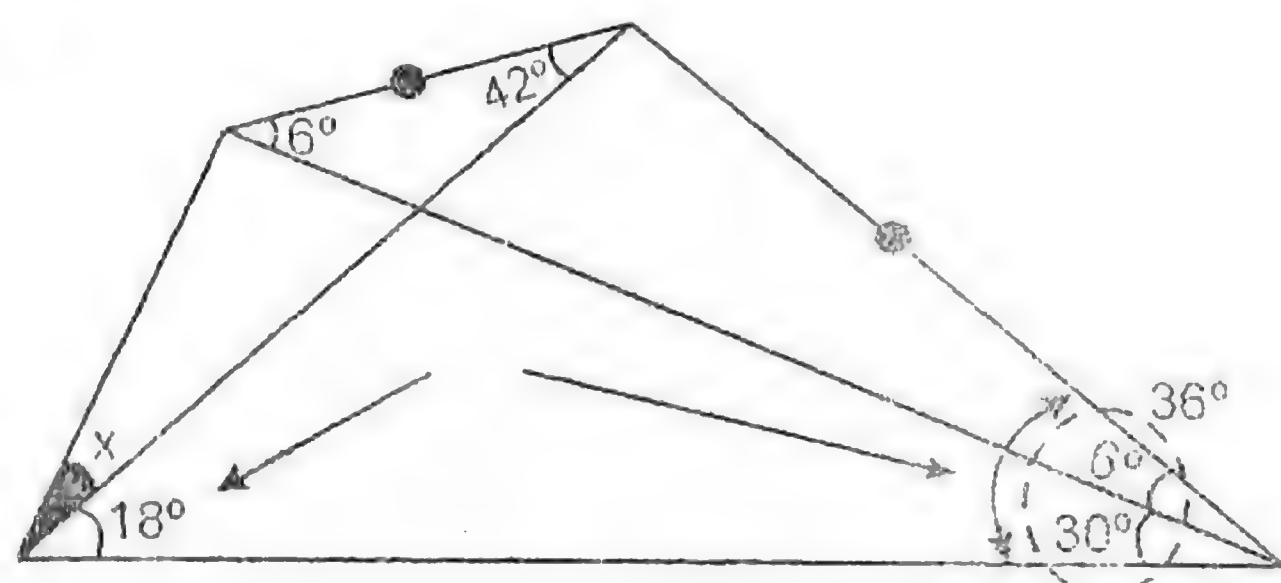


También se observa que se cumple:

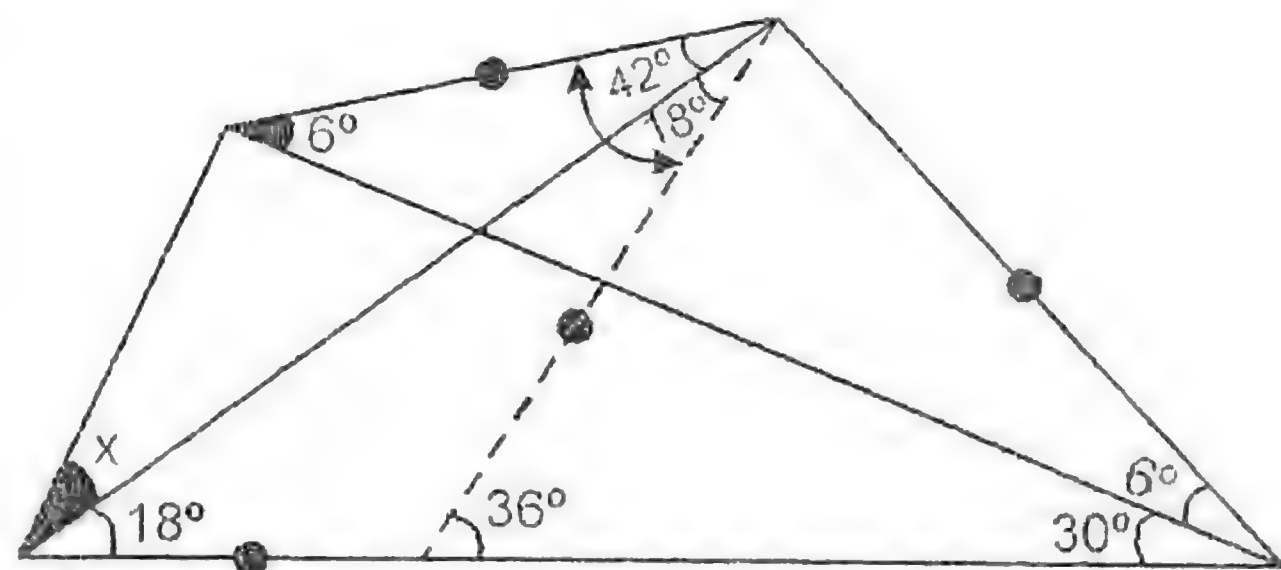


Paso N° 2: Se observa un triángulo con ángulos en la relación 1 a 2.

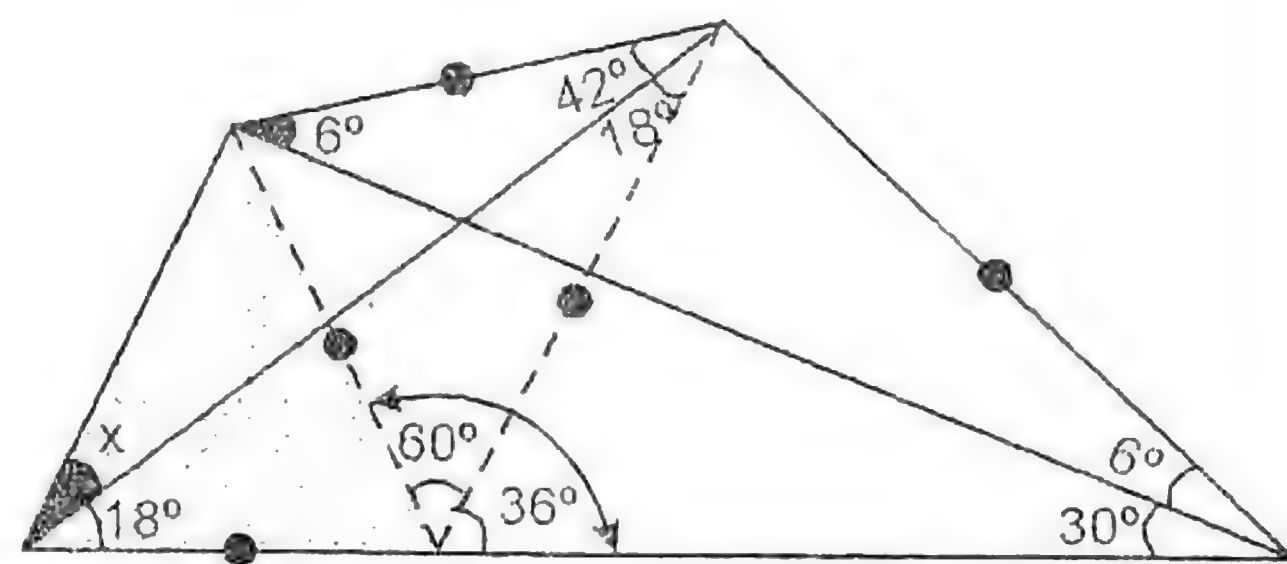
52



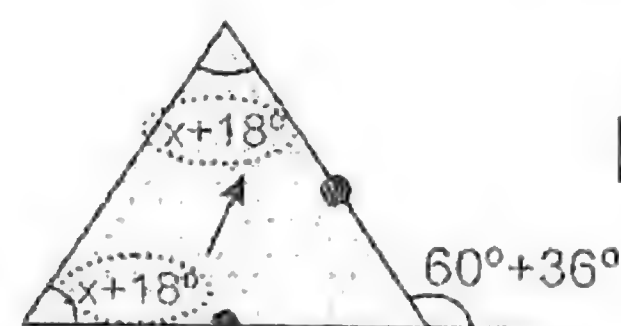
Paso N°3: Aplicamos el primer criterio de construcción.



Paso N° 4: Se observa un triángulo equilátero.



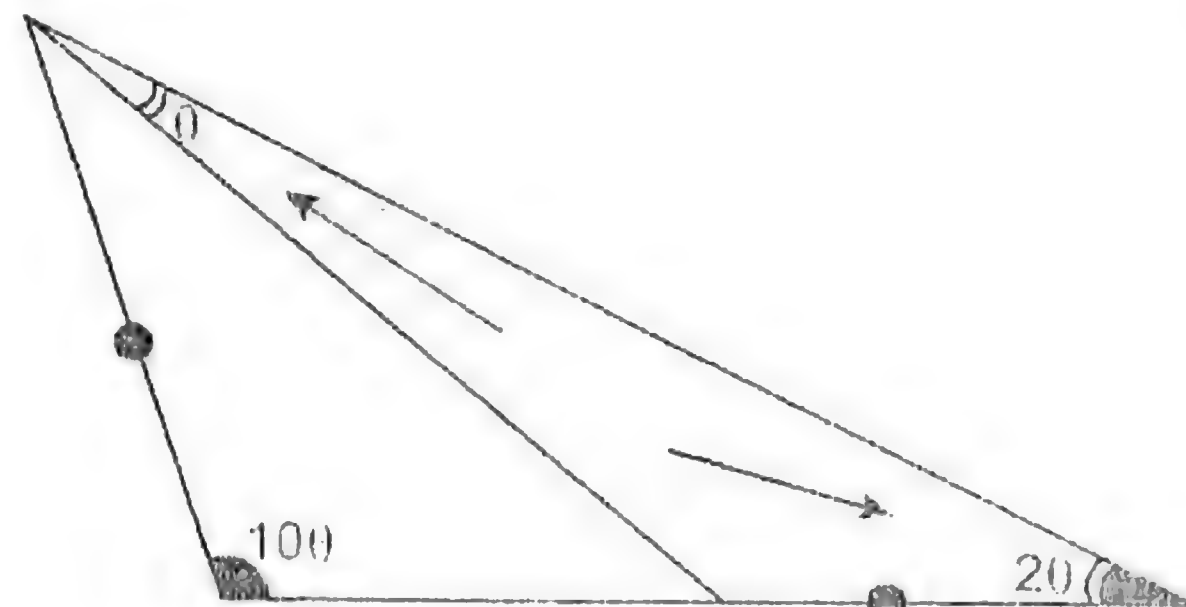
Paso N° 5: Finalmente, se observa el triángulo donde se realiza la siguiente operación:



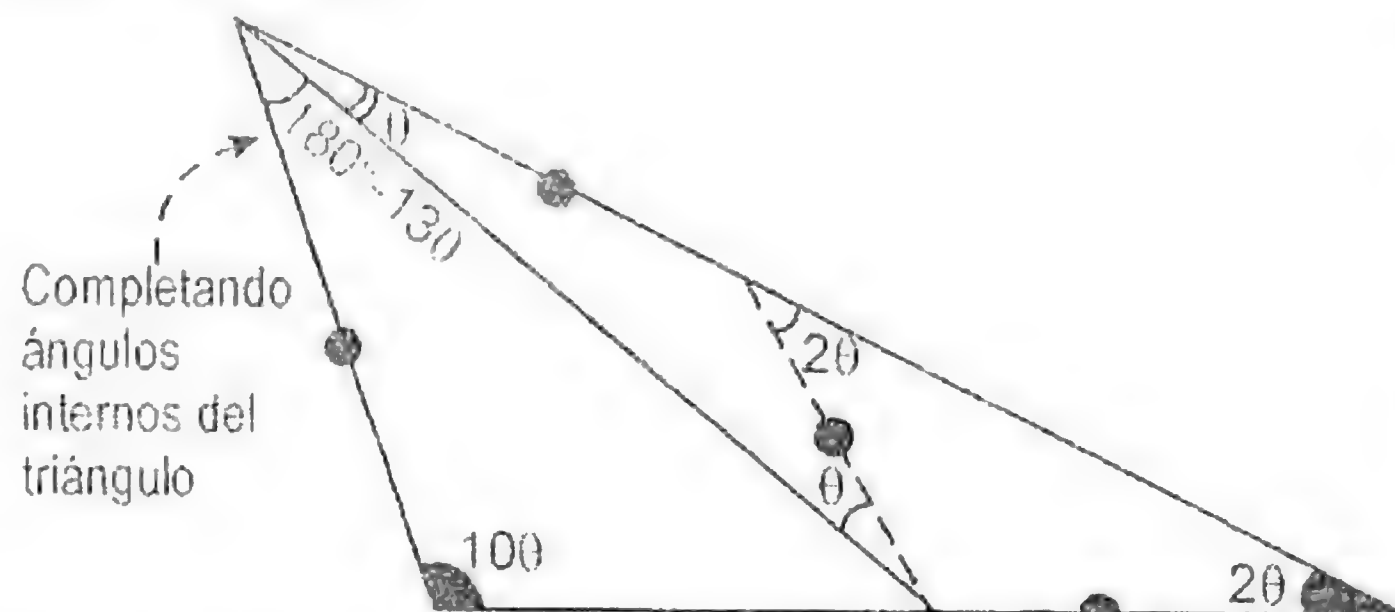
$$\begin{aligned} (x+18^\circ) + (x+18^\circ) &= 96^\circ \\ 2x &= 60^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

Solución N°5

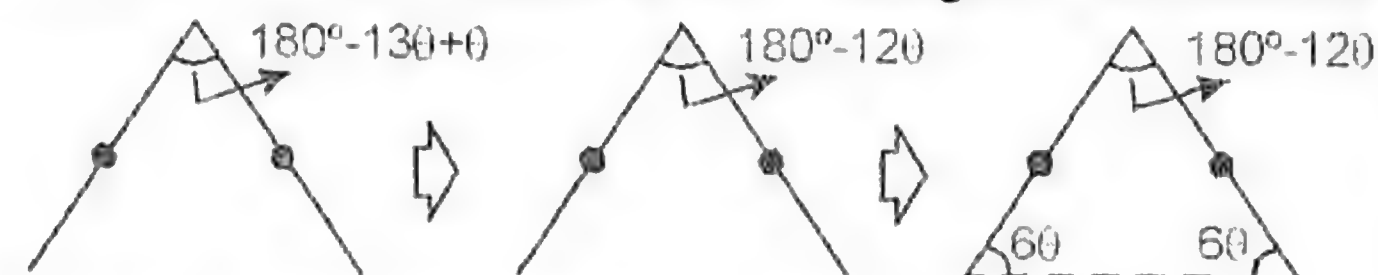
Se observa ángulos internos en la relación de 1 a 2.



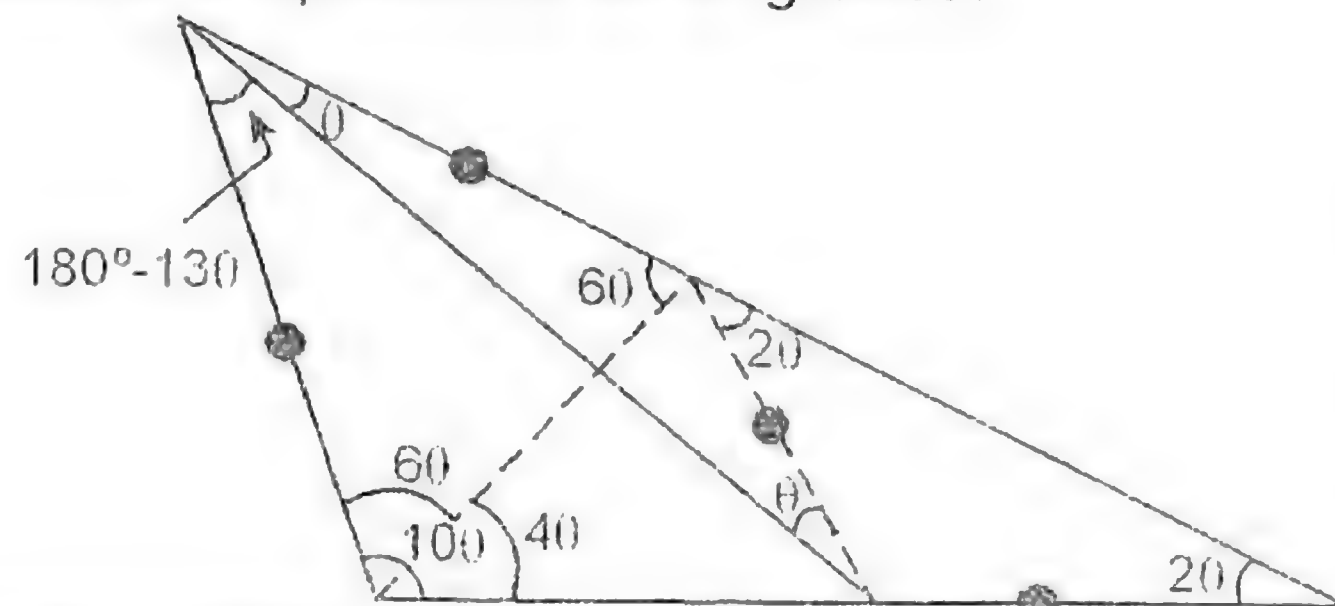
Paso N°1: Aplicamos el primer criterio de construcción



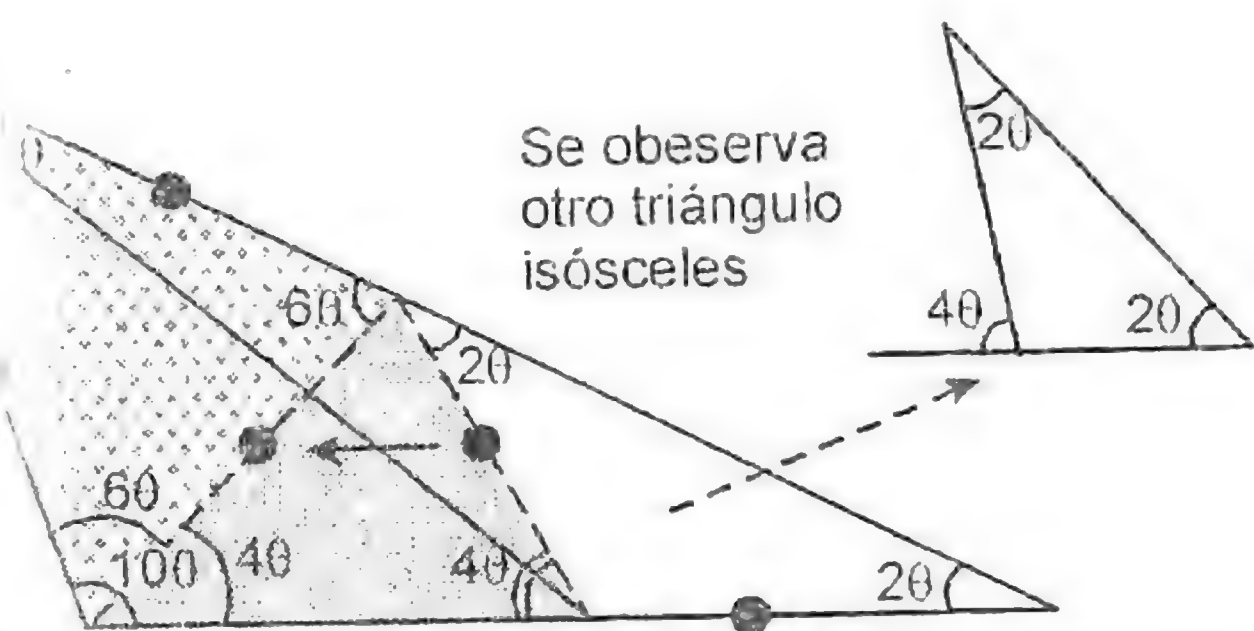
Paso N°2: Se observa un triángulo isósceles.



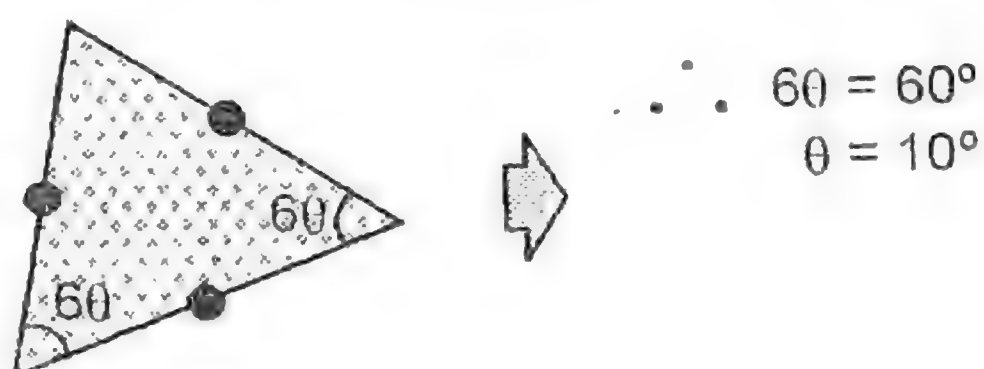
Ahora lo aplicamos en el gráfico.



Nº 3:

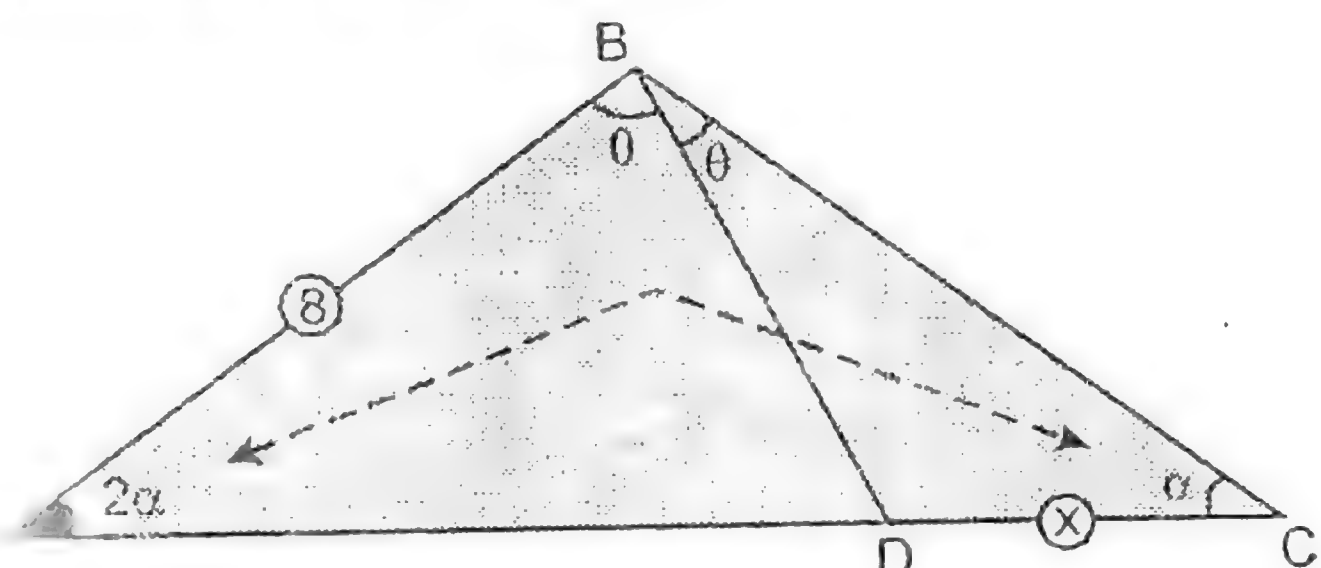


Paso Nº 4: En la figura observamos el siguiente triángulo que es equilátero donde se cumple:

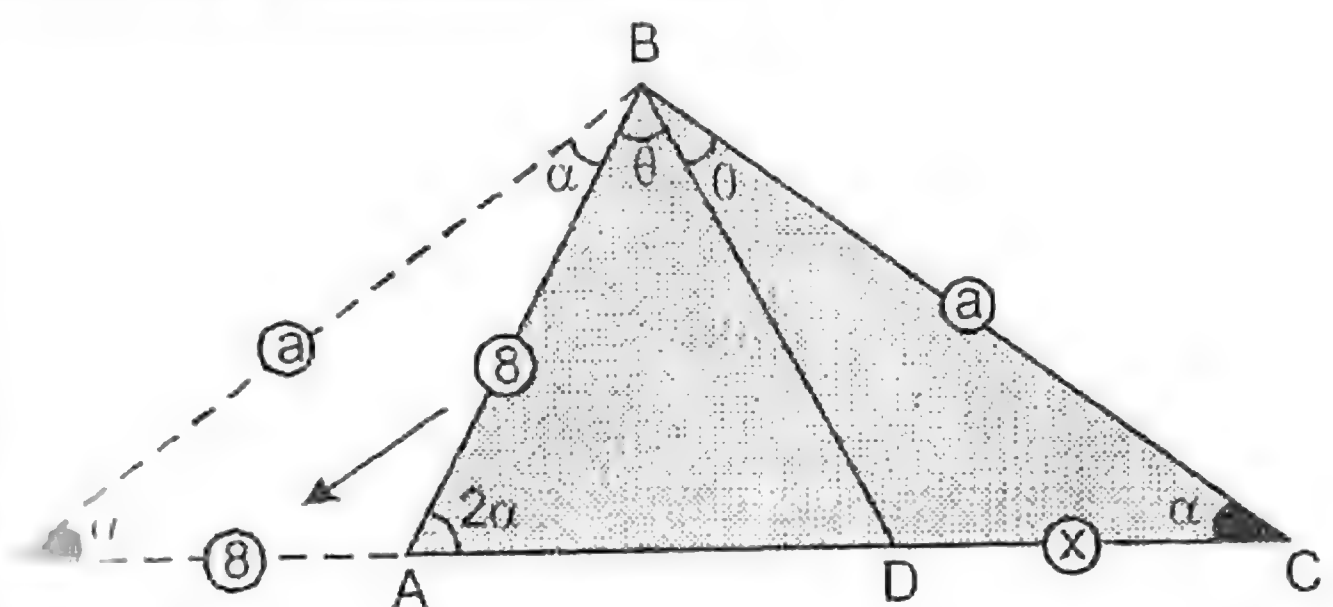


Solución Nº 6

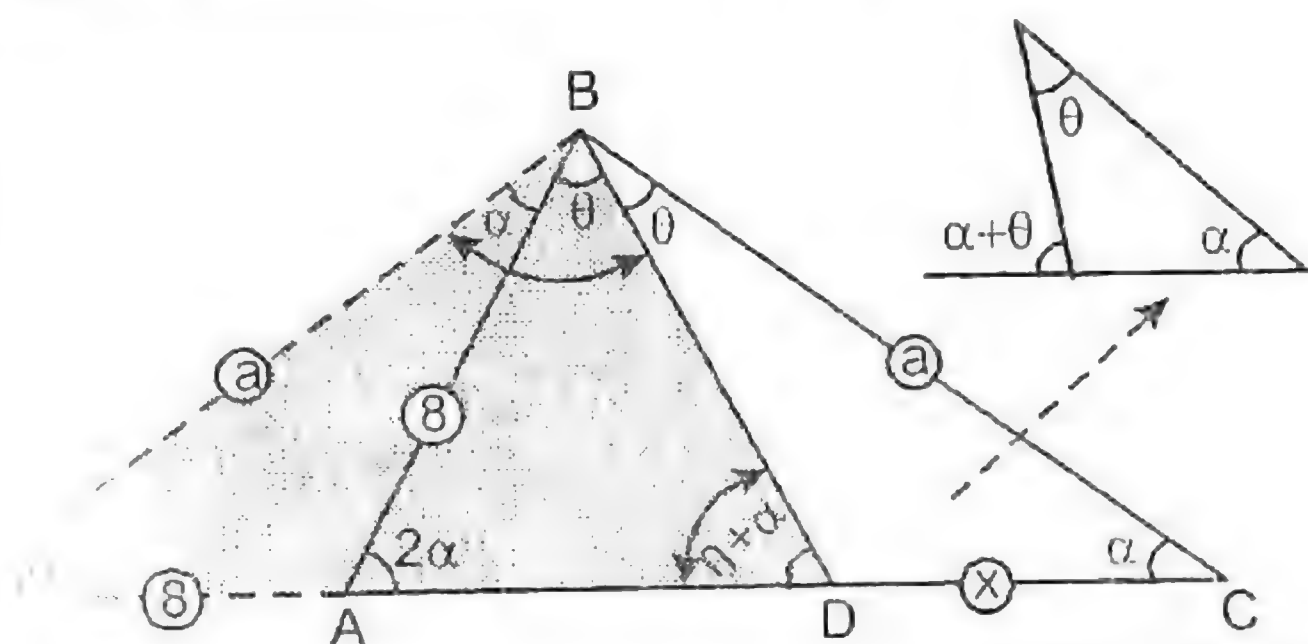
Se observa en la figura ángulos internos en la relación de 1 a 2.



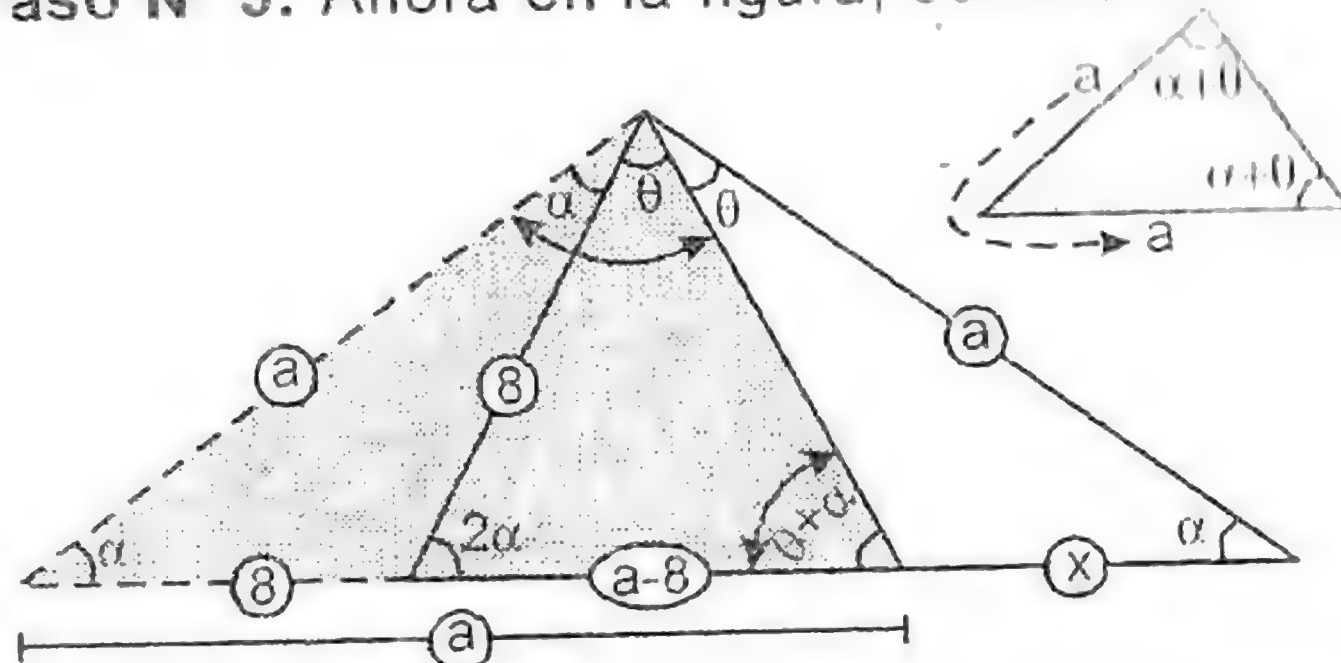
Paso Nº 1: Aplicamos el primer criterio de construcción; donde nos conviene trazar la ceviana externa.



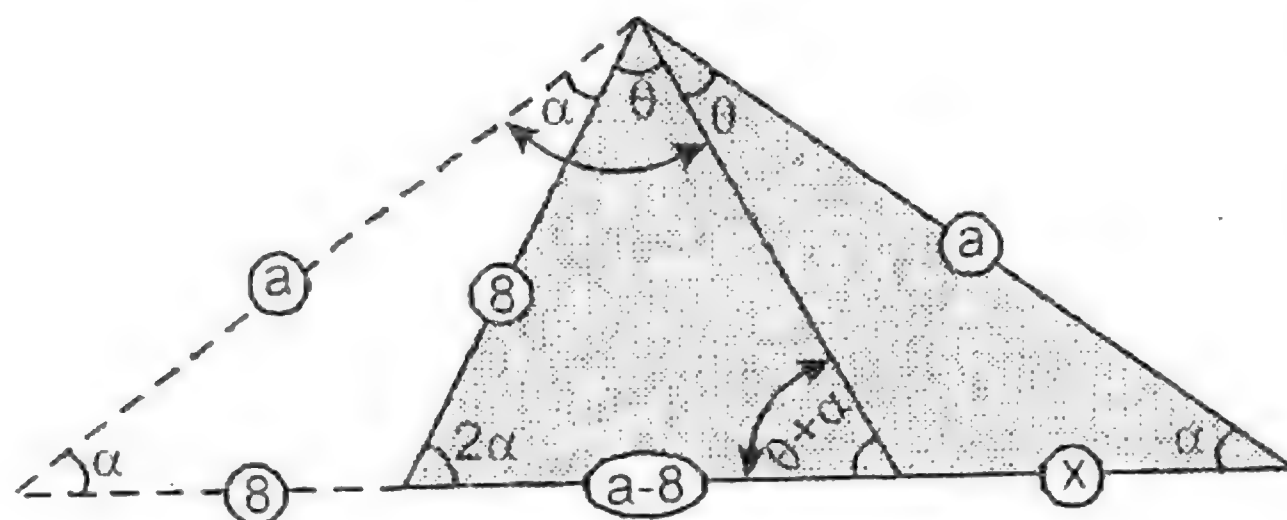
Paso Nº 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles interno a la figura:



Paso Nº 3: Ahora en la figura, se obtiene



Paso Nº 4: Observamos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:

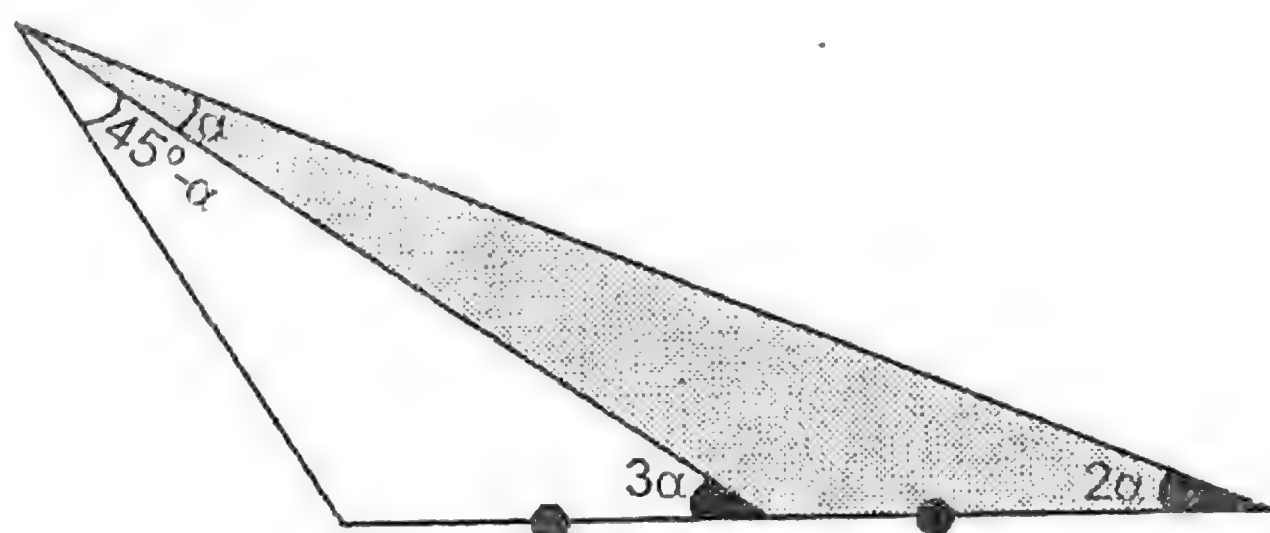


Aplicamos el teorema de existencia de triángulos.

$$\begin{aligned} 8 - a &< a - 8 + x < 8 + a \\ a - 8 + x &< 8 + a \\ x - 8 &< 8 \Rightarrow x < 16 \\ x_{\max} &= 15 \end{aligned}$$

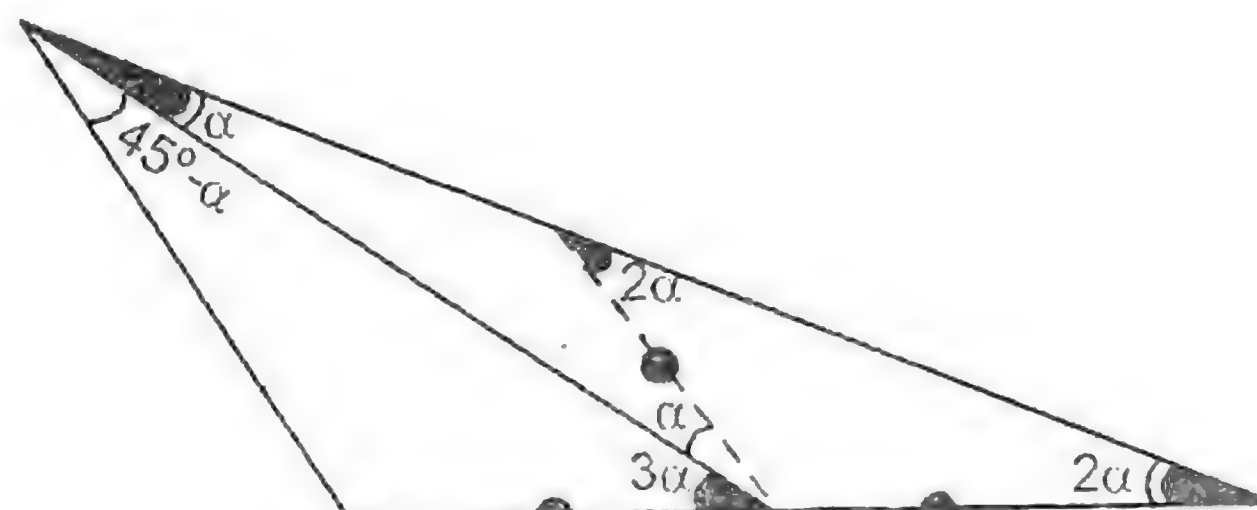
Solución Nº 7

Se observa en la figura un triángulo que contiene ángulos en la relación de 1 a 2.



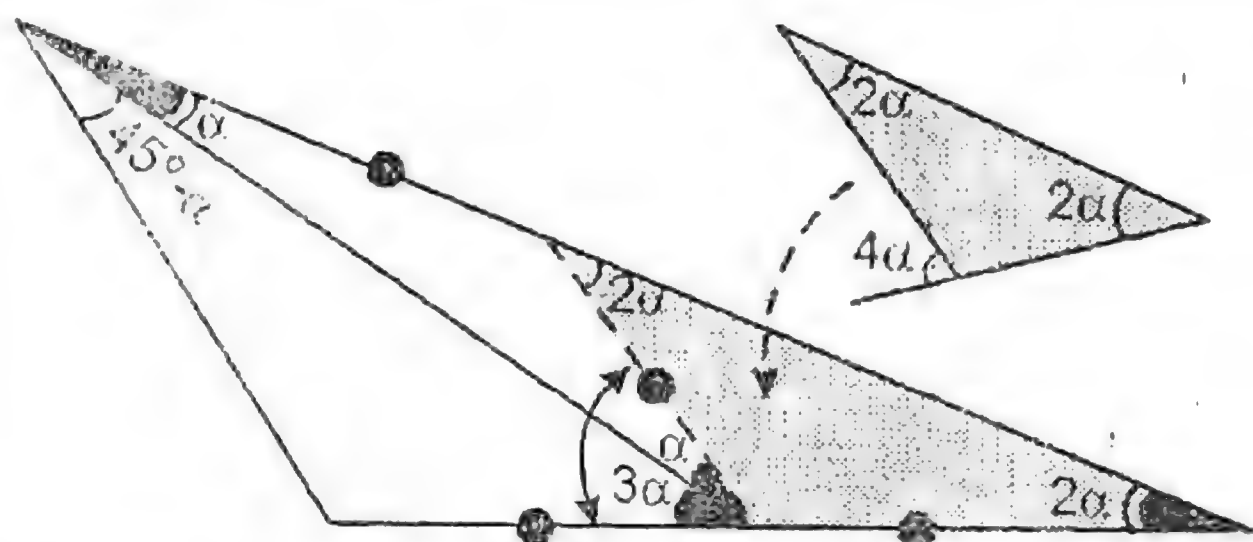
Paso Nº 1

Trazamos la ceviana interna donde obtenemos la siguiente figura (primer criterio de construcción).

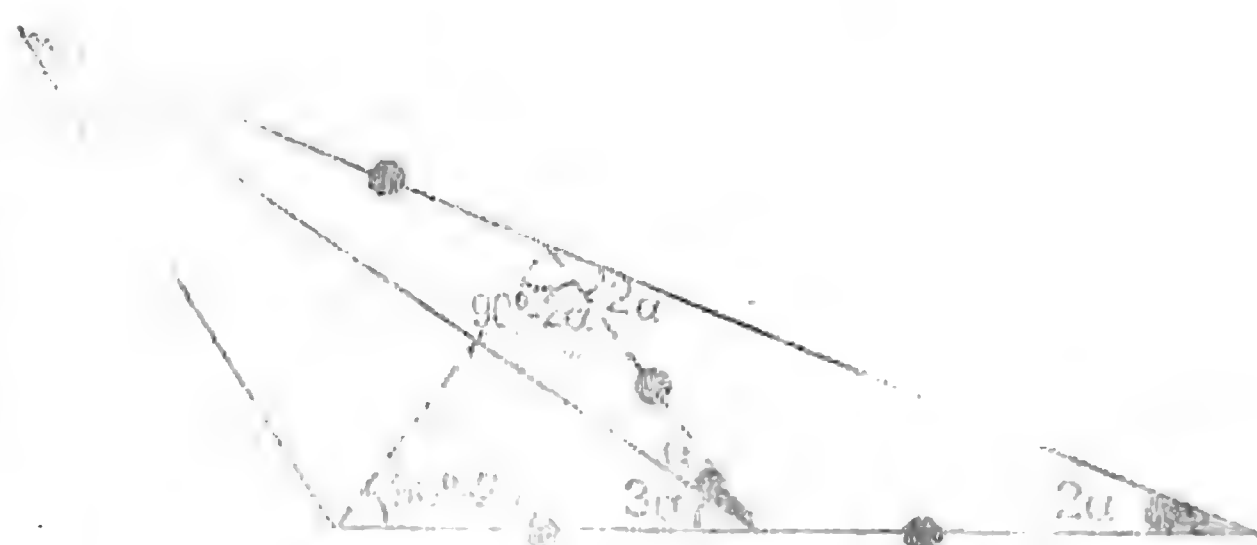
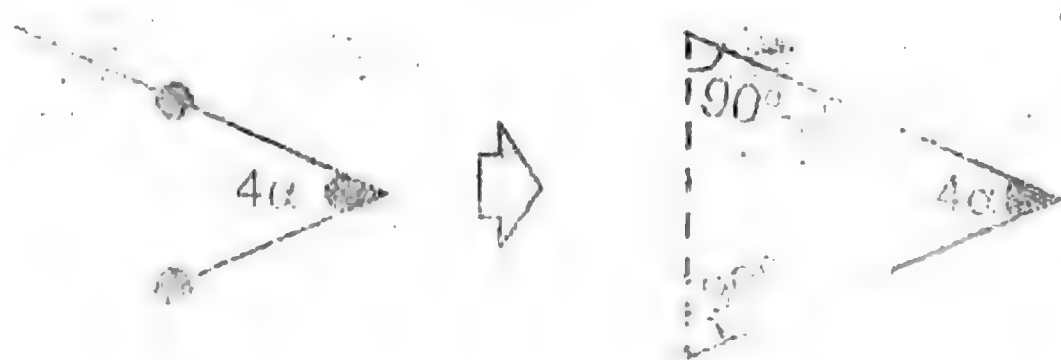


Paso N° 2

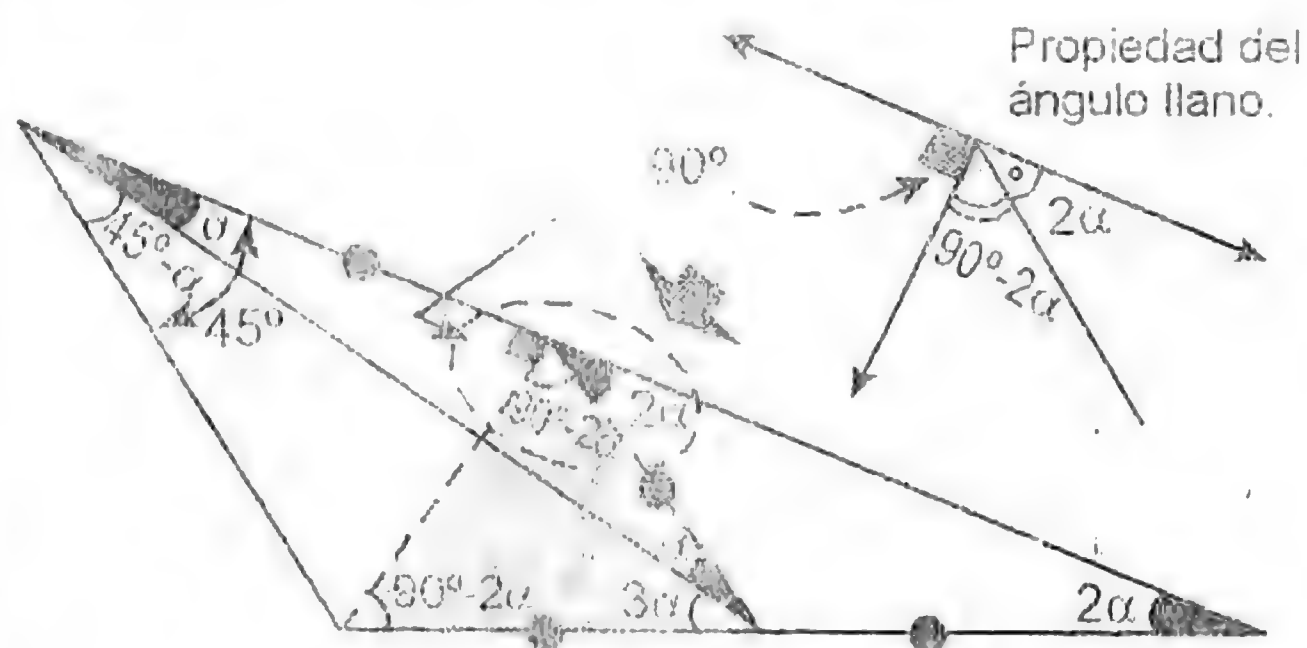
Completamos los ángulos internos para obtener lados iguales y así encontrar triángulos isósceles.

**Paso N° 3**

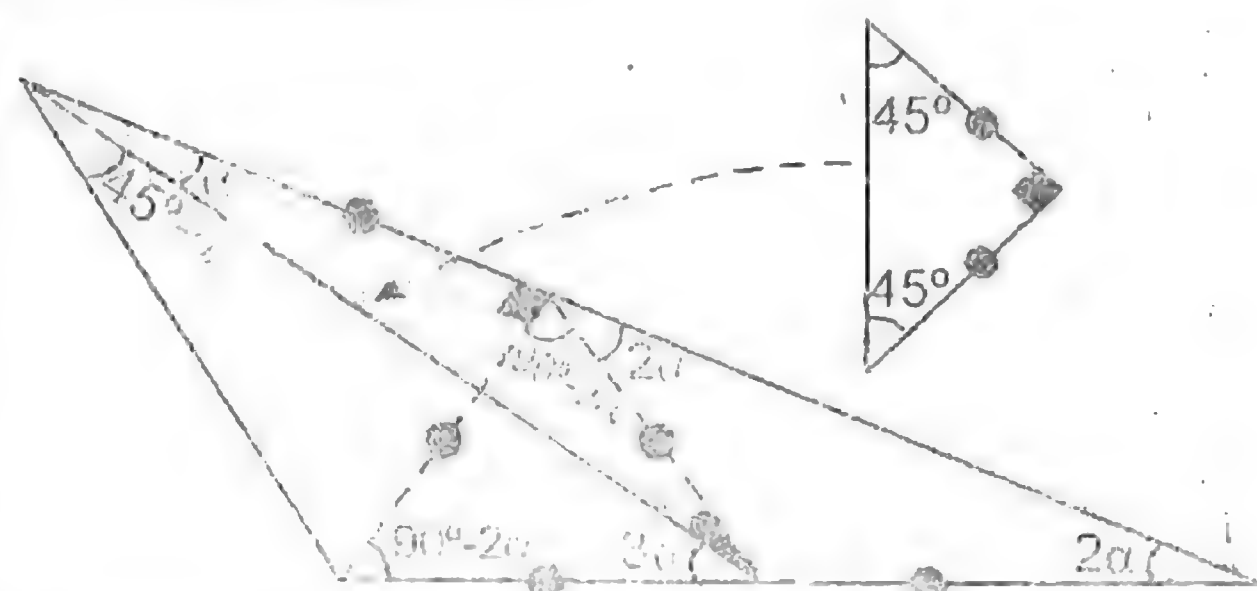
Se observa una figura con 2 lados iguales, entonces realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles:

**Paso N° 4**

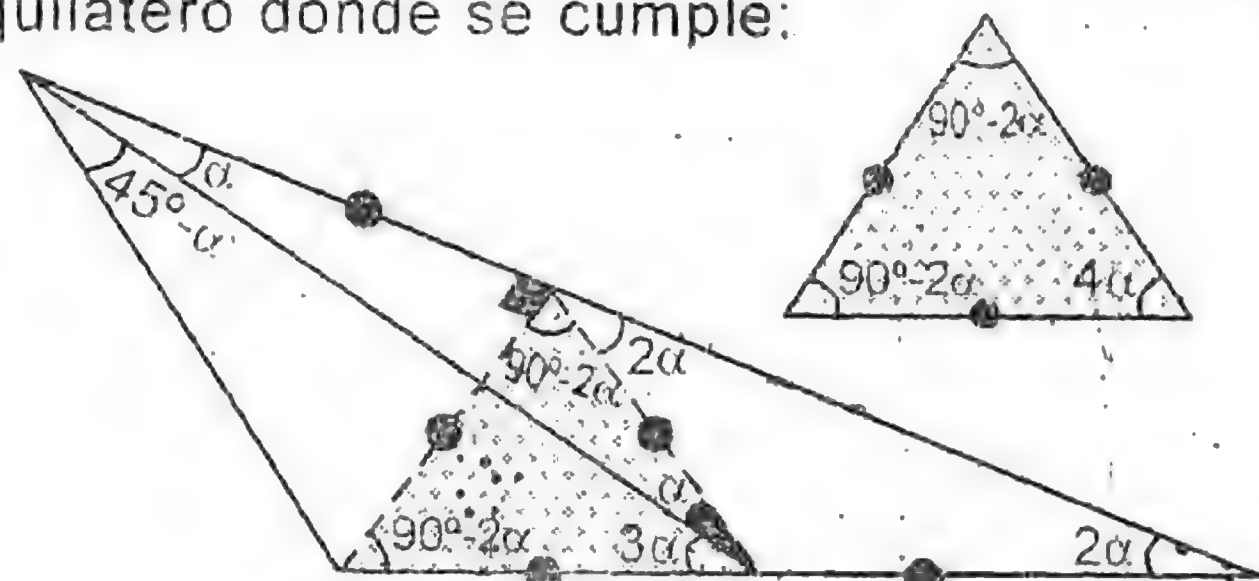
Se observa un ángulo recto en la figura

**Paso N° 5**

Se observa un triángulo rectángulo notable de 45° (catetos iguales)



Paso N° 6: Luego se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:



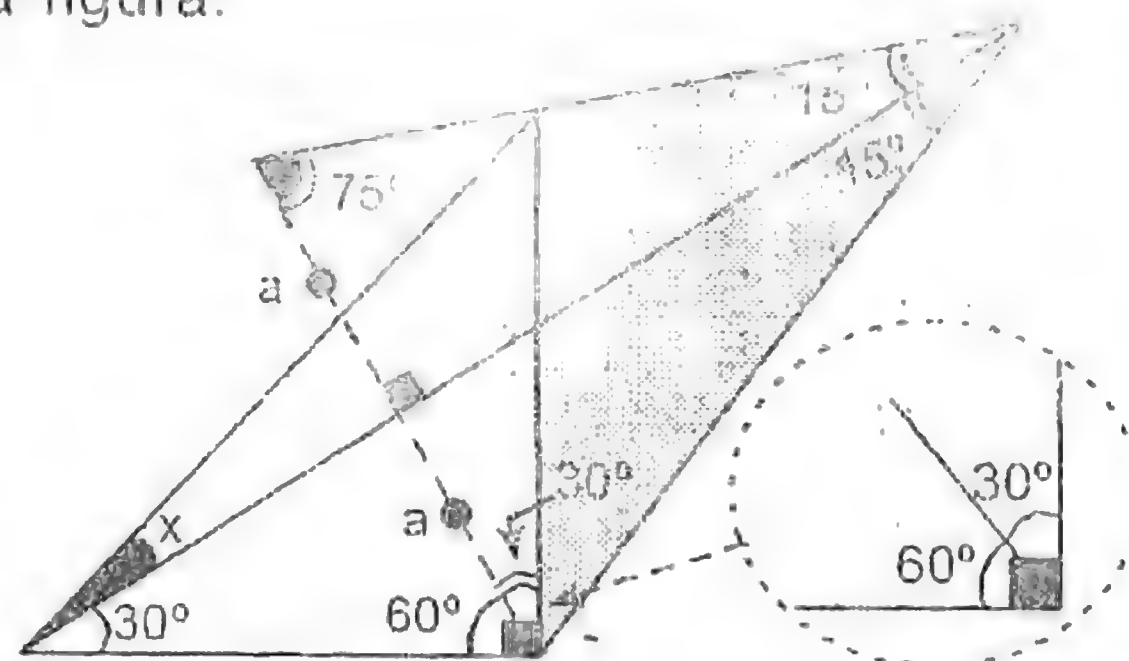
$$\Rightarrow \begin{aligned} 4\alpha &= 60^\circ \\ \alpha &= 15^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 8

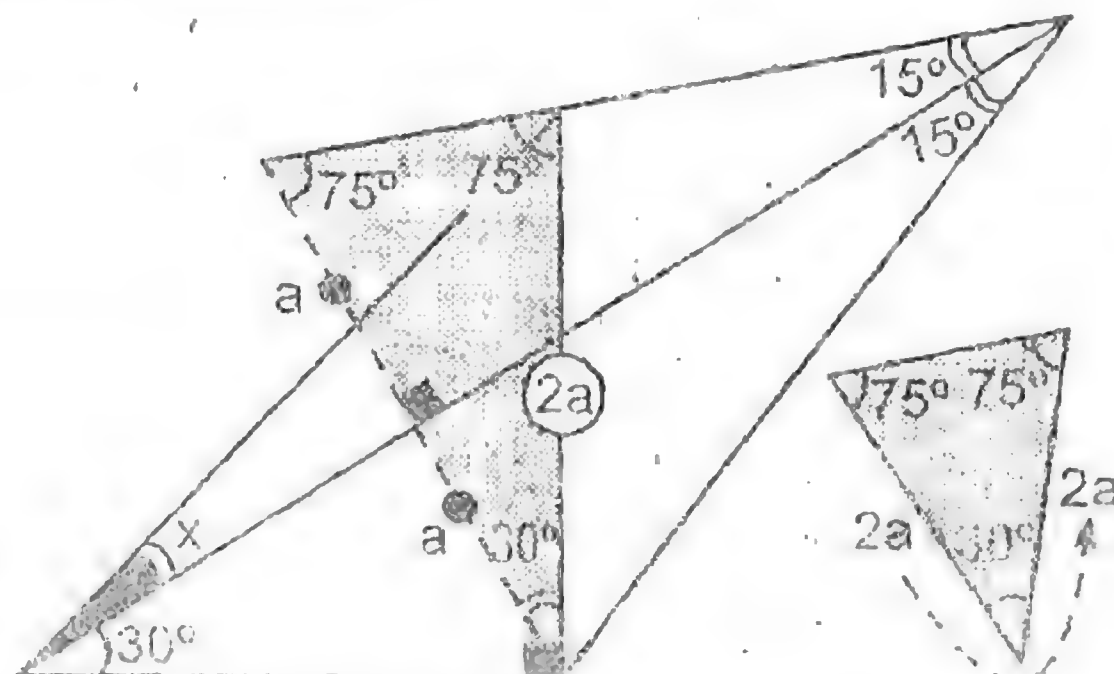
Observamos una bisectriz interior en la figura, entonces aplicamos el segundo criterio de construcción.

Paso N° 1

Paso N° 2: Completamos los ángulos internos en la figura.

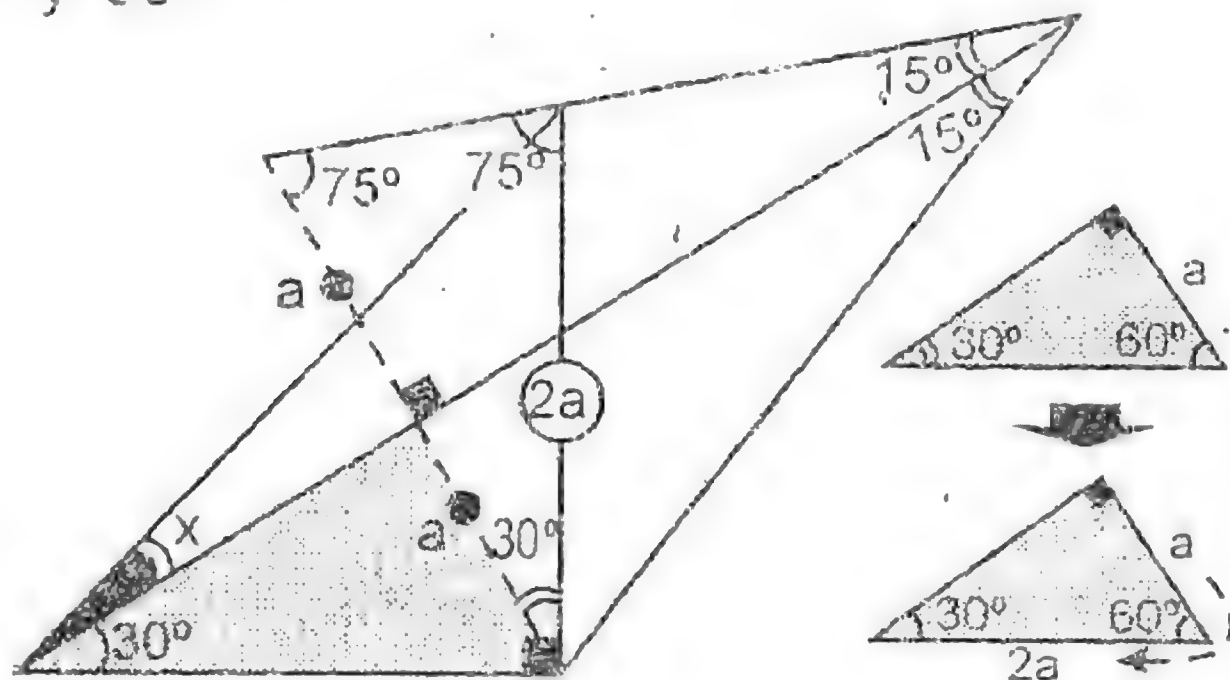
**Paso N° 3**

Se observa que la figura sombreada es un triángulo isósceles.

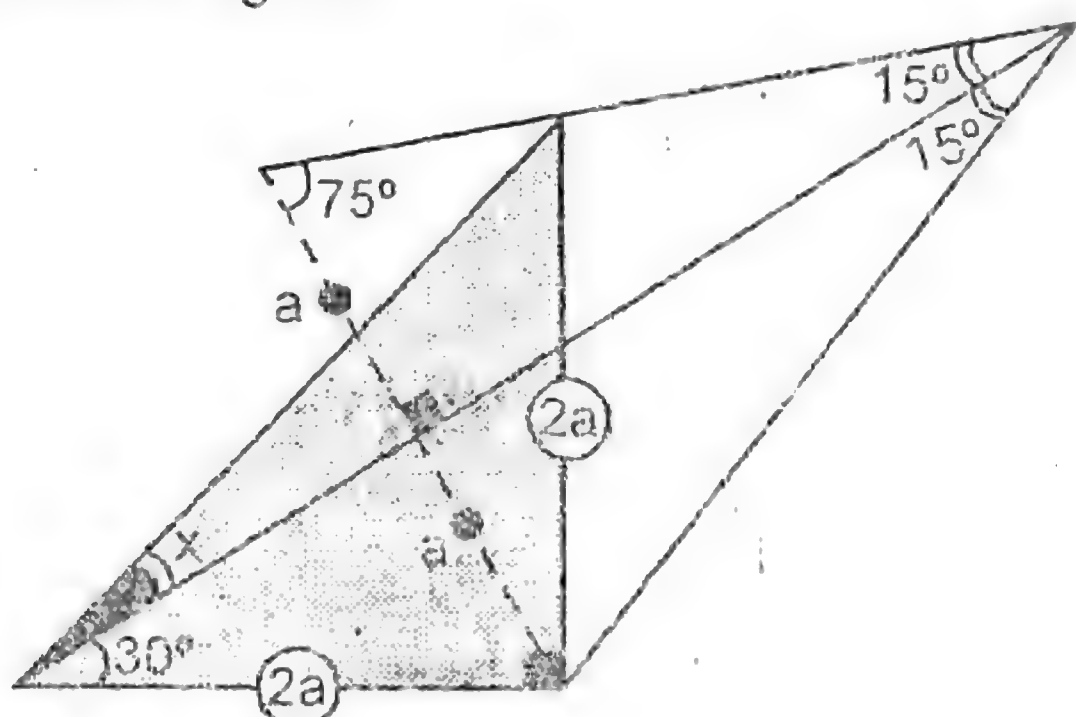


Paso N° 4

Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°



Paso N° 5: Gracias al paso anterior se obtiene la siguiente figura:

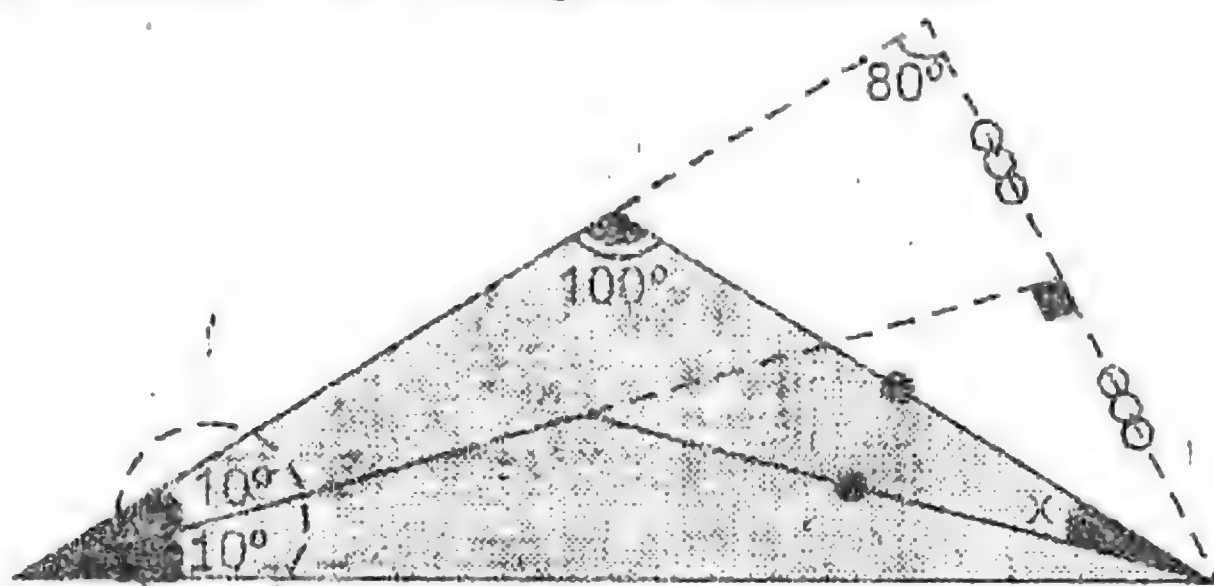


El triángulo sombreado es un triángulo rectángulo notable de $(45^\circ \text{ y } 45^\circ)$

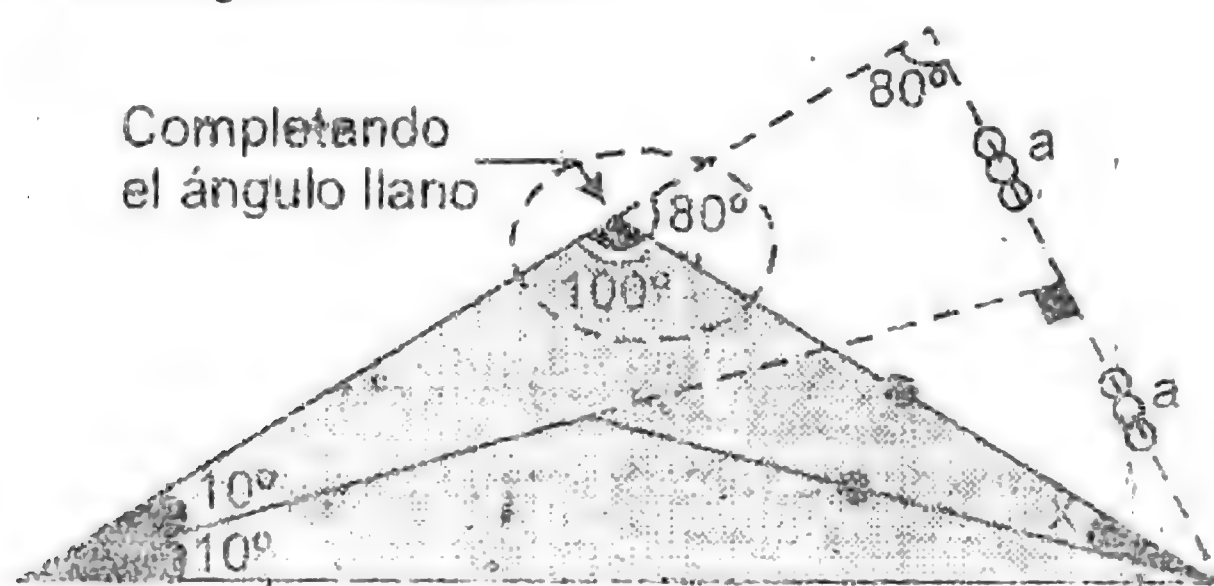
$$\begin{aligned} x + 30^\circ &= 45^\circ \\ x &= 15^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 9

Paso N° 1: Observamos en la figura una bisectriz interior y realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



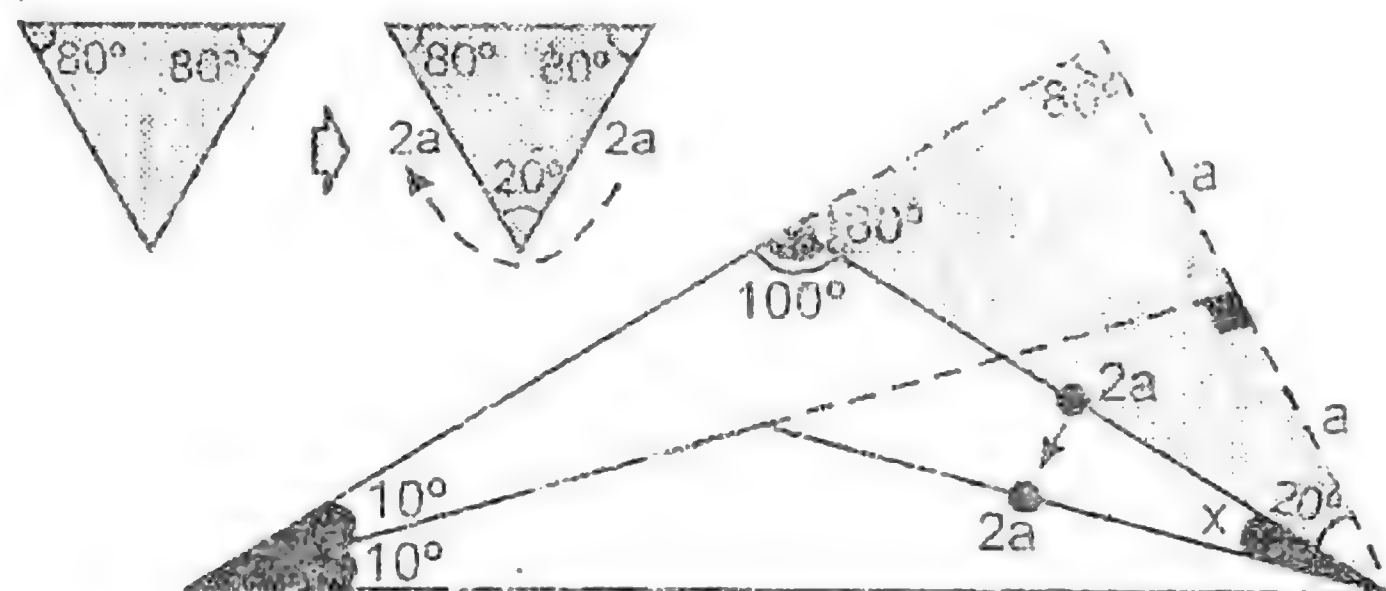
Paso N° 2: Completamos los ángulos internos en el triángulo trazado.



Completando el ángulo llano

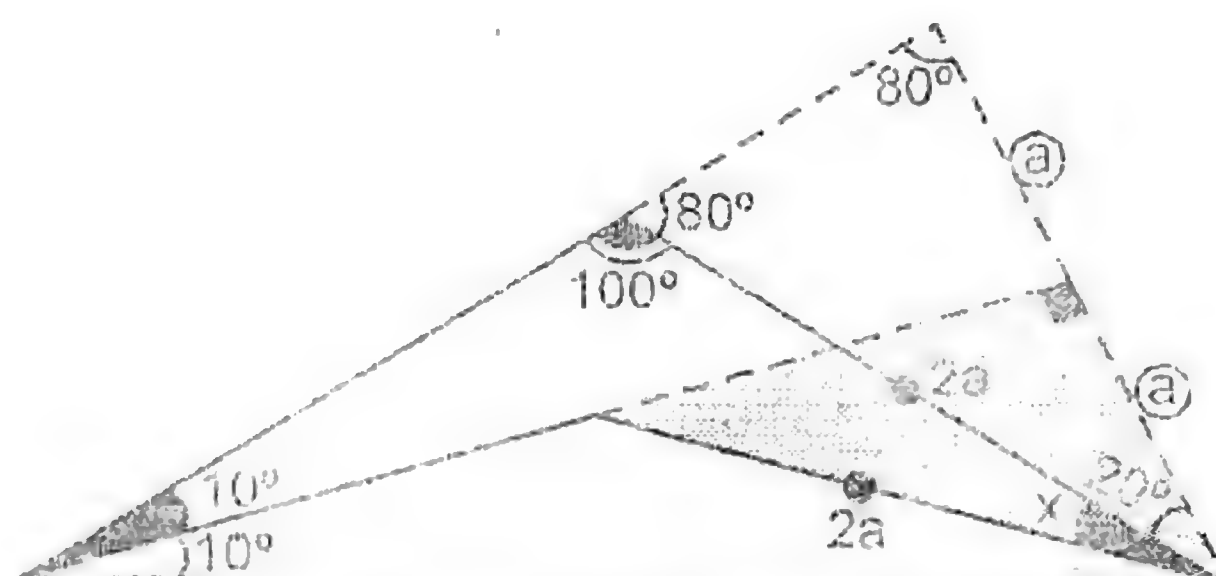
Paso N° 3

Se observa un nuevo triángulo isósceles en la figura sombreada.

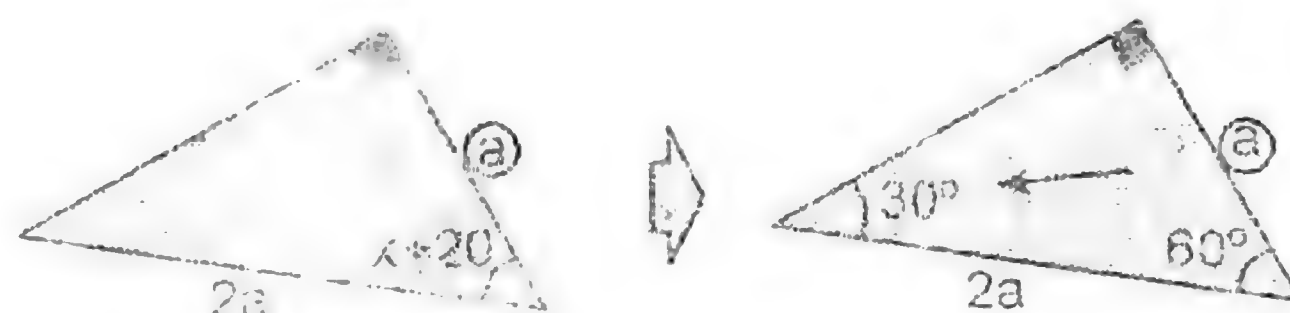


Paso N° 4

Se observa un triángulo rectángulo con las siguientes características:



Donde el triángulo rectángulo es notable de $(30^\circ \text{ y } 60^\circ)$

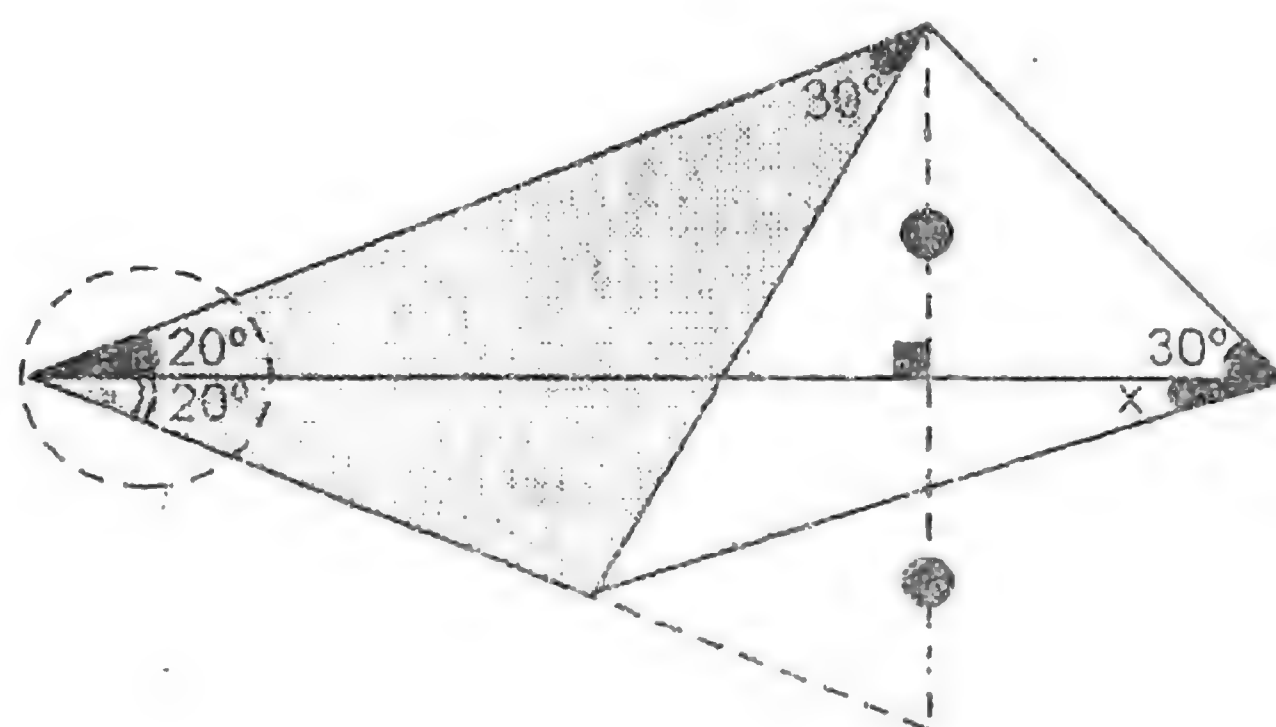


$$\Rightarrow x + 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

Solución N° 10

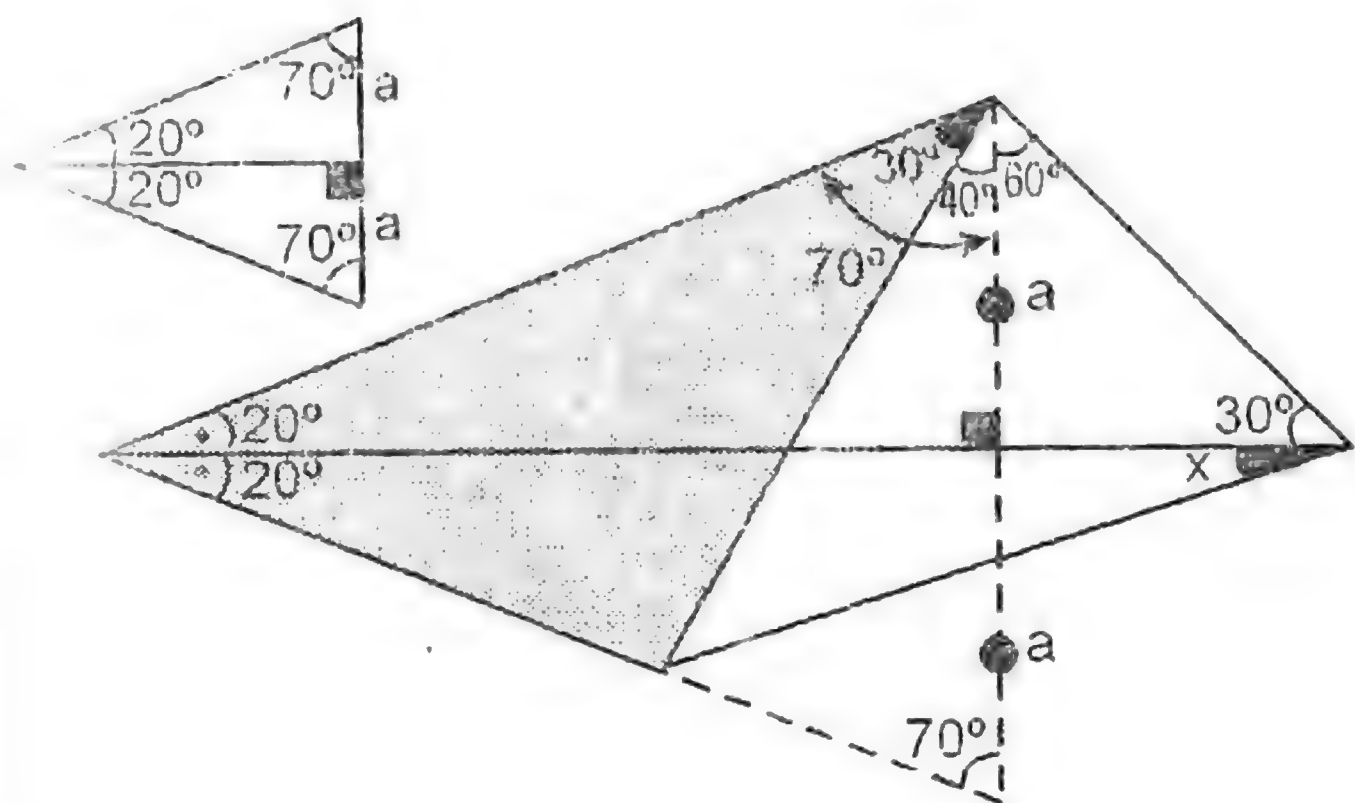
Paso N° 1

Observamos en la figura una bisectriz interior entonces trazamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:



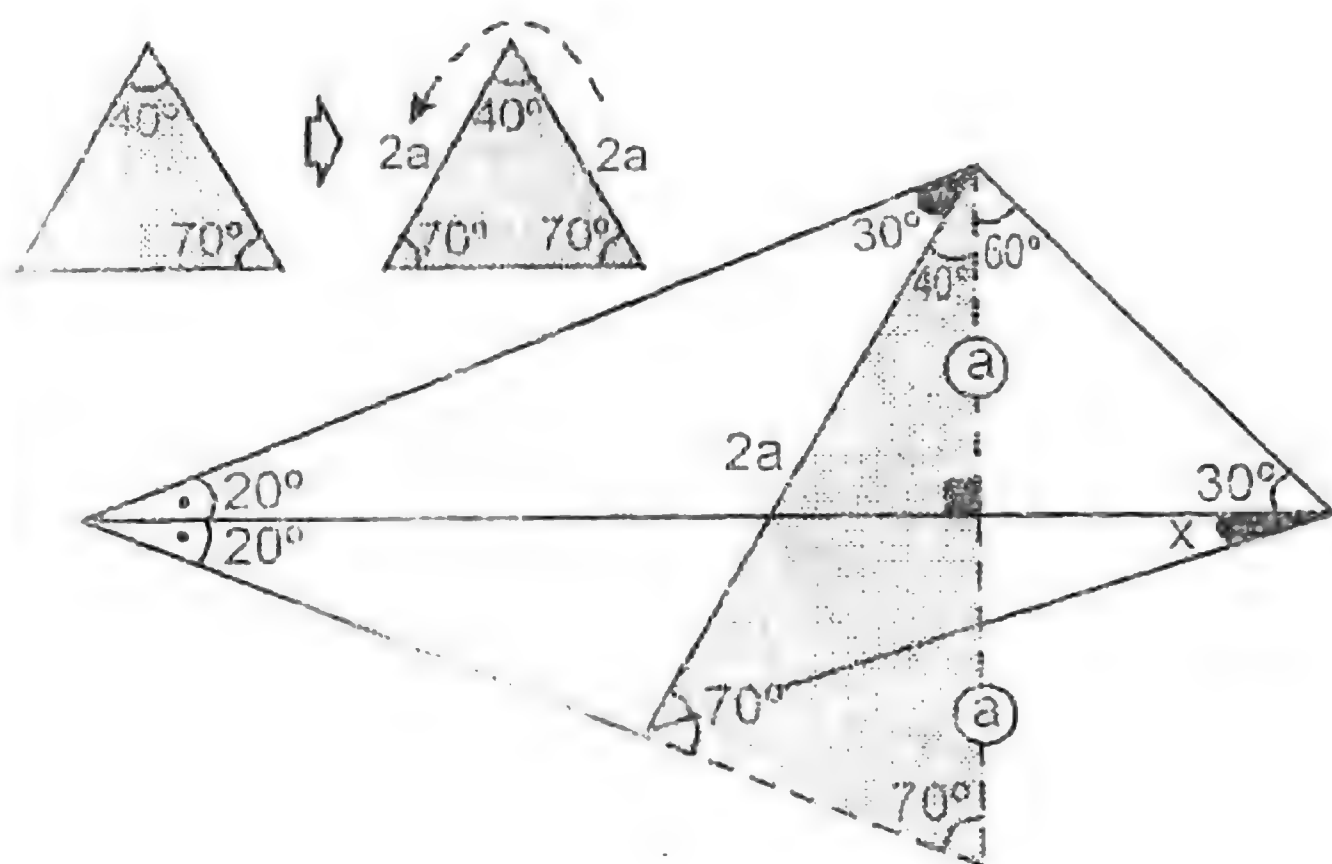
Paso N° 2

Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



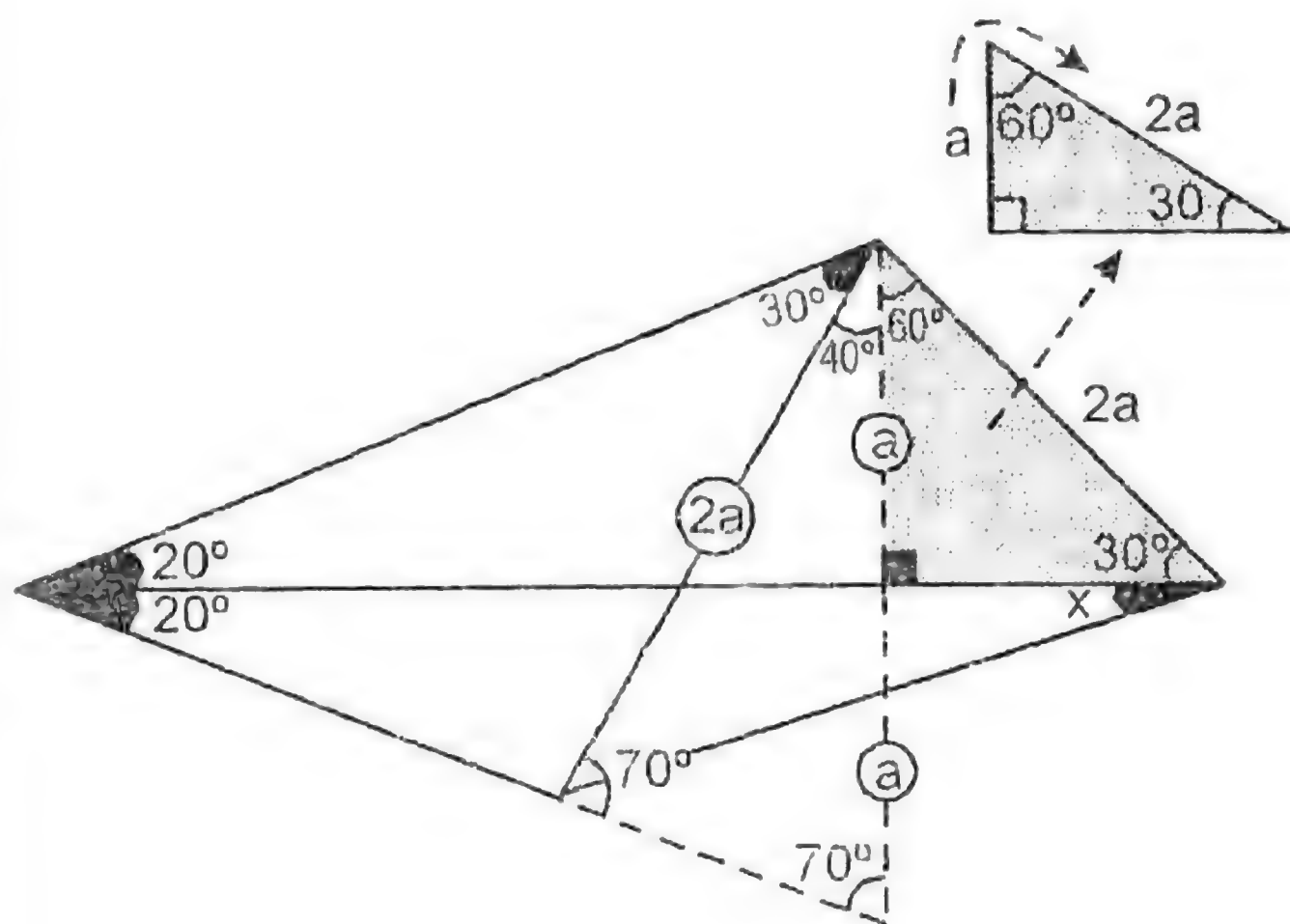
Paso N° 3

Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.



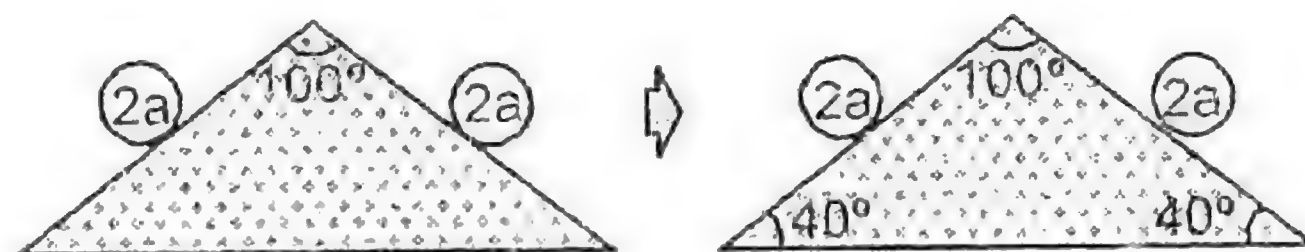
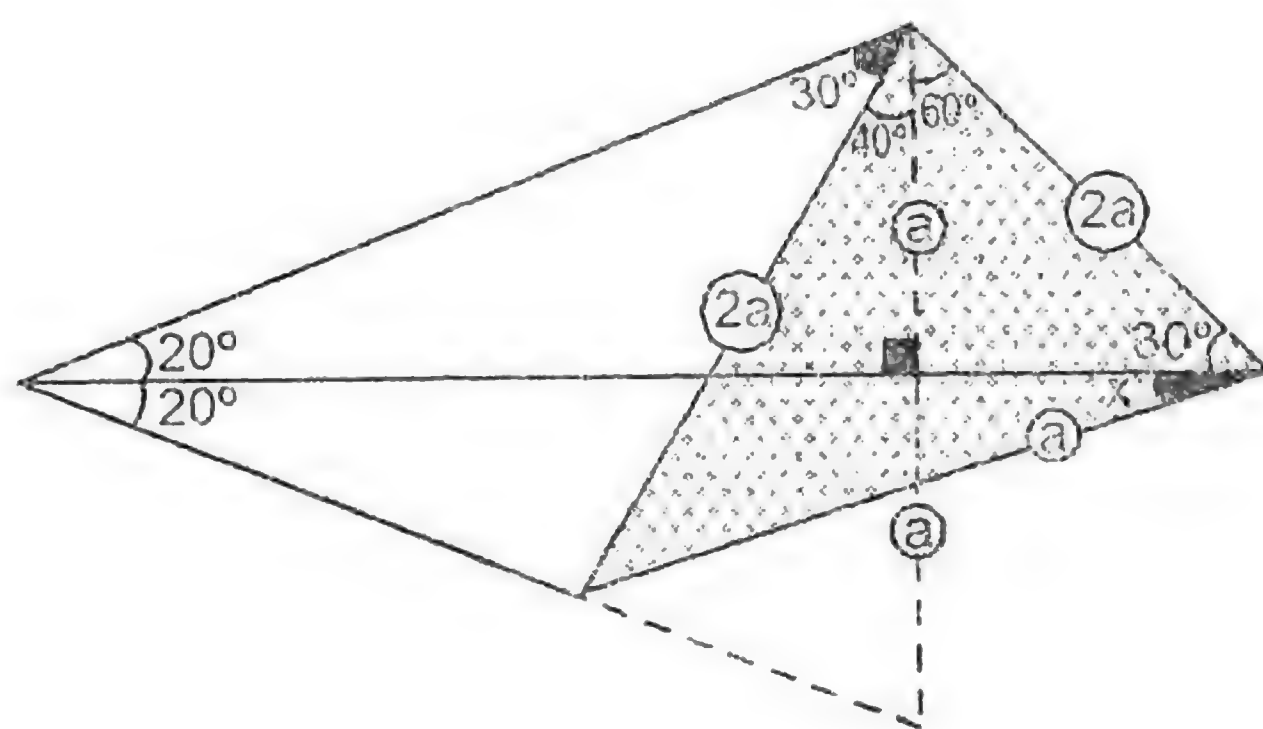
Paso N° 4

Se observa también un triángulo notable (30° y 60°) en la figura sombreada.



Paso N° 5

Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles.



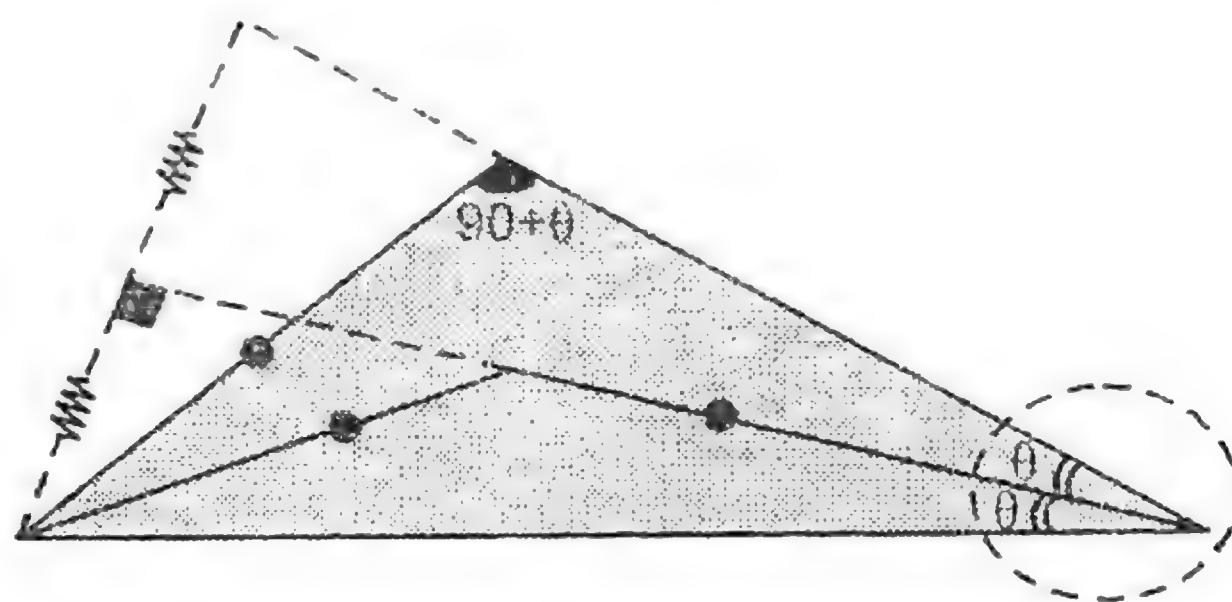
$$\Rightarrow x + 30^\circ = 40^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

Solución N° III

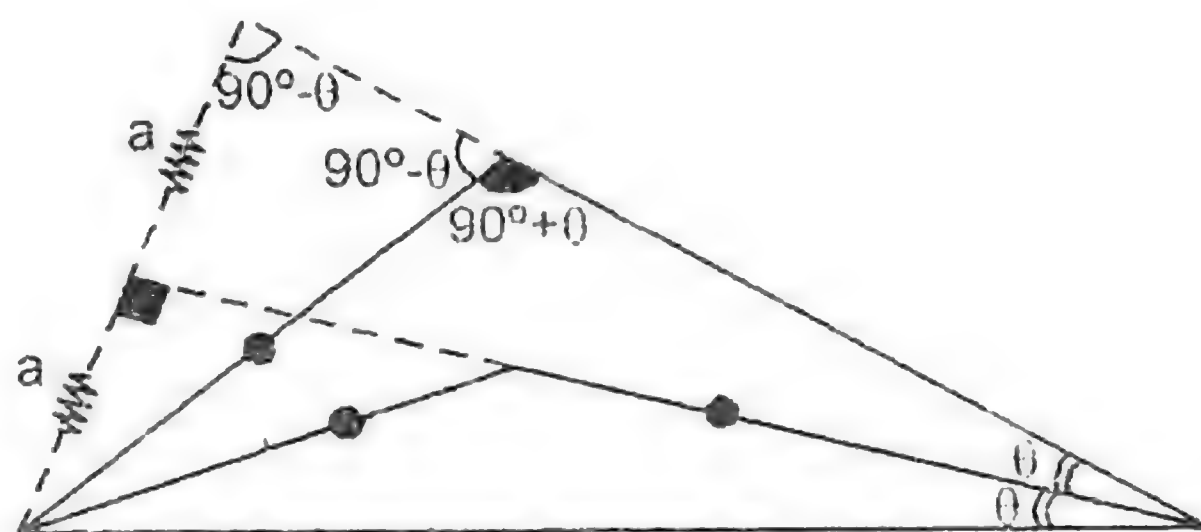
Paso N° 1

Se observa una bisectriz en la figura; entonces contruimos en ella un triángulo isósceles.



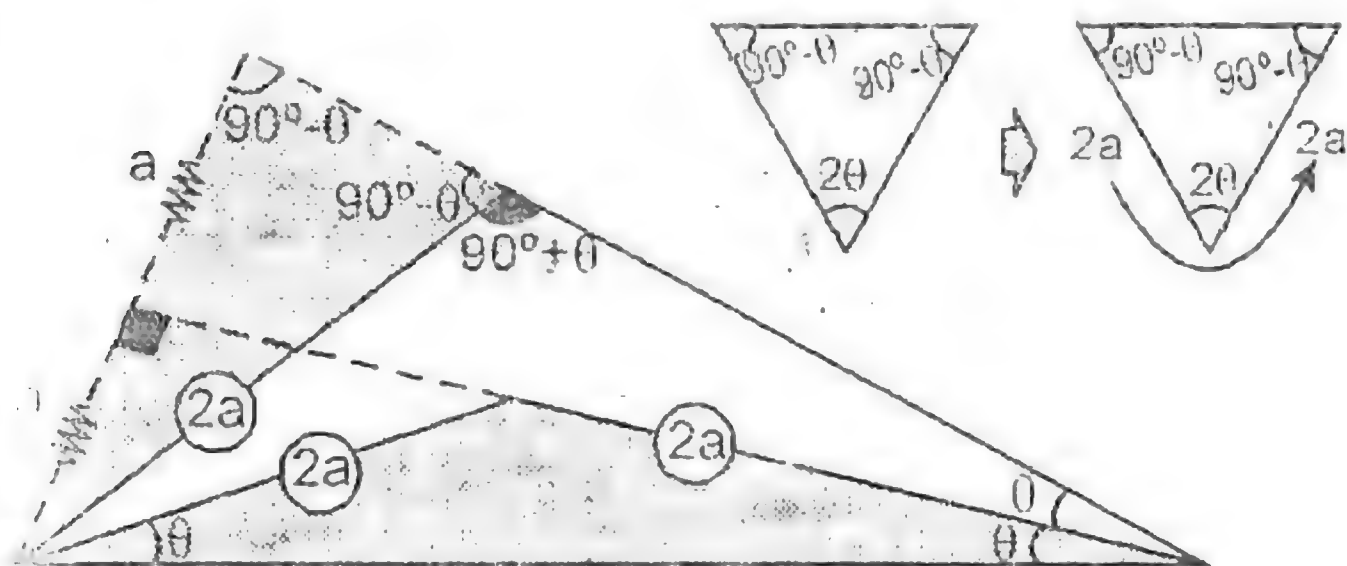
Paso N° 2

Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



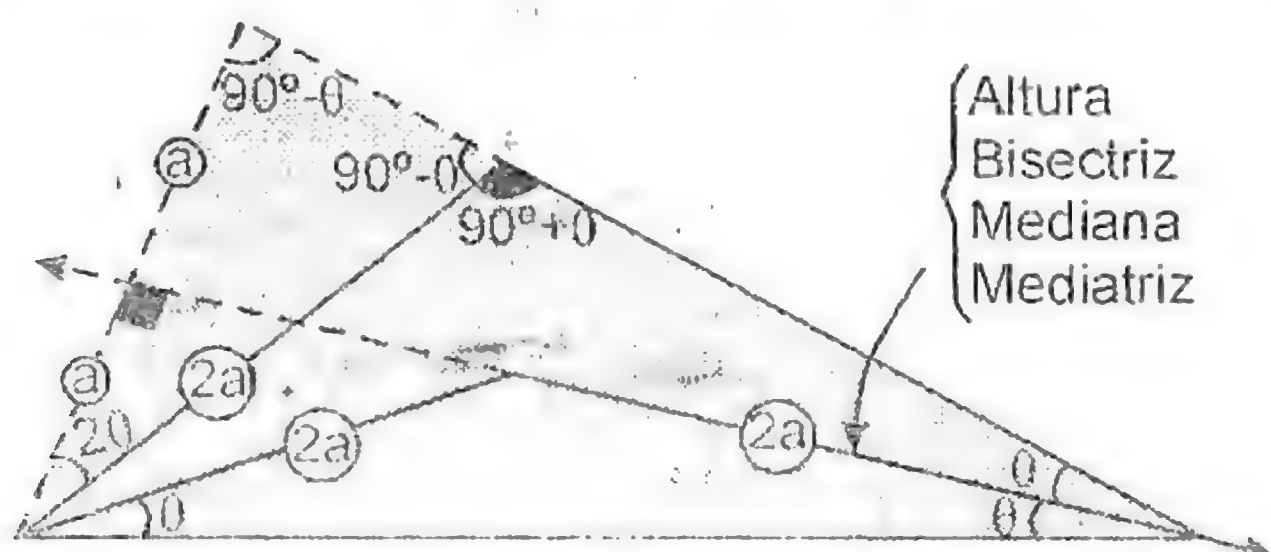
Paso N° 3

Se observa en la figura un triángulo isósceles y los iguales.

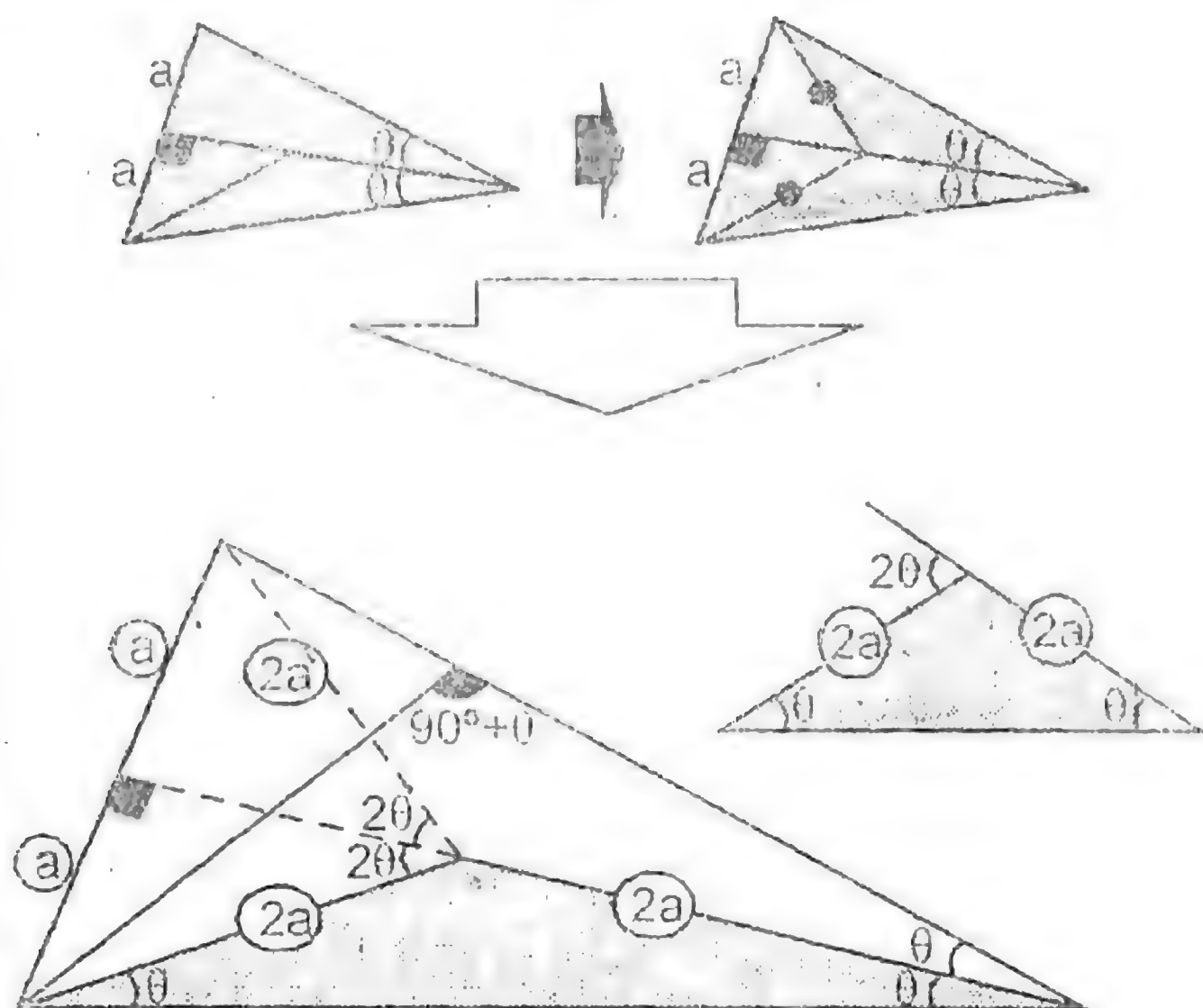


Paso N° 4

Se observa en la figura, que se cumple:

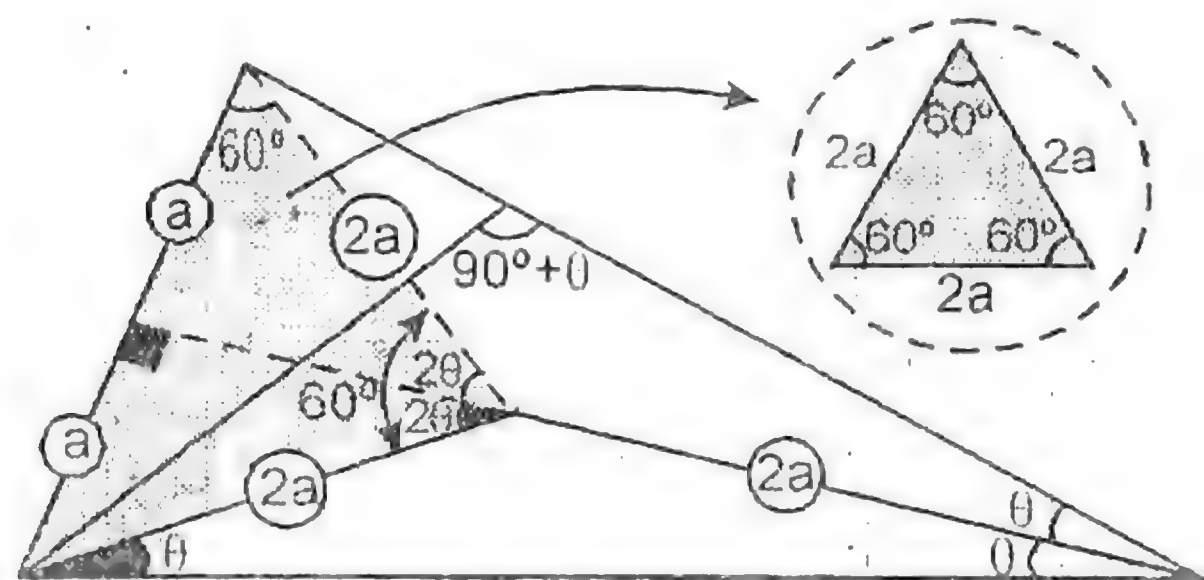


Se cumple:



Paso N° 5

Se observa en la figura interna un triángulo equilátero.

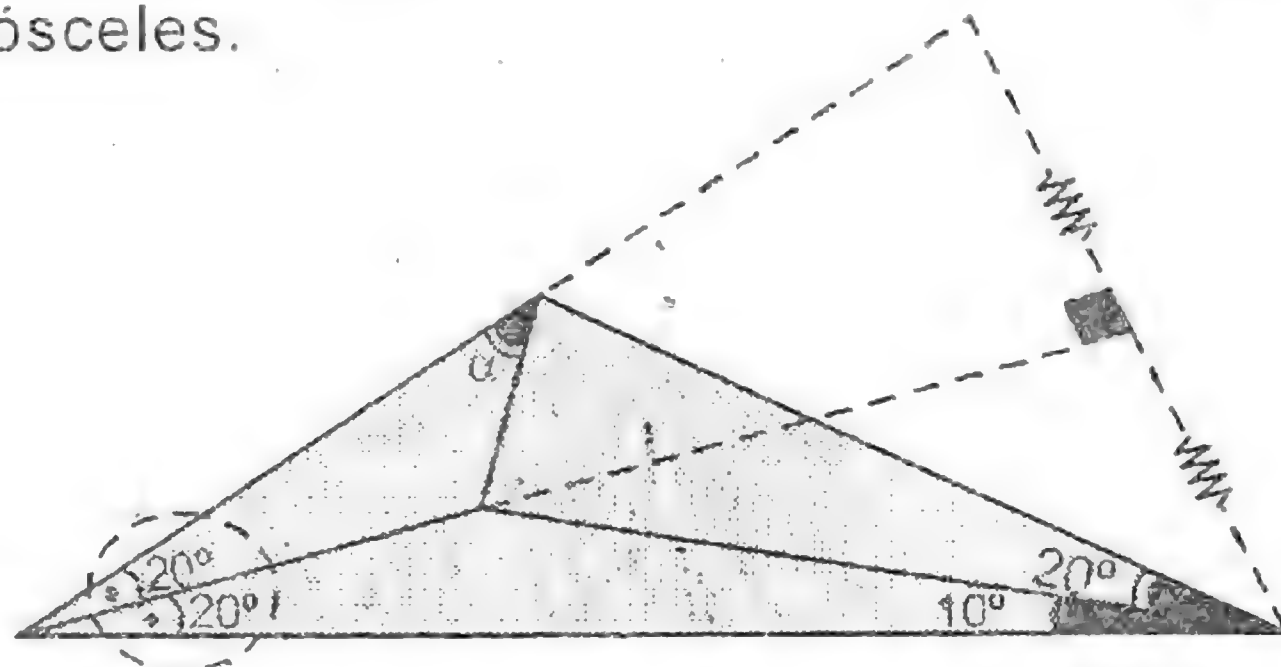


$$4\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$$

Solución N° 12

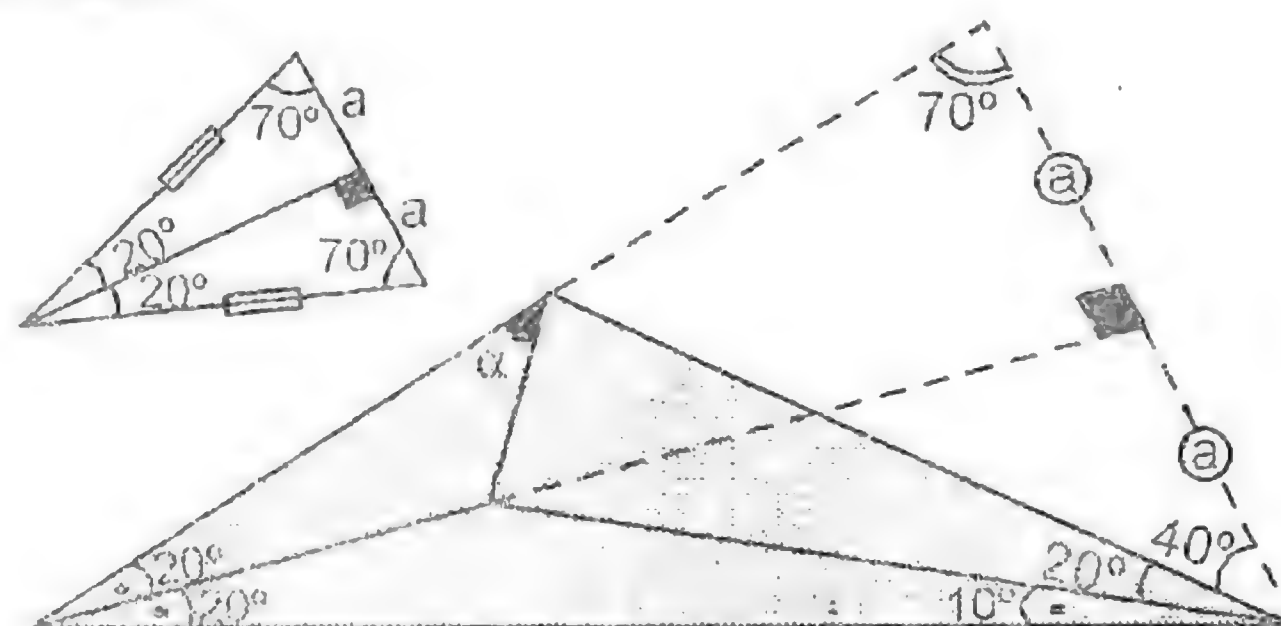
Paso N° 1

Se observa una bisectriz interna en la figura, entonces construimos en ella un triángulo isósceles.

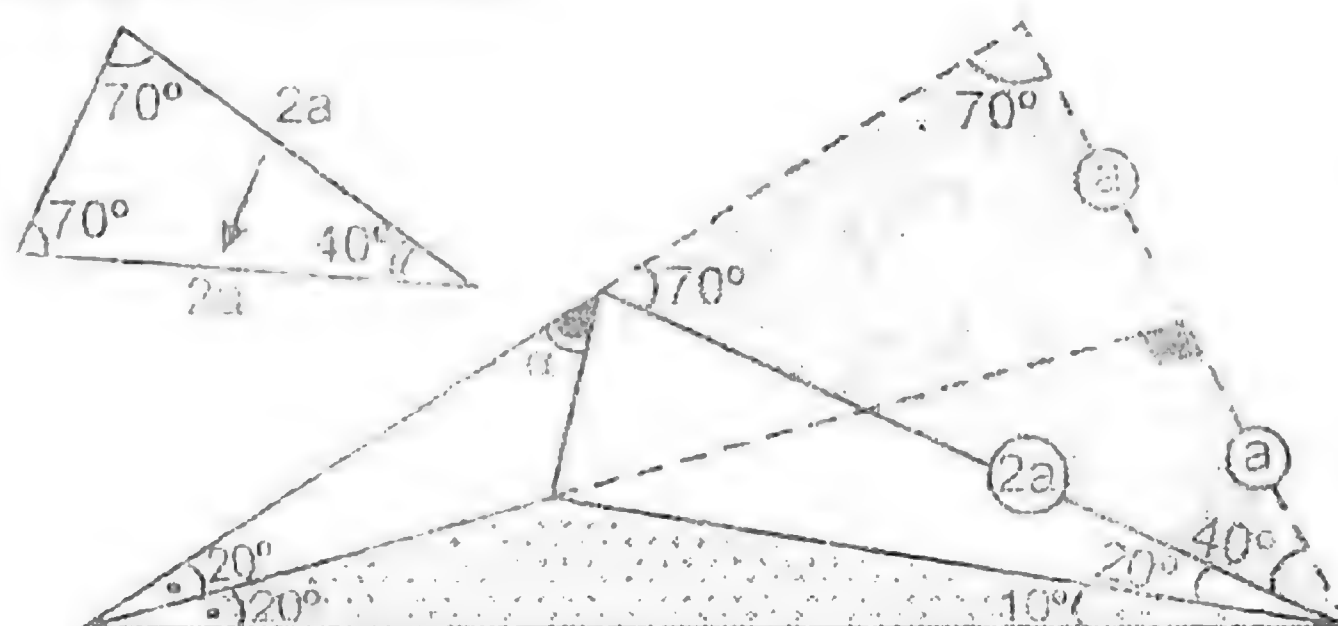


Paso N° 2

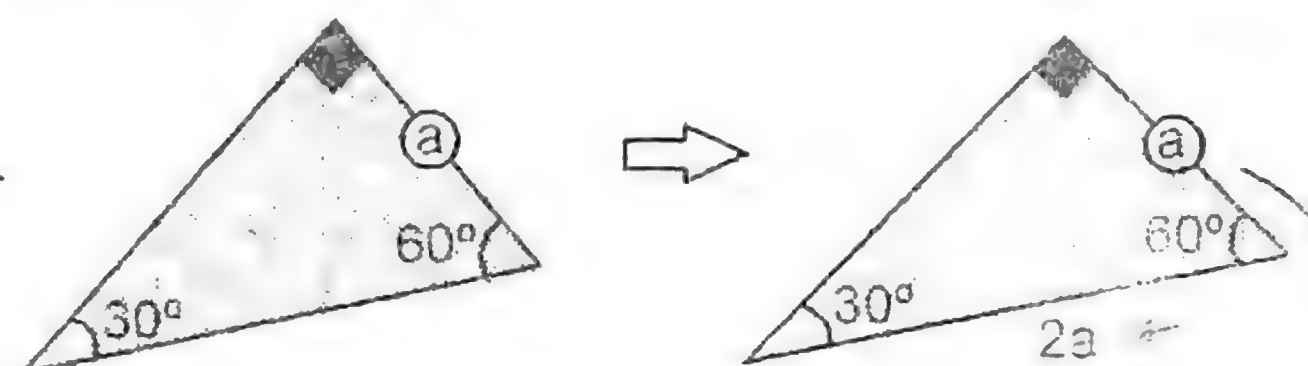
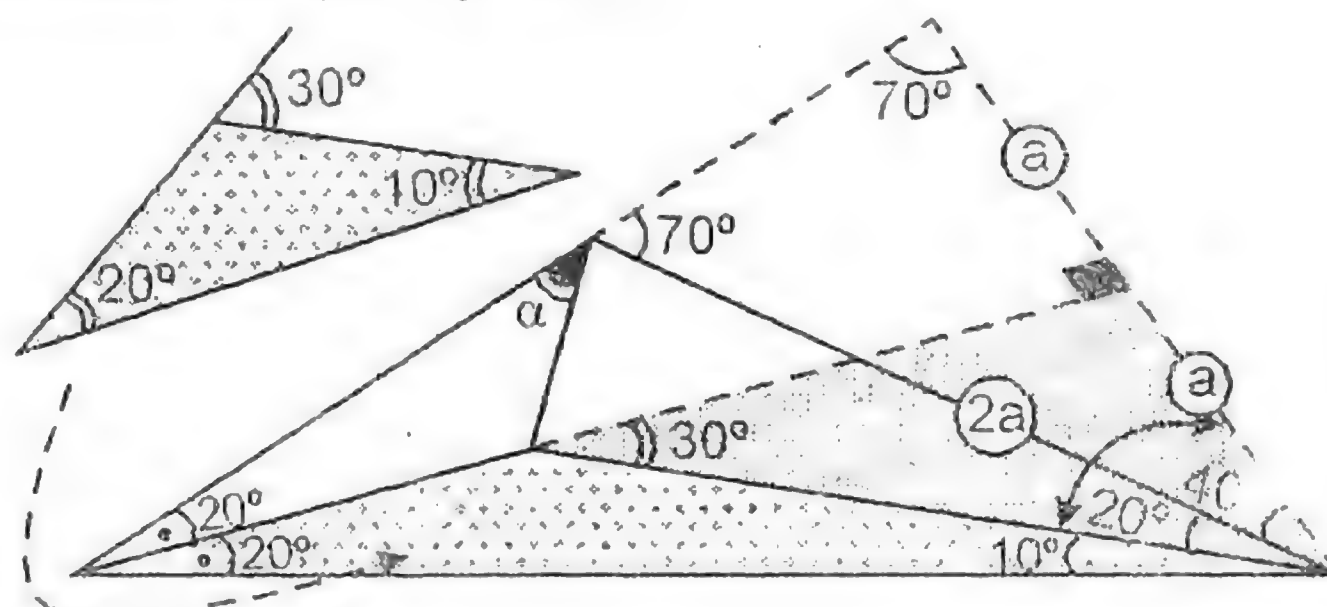
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



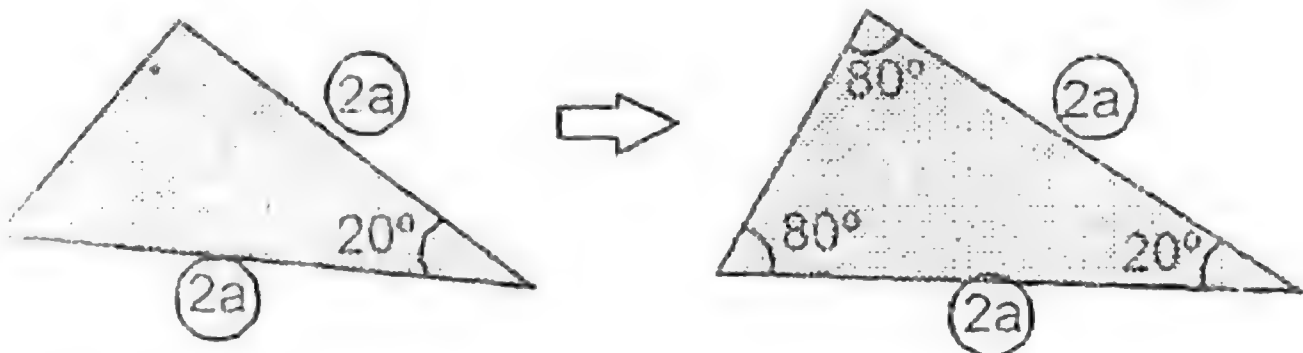
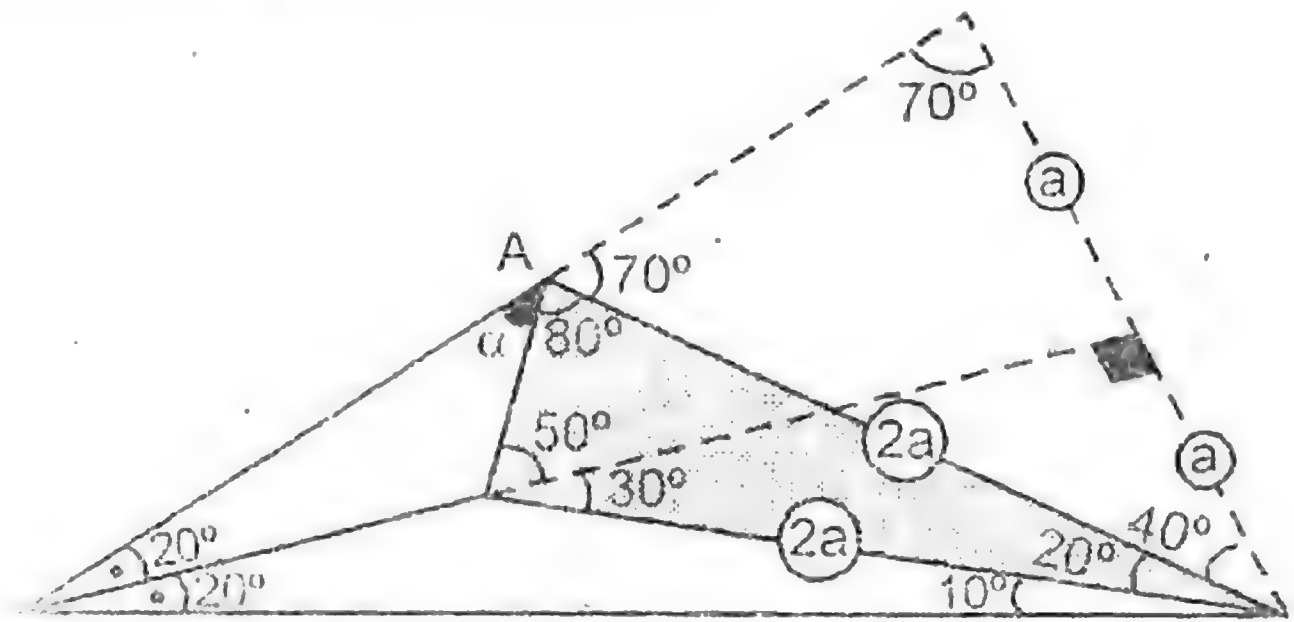
Paso N° 3: Se observa en la figura un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)

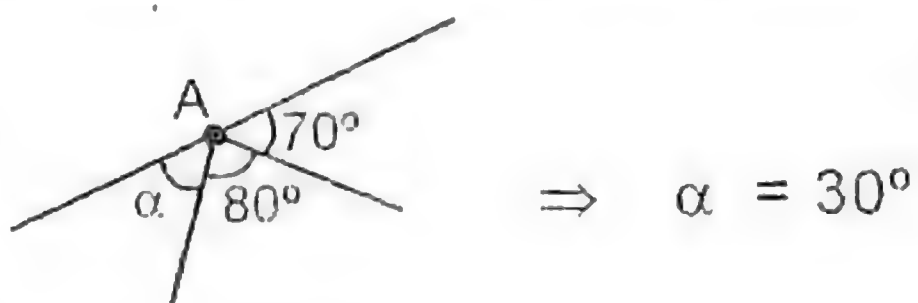


Paso N° 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles donde cumple:



Paso N° 6

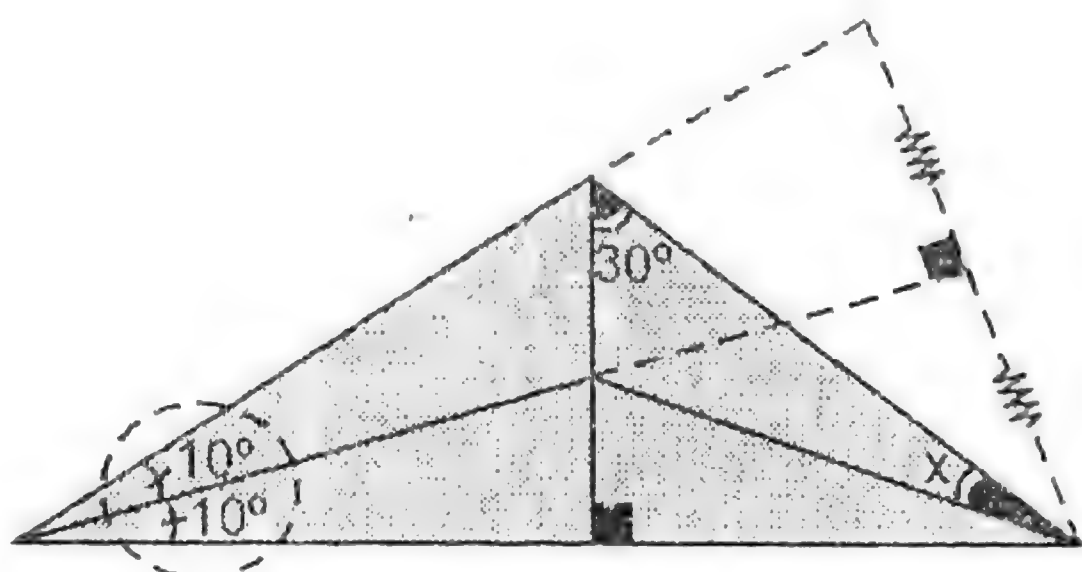
Ahora observamos un ángulo llano en "A".



Solución N° 13

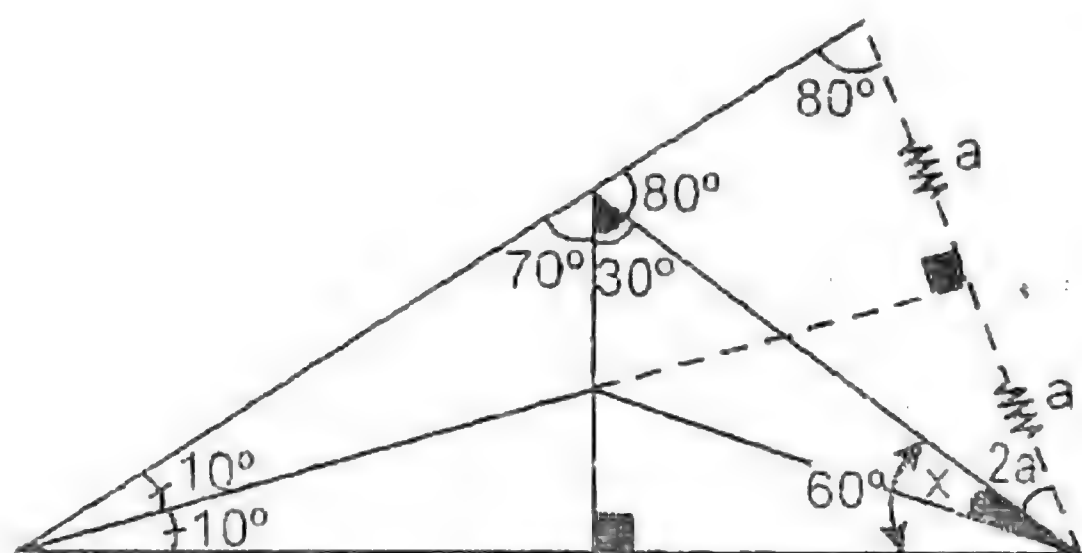
Paso N° 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos exteriormente un triángulo isósceles.



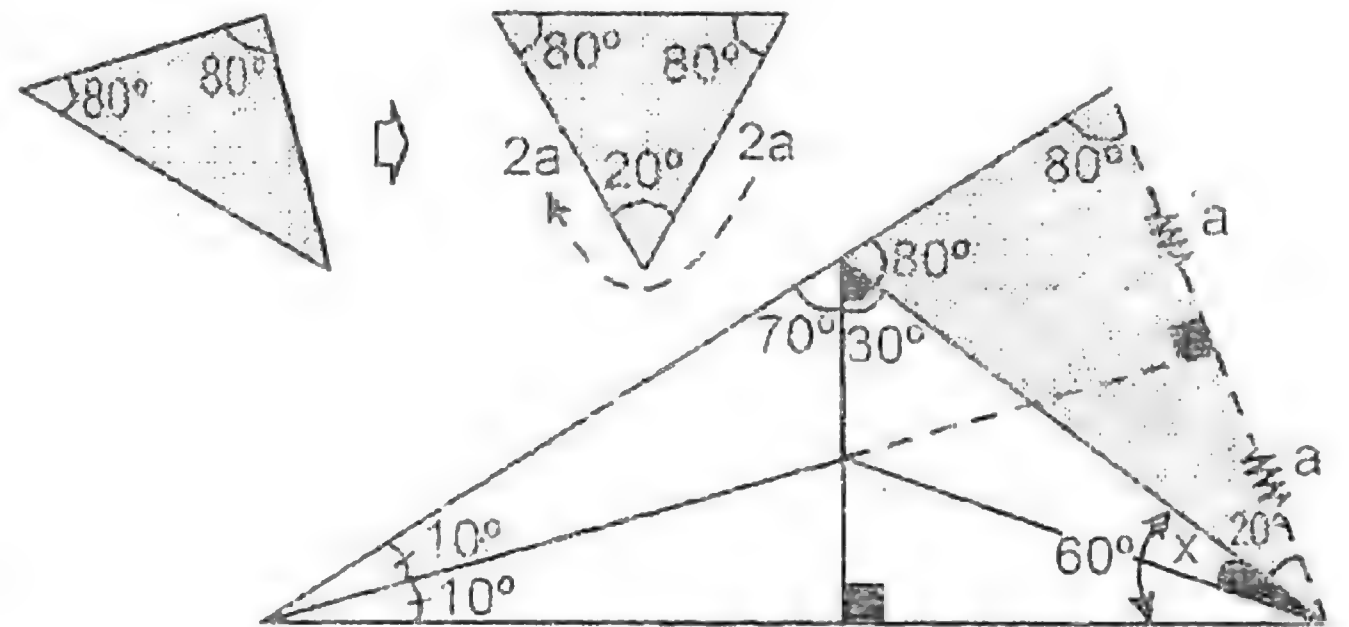
Paso N° 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



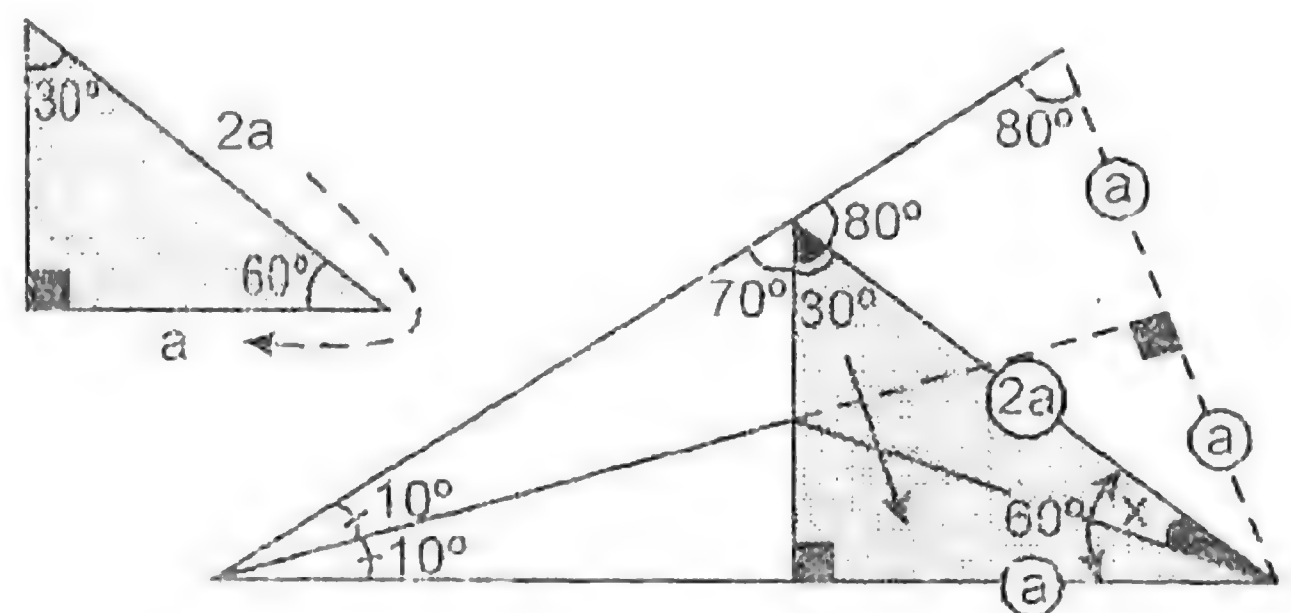
Paso N° 3

Se observa un triángulo isósceles interno al triángulo construido.



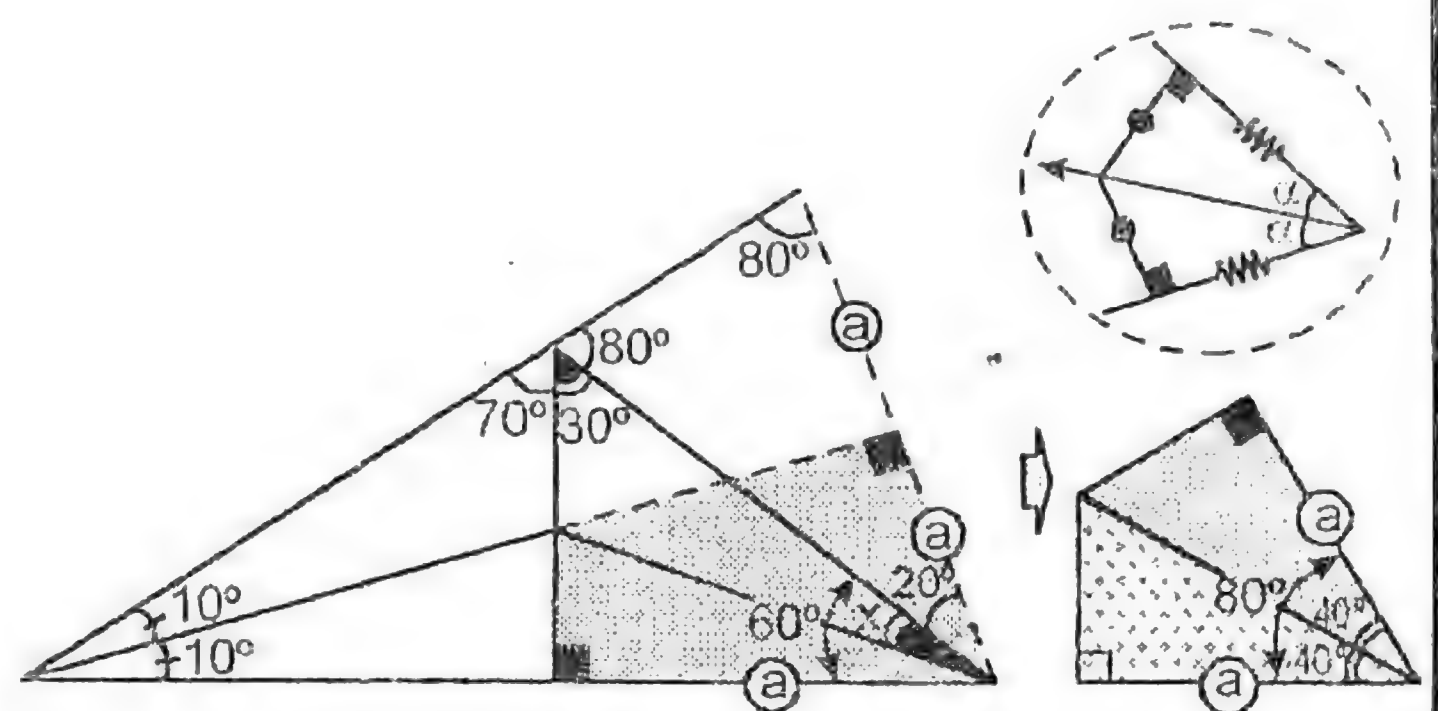
Paso N° 4

Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°



Paso N° 5

Ahora se observa la siguiente figura donde se tiene la propiedad de la bisectriz.

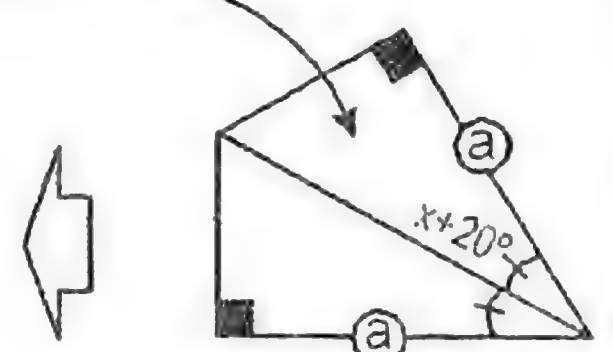


Se cumple

Por la propiedad

$$\therefore x + 20^\circ = 40^\circ$$

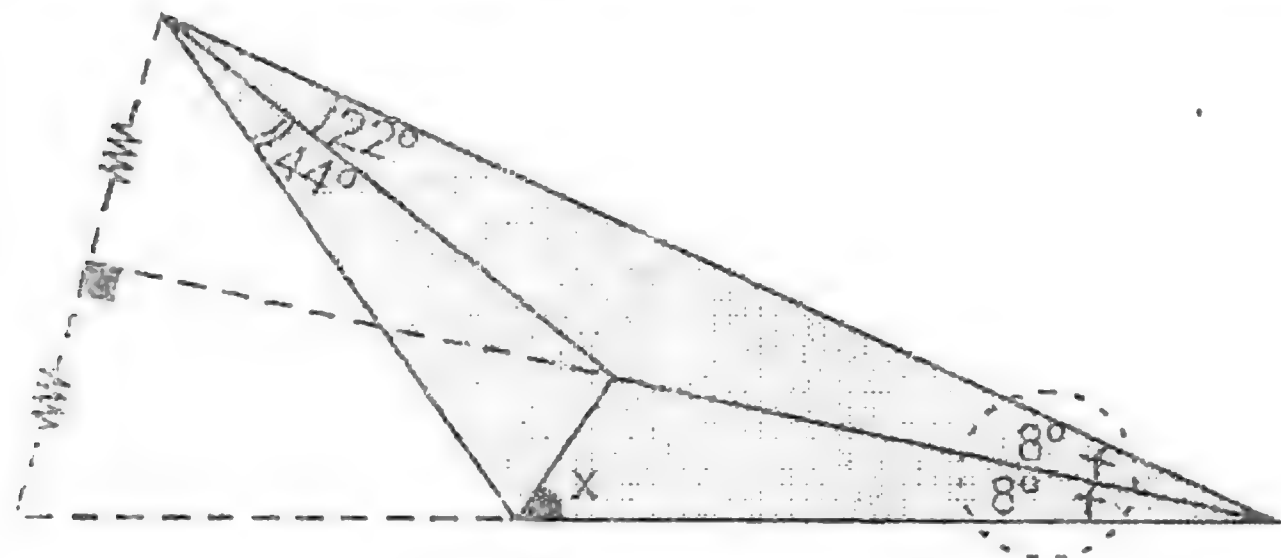
$$x = 20^\circ$$



Solución N° 14

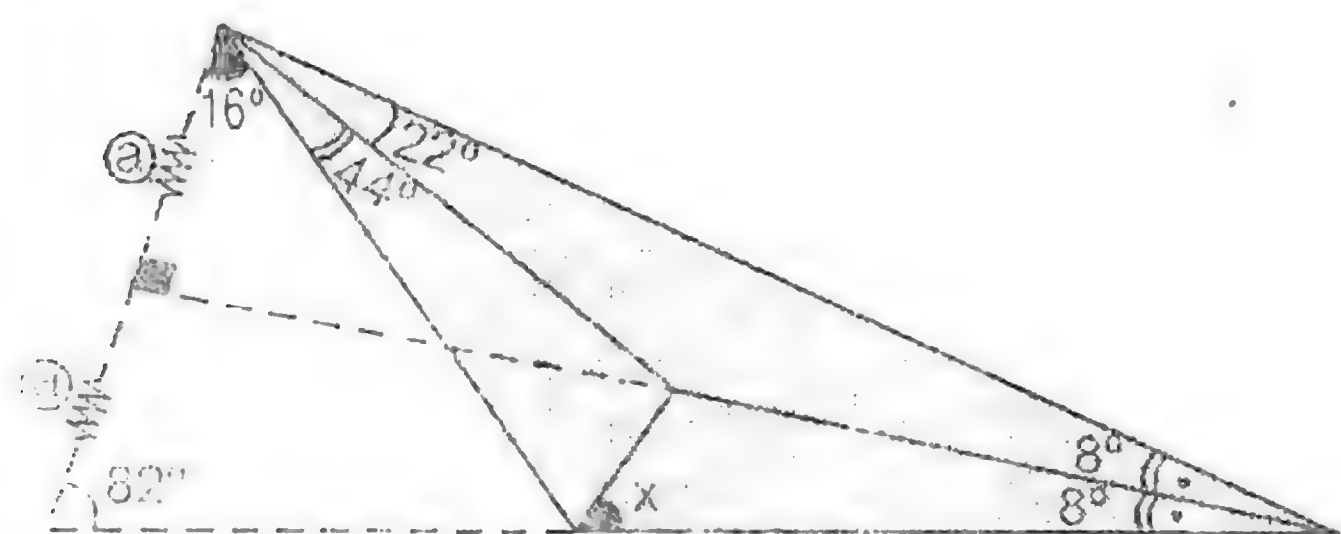
Paso N° 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos un triángulo isósceles exteriormente.



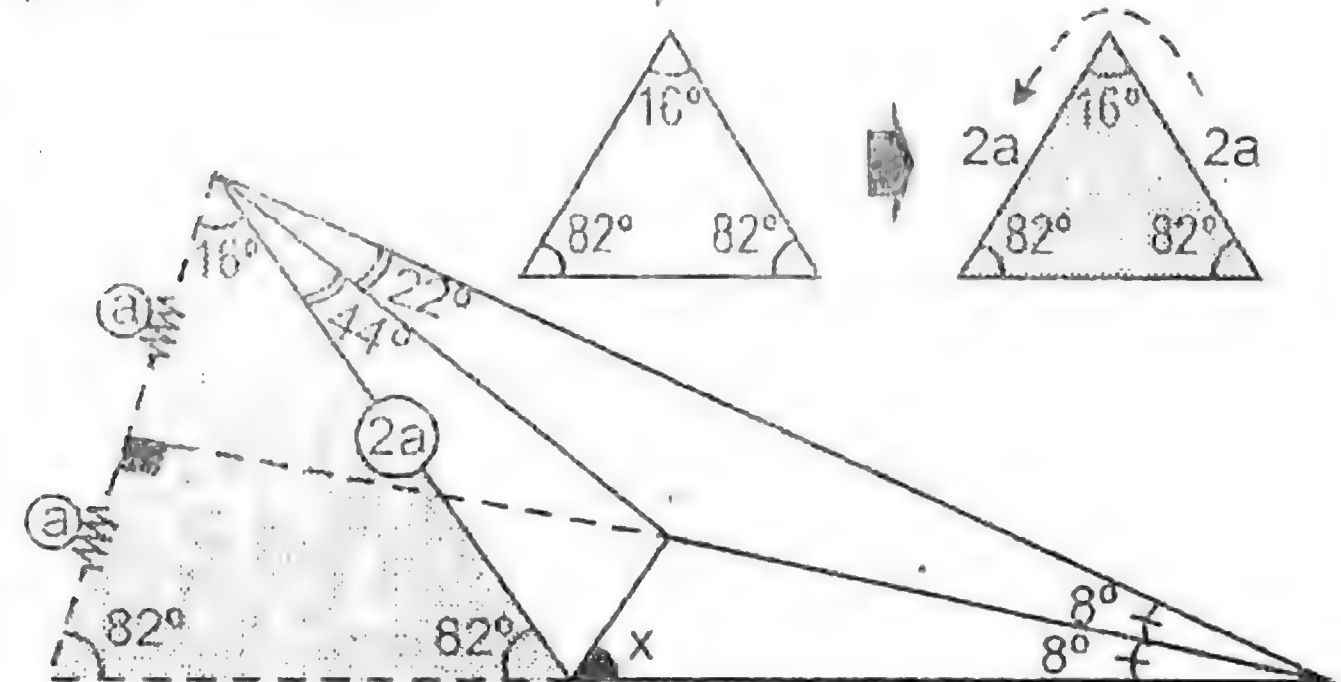
Paso N° 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



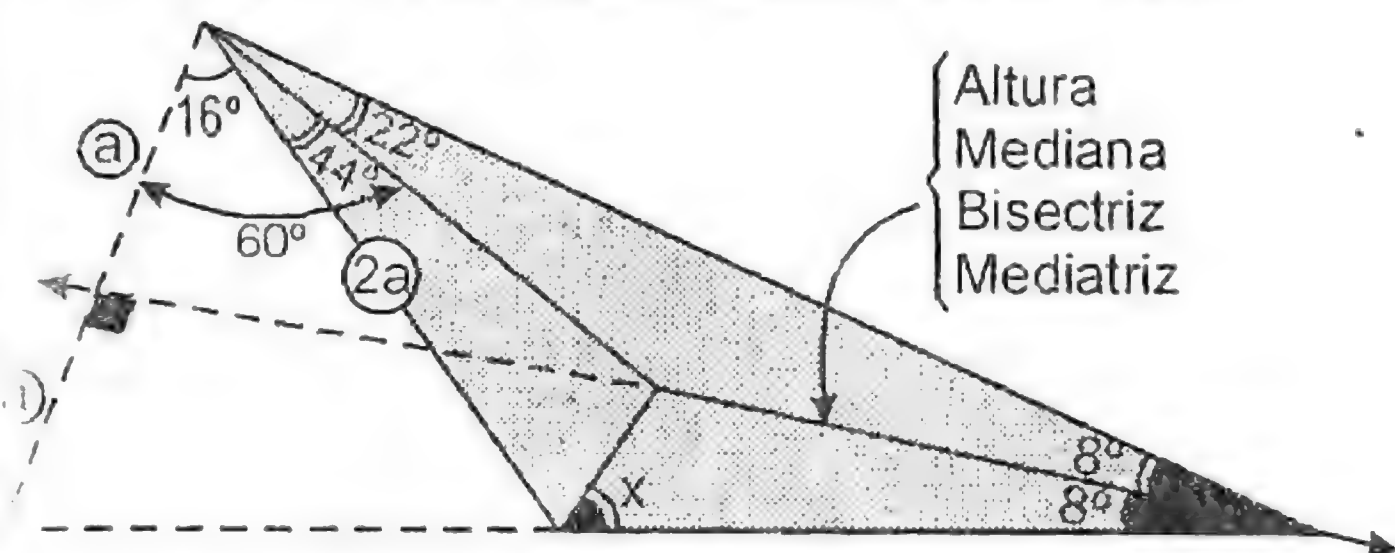
Paso N° 3

Se observa un triángulo isósceles interior a la figura obtenida.

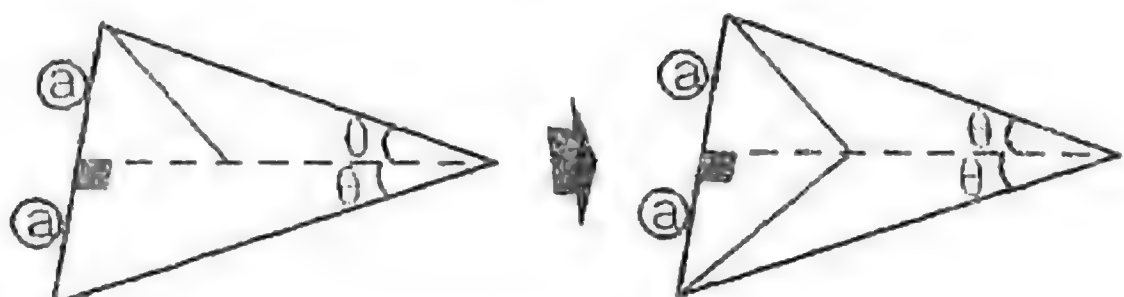


Paso N° 4

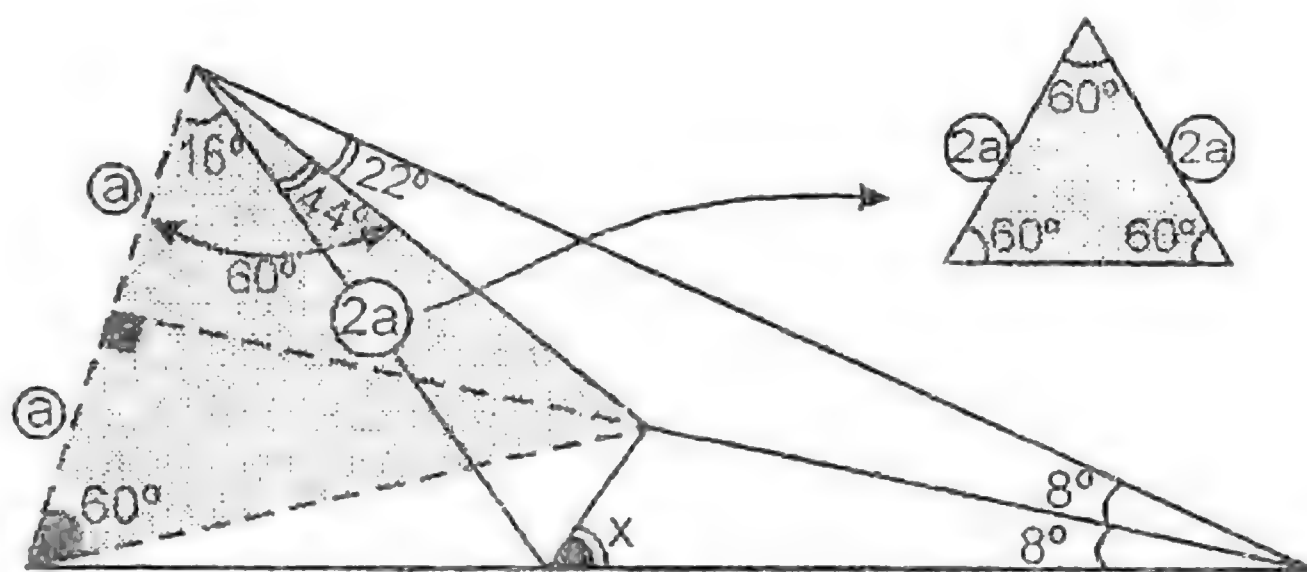
Se observa en la figura donde se cumple:



Donde se cumple:

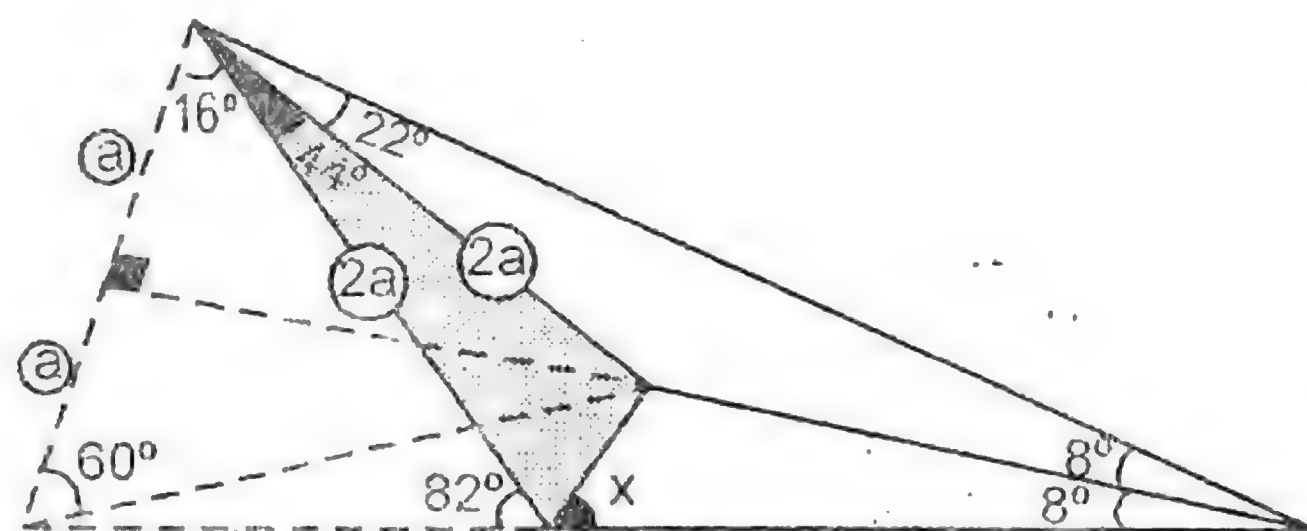


Paso N° 5: En la figura sombreada también se observa que se obtiene un triángulo equilátero



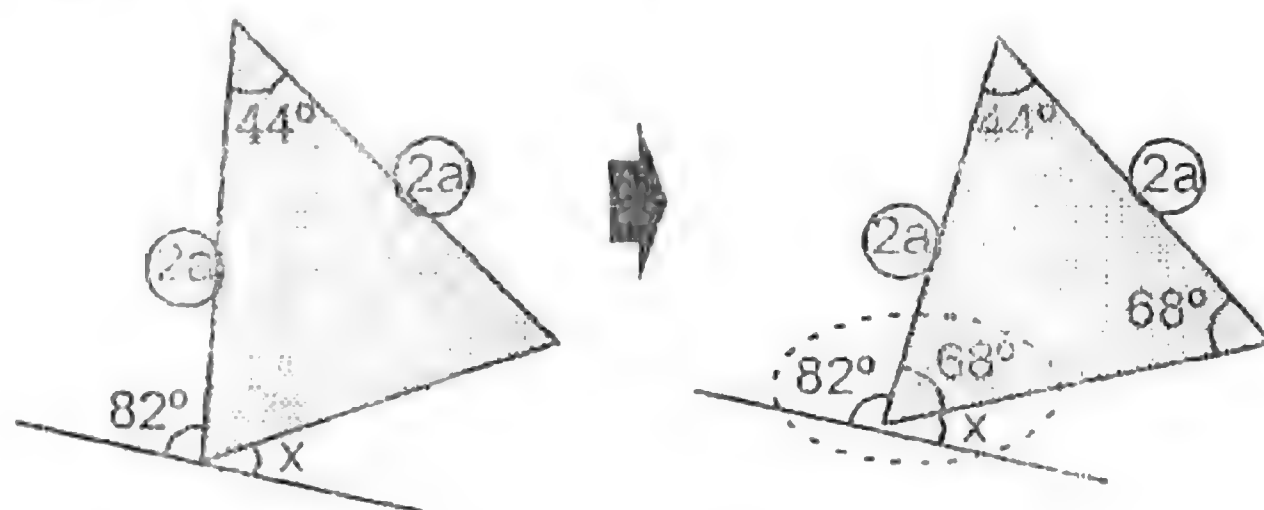
Paso N° 6

Luego se obtiene un nuevo triángulo isósceles interno a la figura



Paso N° 7

En la figura sombreada se observa:



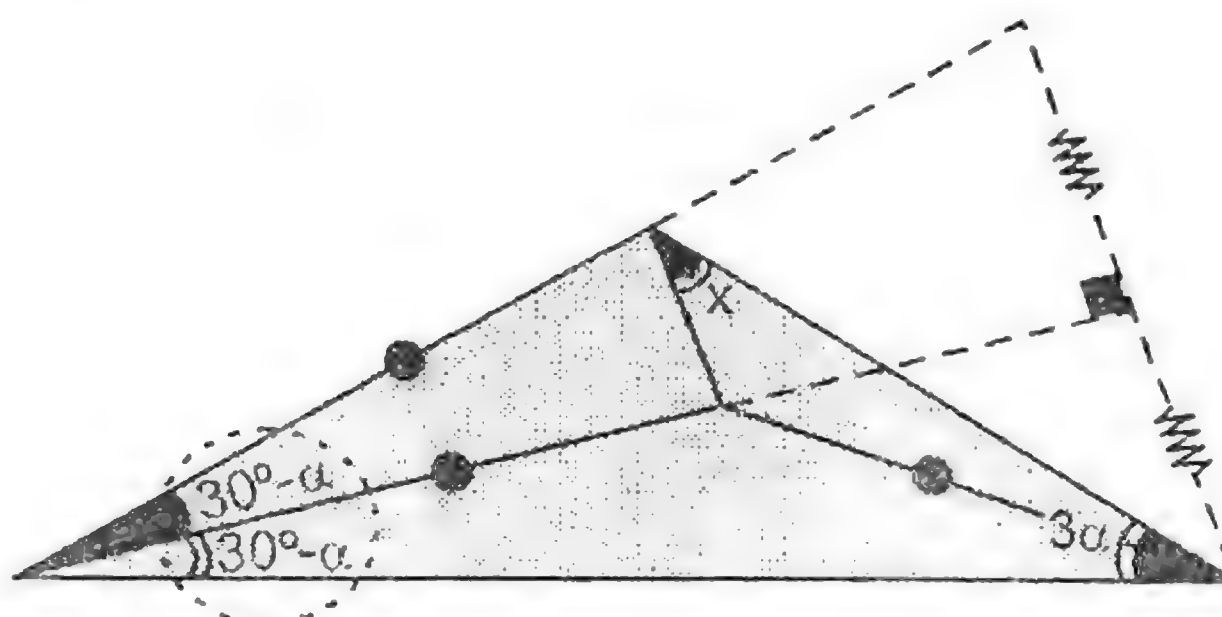
∴ En el ángulo llano obtenemos:

$$82^\circ + 68^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

Solución N° 15

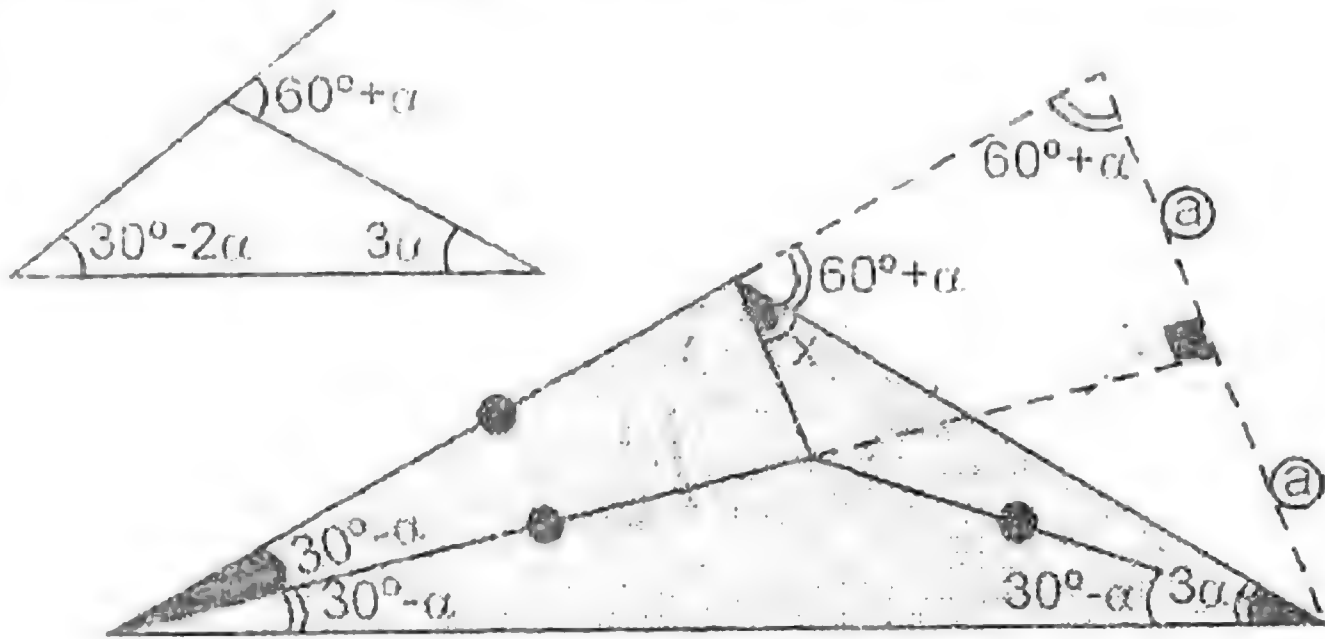
Paso N° 1

Se observa una bisectriz interior y se traza un triángulo isósceles externamente.



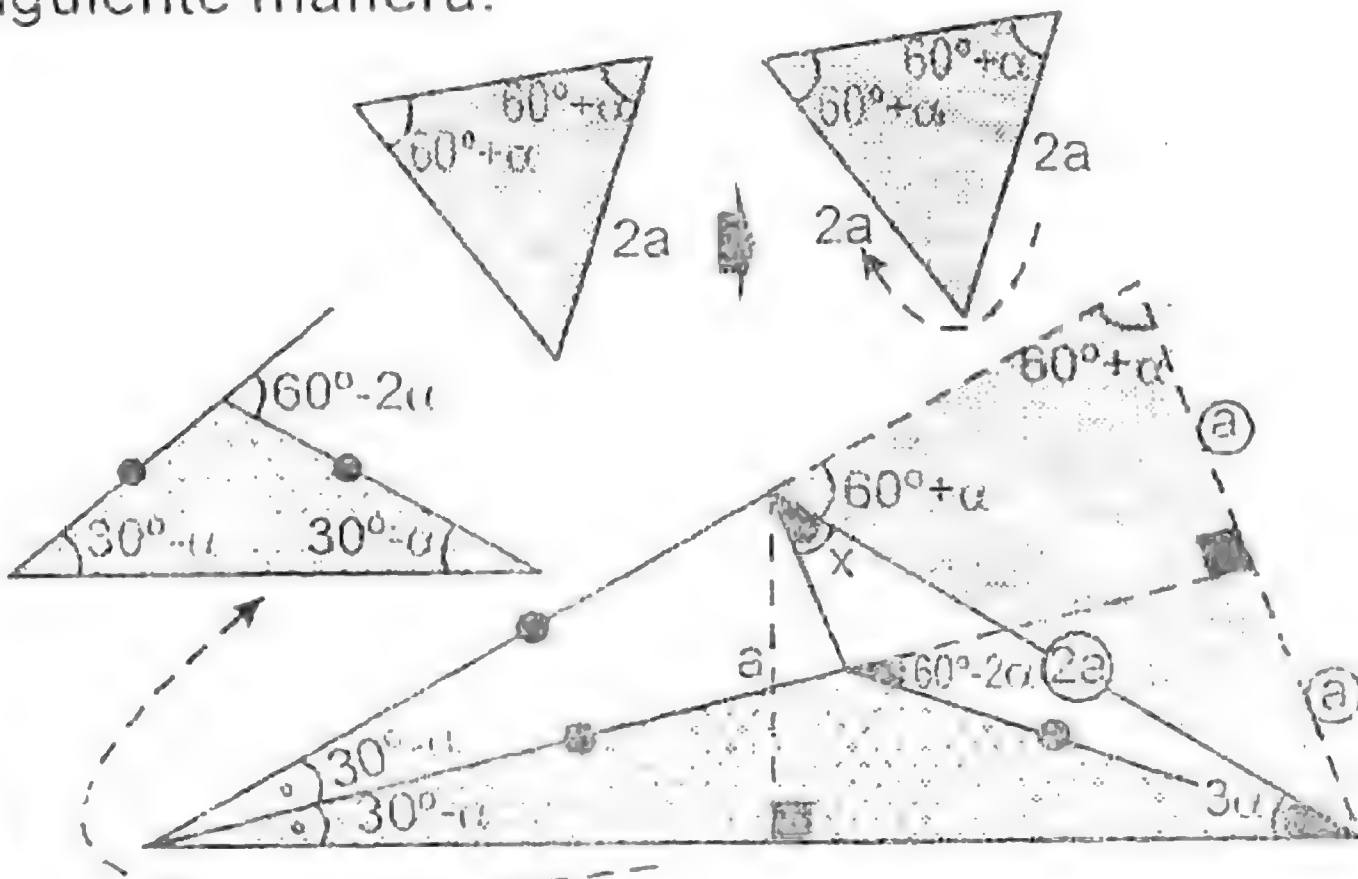
Paso N° 2

Completamos ángulos internos en la figura.



Paso N° 3

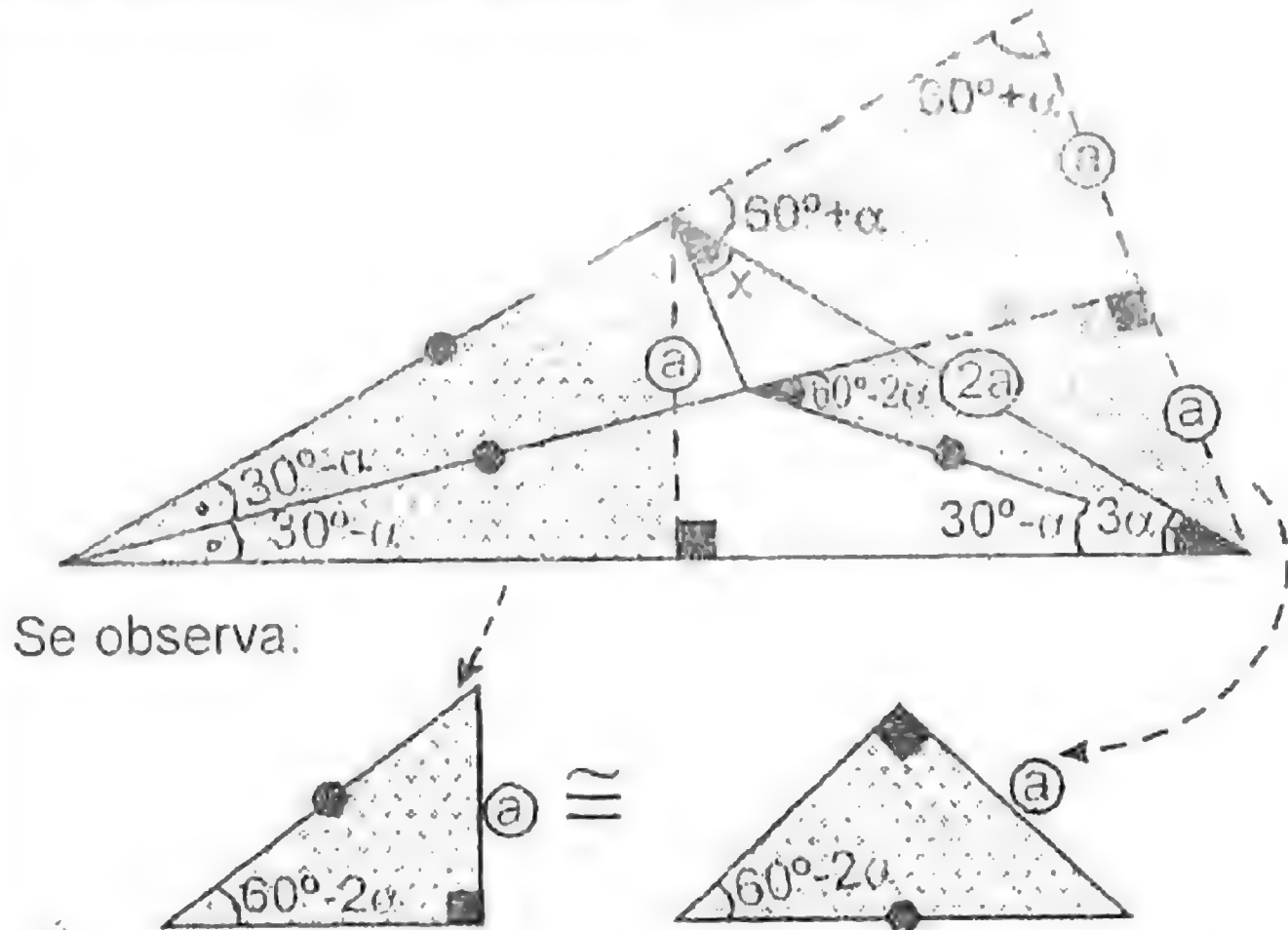
Se observa un triángulo isósceles de la siguiente manera.



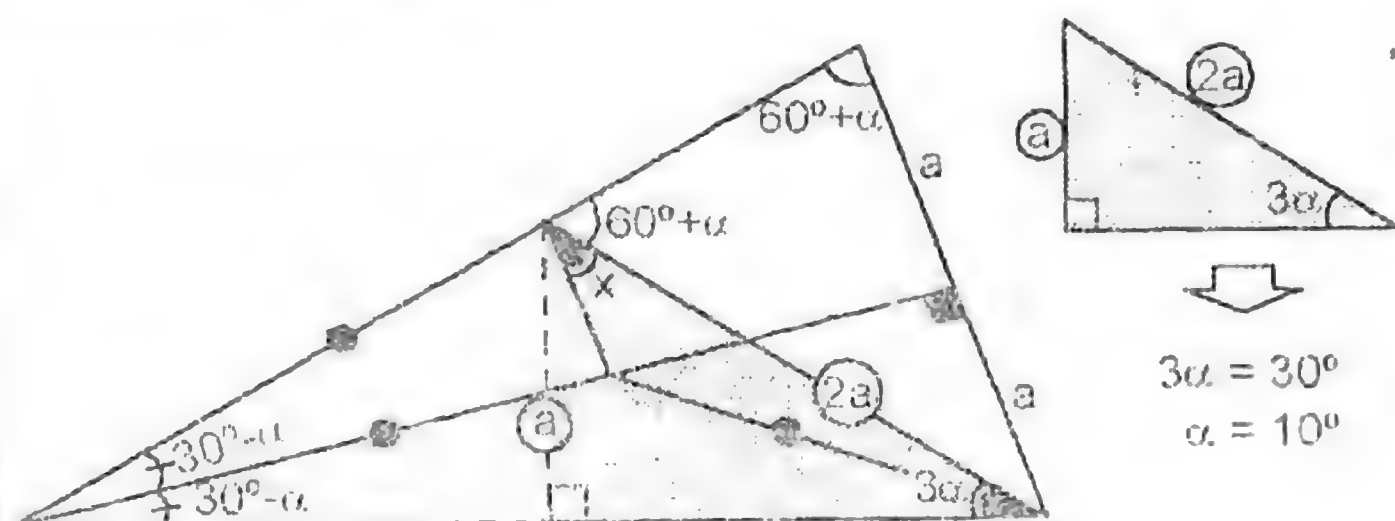
60

Paso N° 4

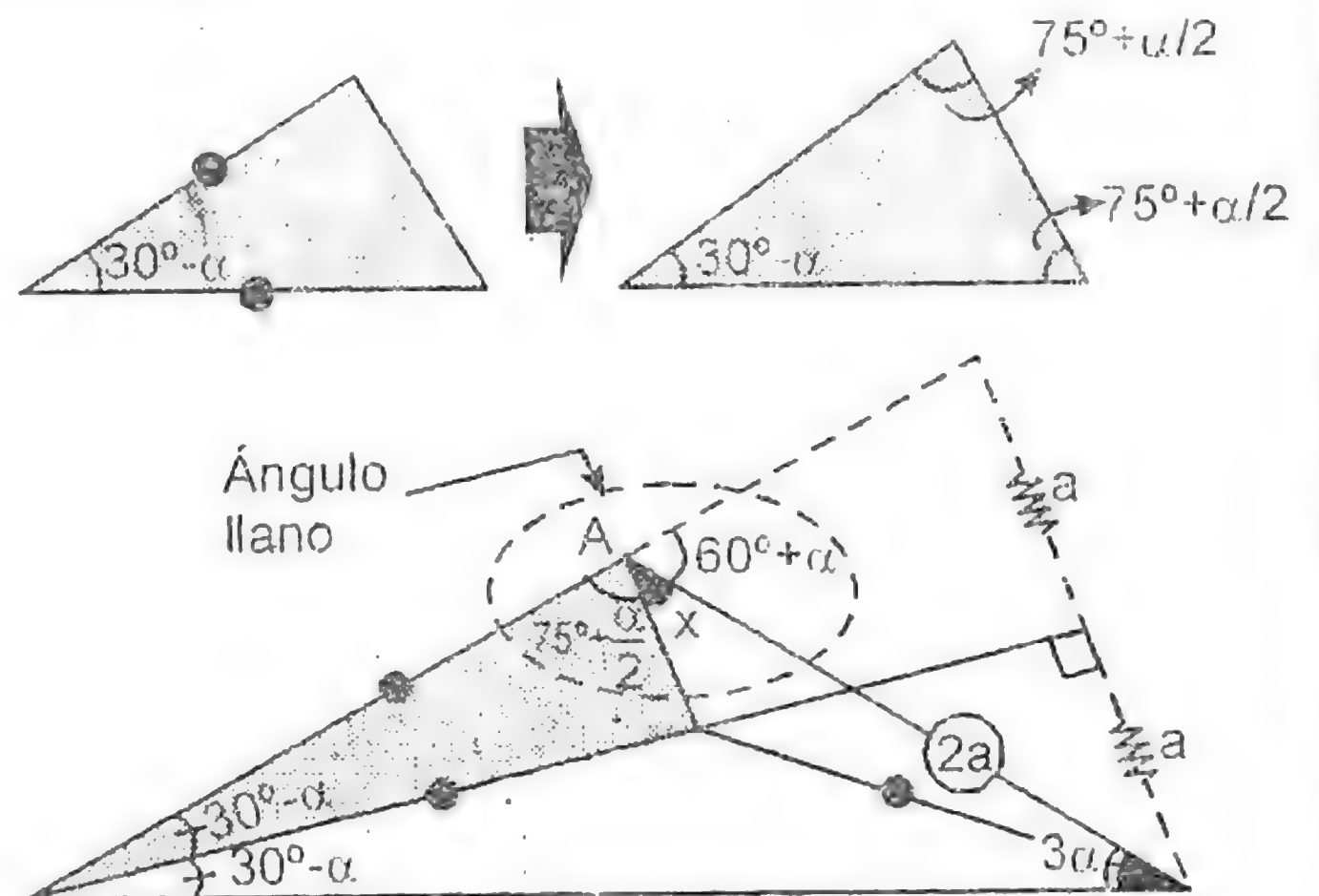
Hacemos el siguiente trazo, para encontrar rectángulos, triángulos congruentes.



Paso N° 5: Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60° en la figura sombreada donde se cumple:



Paso N° 6: Finalmente tenemos la figura, sombreada y se obtiene las siguientes relaciones.

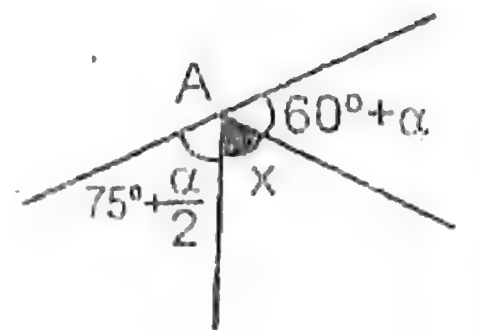


$$75^\circ + \frac{\alpha}{2} + x + 60^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\frac{3\alpha}{2} + x = 45^\circ$$

Pero: $\alpha = 10^\circ$

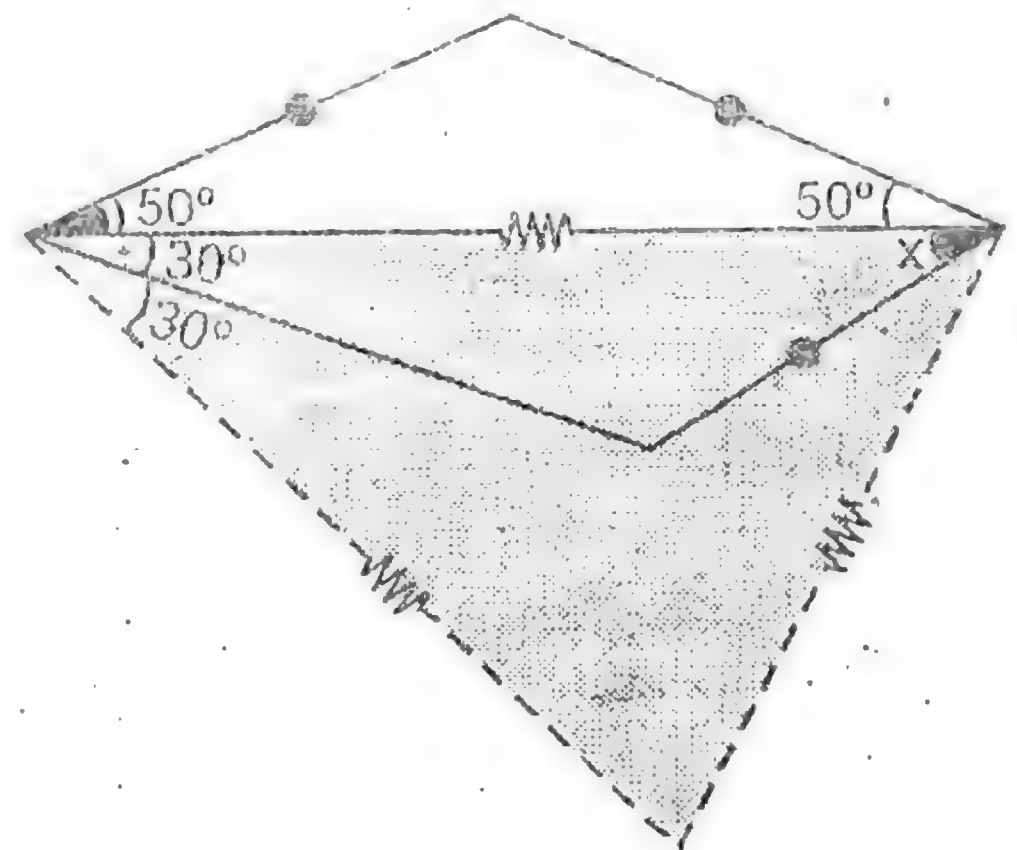
$$\Rightarrow x = 30^\circ$$



Solución N° 16

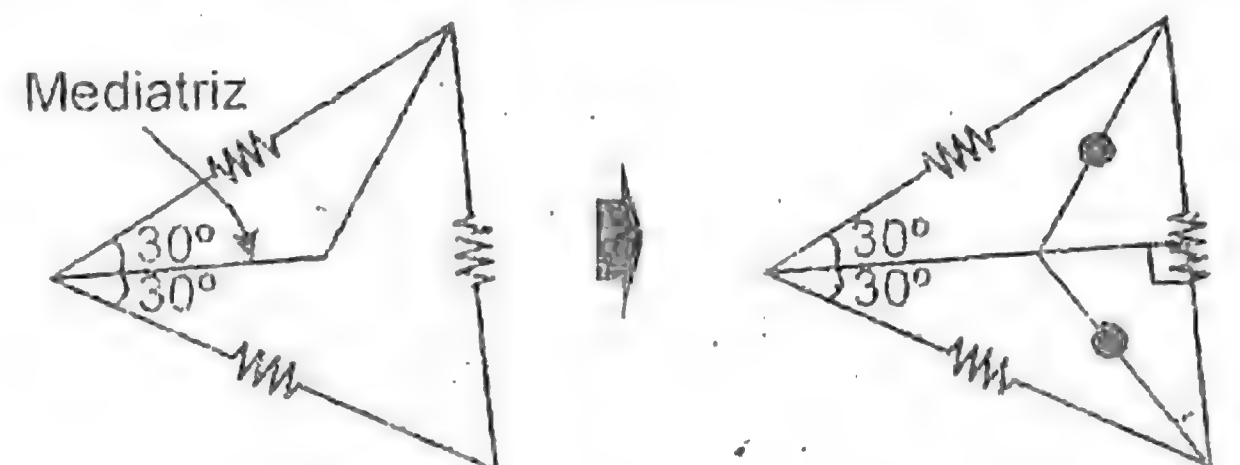
Paso N° 1

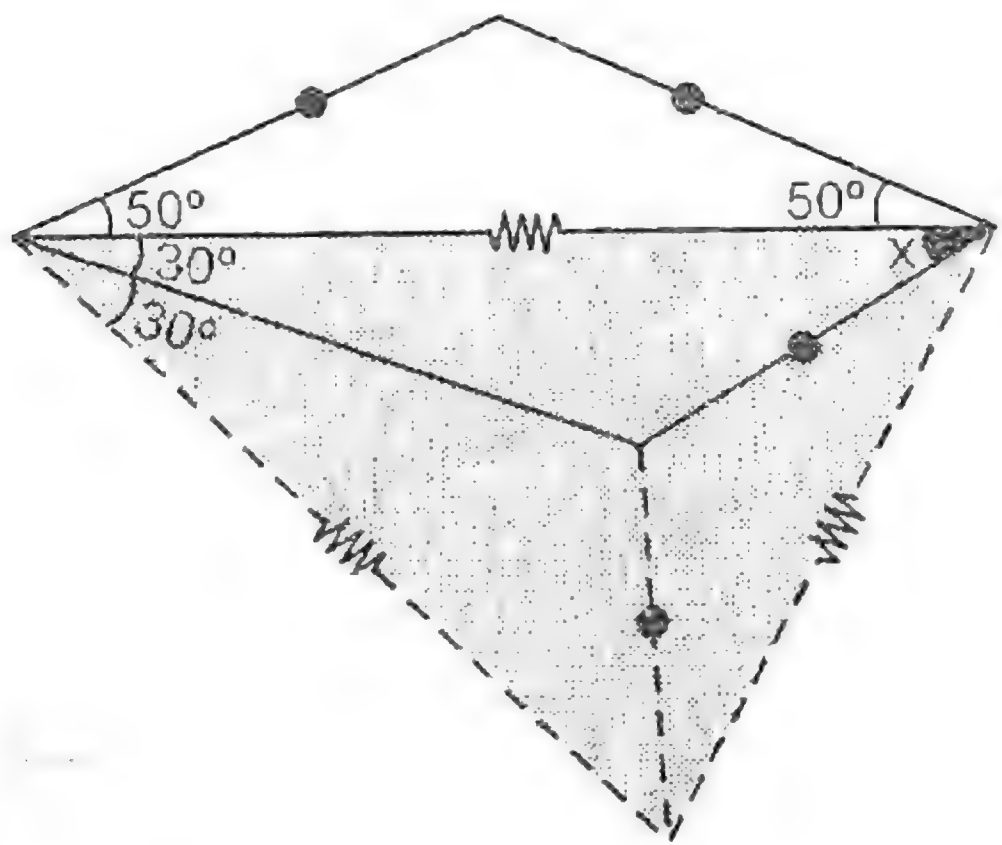
Se observa en la figura un ángulo de 30°, entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente (tercer criterio de construcción)



Paso N° 2

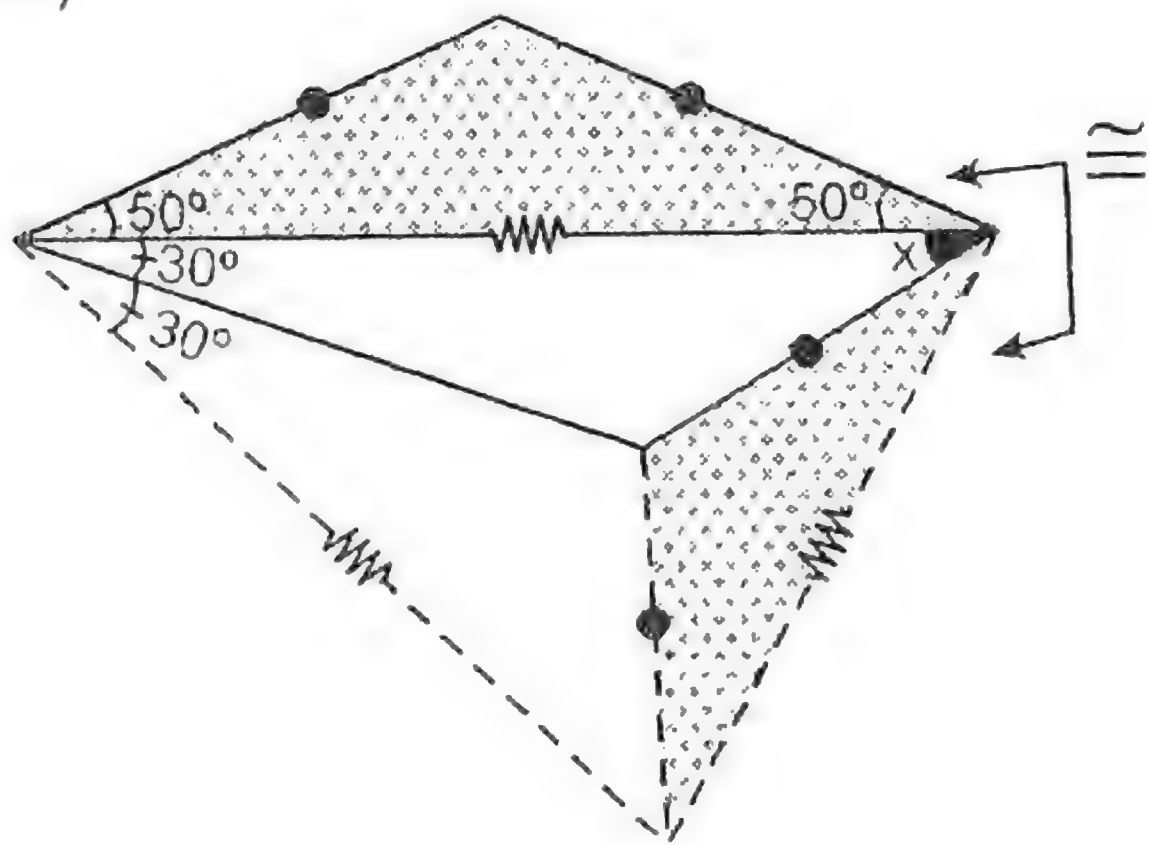
En el triángulo equilátero formado, se cumple:





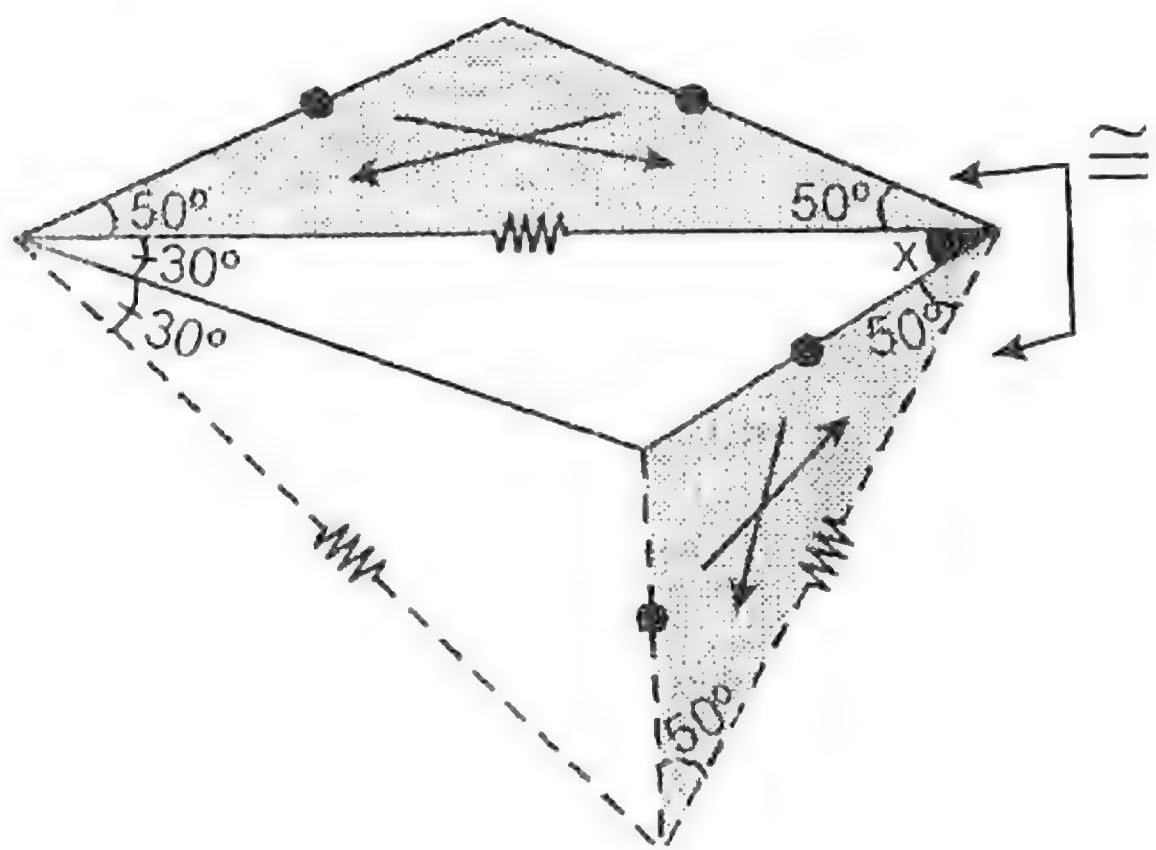
Paso N° 3

Se observa dos triángulos congruentes, caso (D.L.L.)



Paso N° 4

Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".



Luego la figura se cumple:

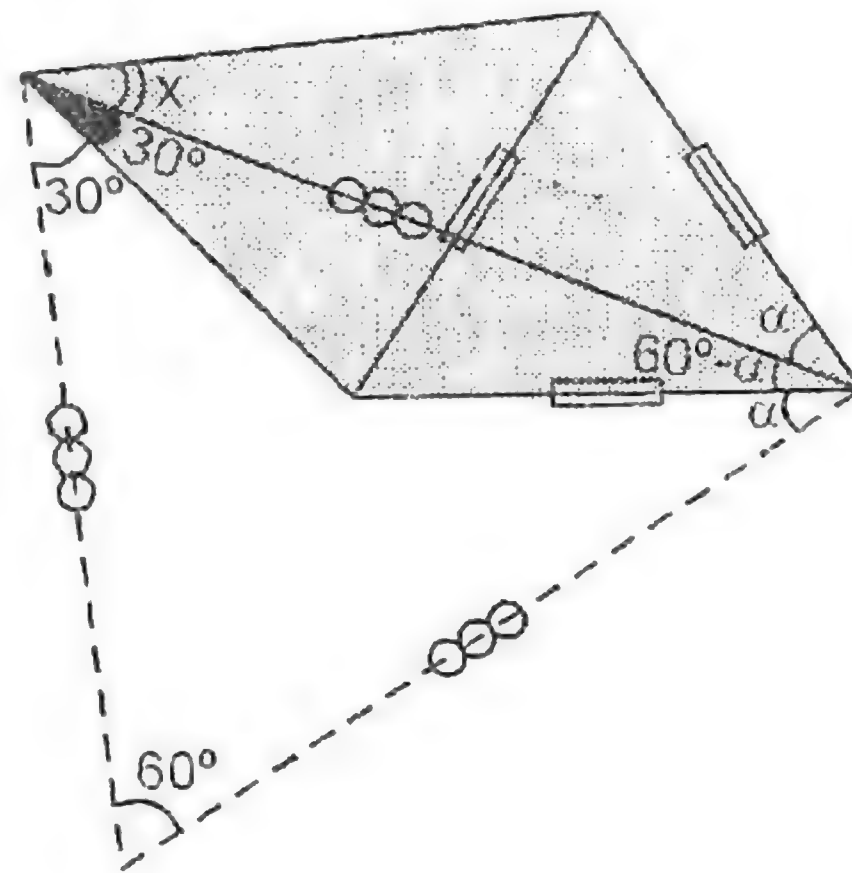
$$\therefore x + 50^\circ = 60^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

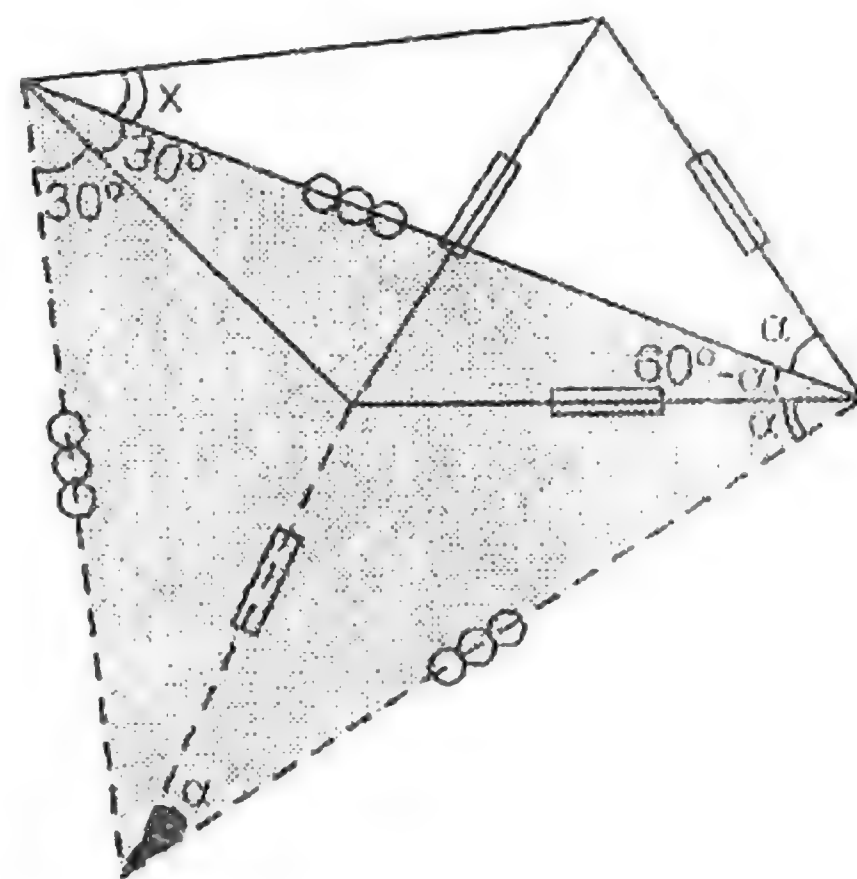
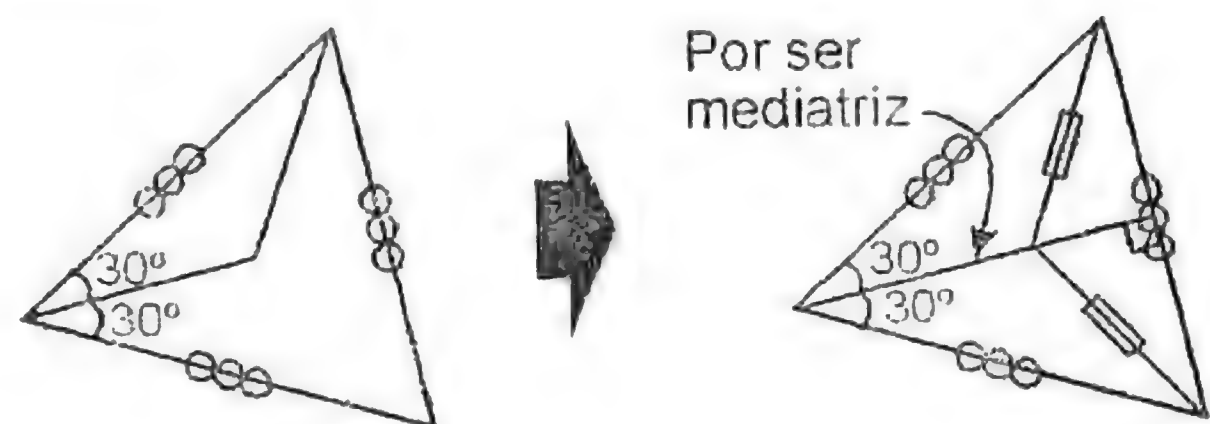
Solución N° 17

Paso N° 1

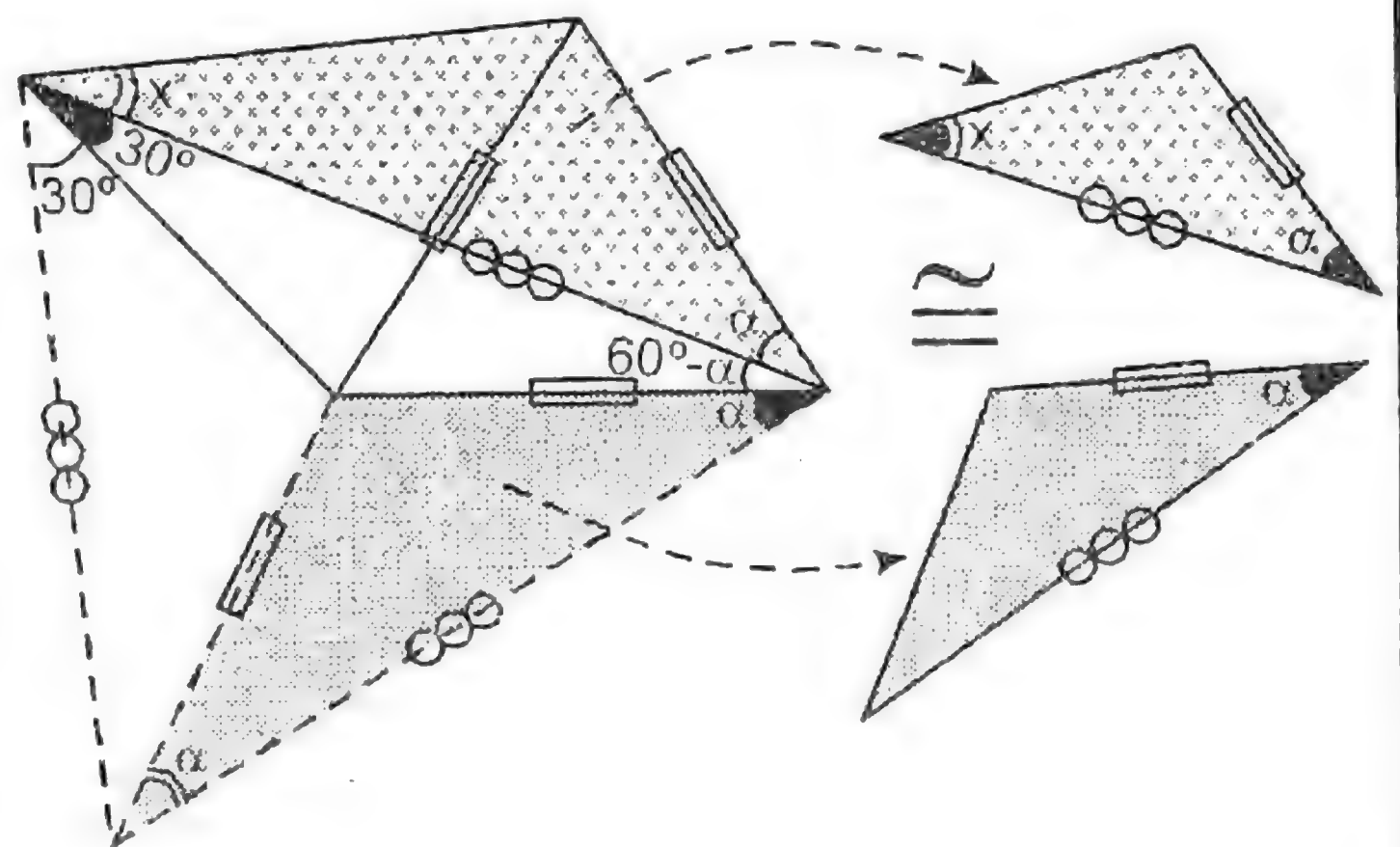
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente.



Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

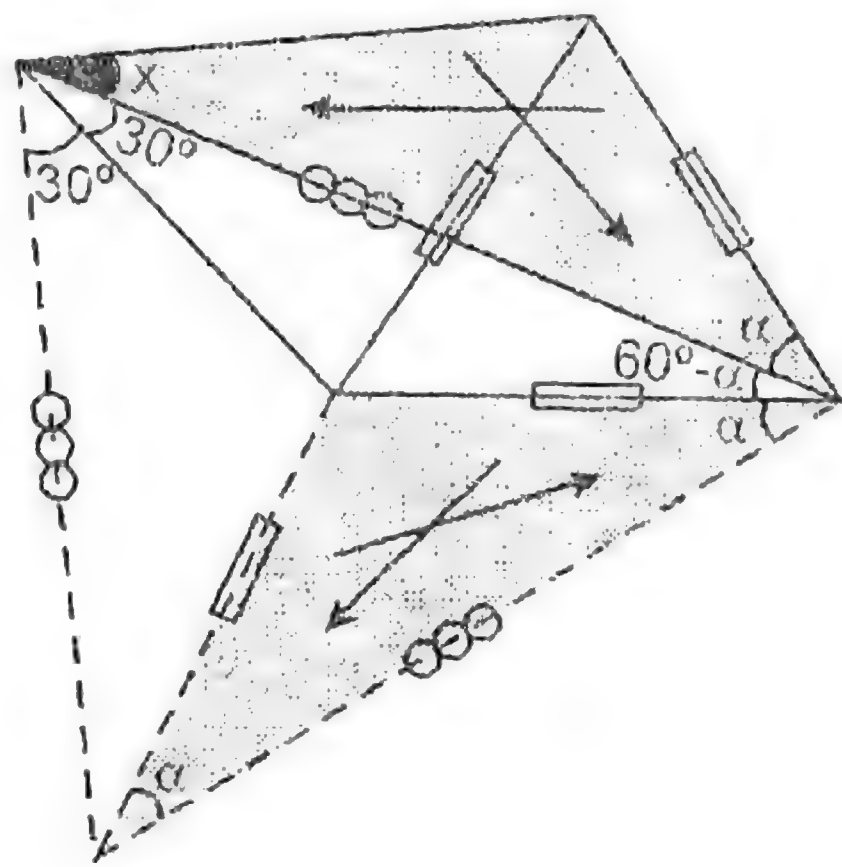


Paso N° 3: Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 4

Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".



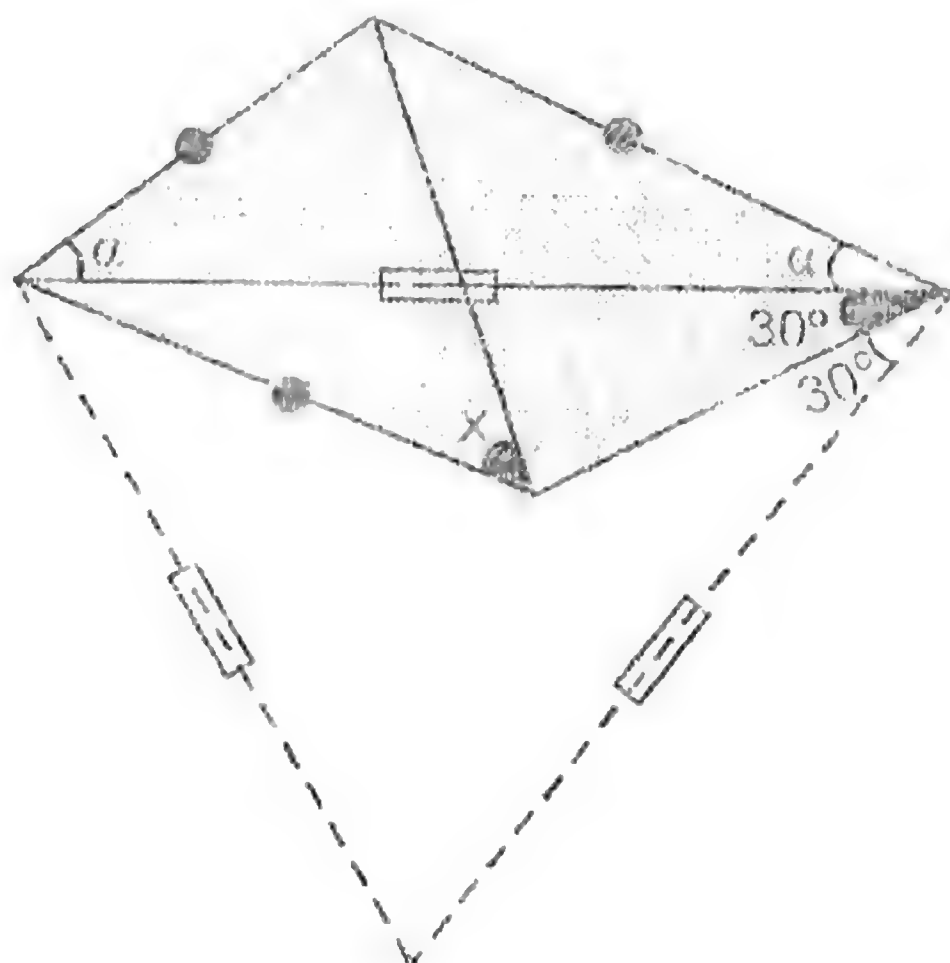
∴ de la figura se cumple:

$$x = \alpha$$

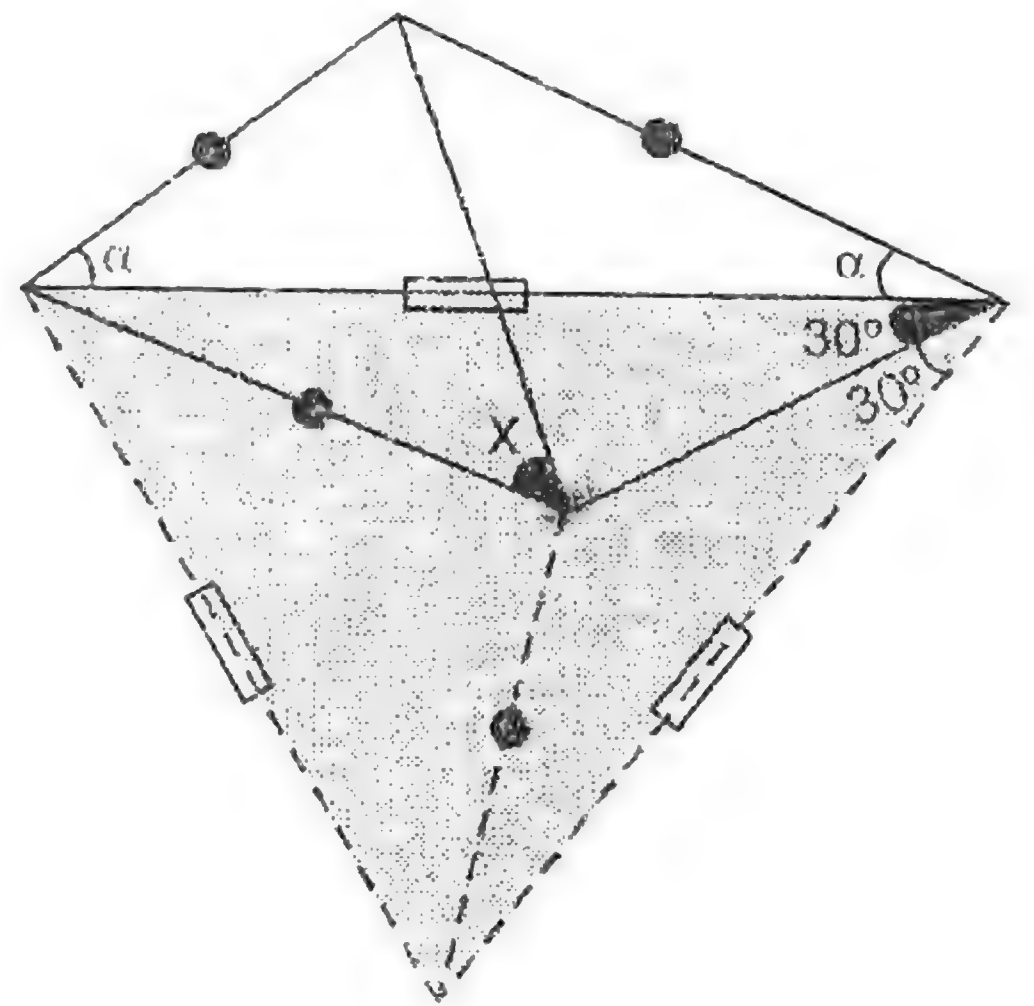
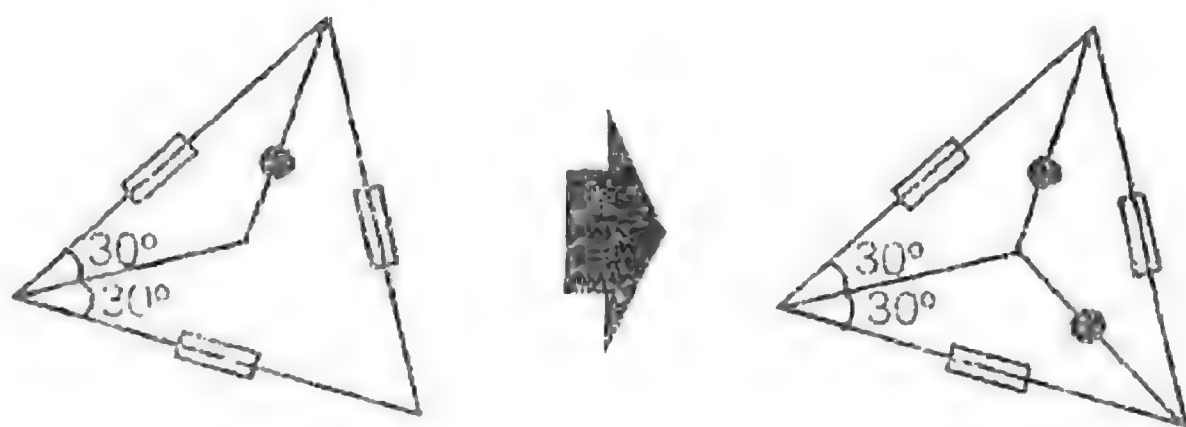
Solución N° 18

Paso N° 1

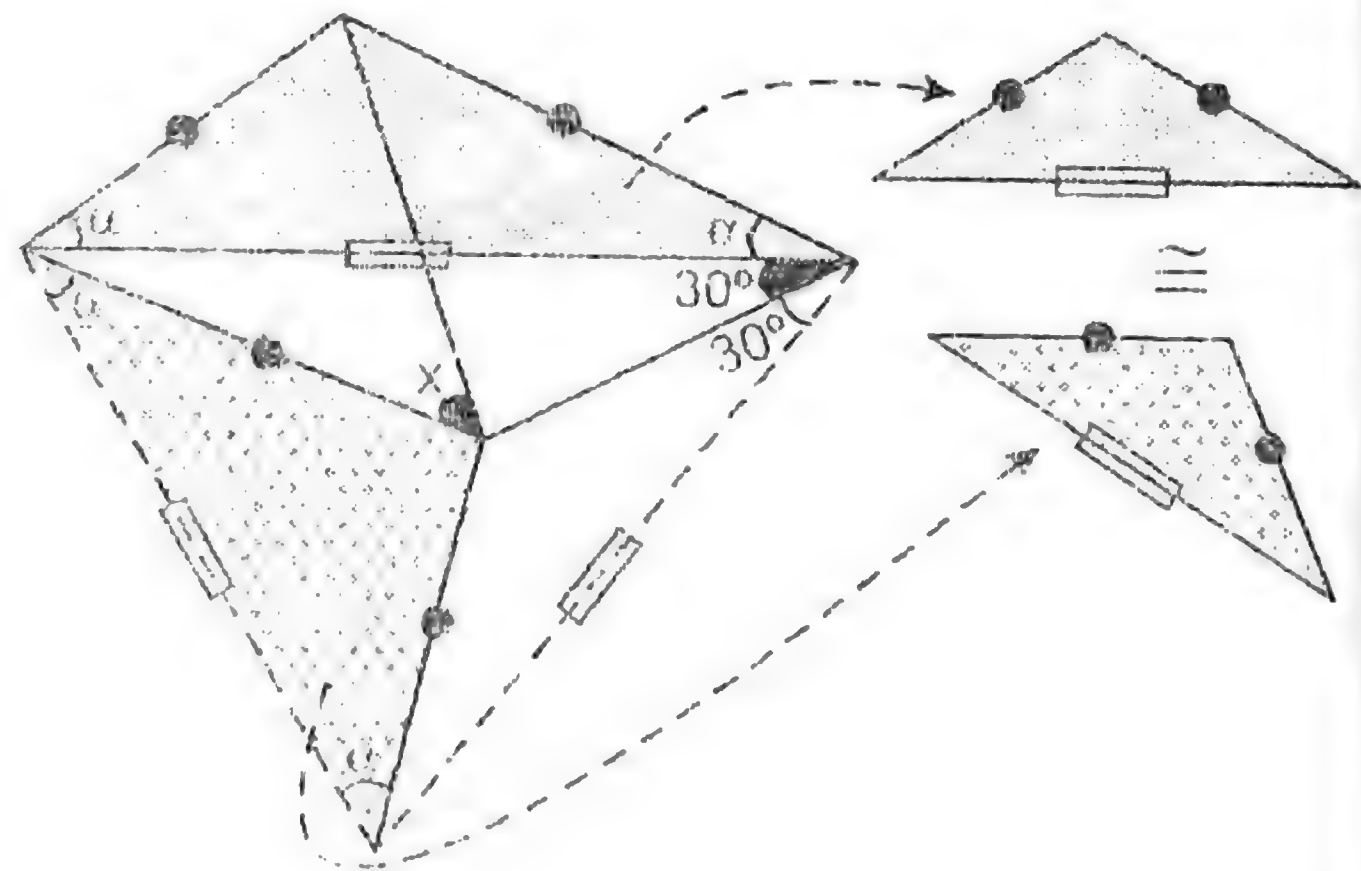
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente (tercer criterio de construcción)



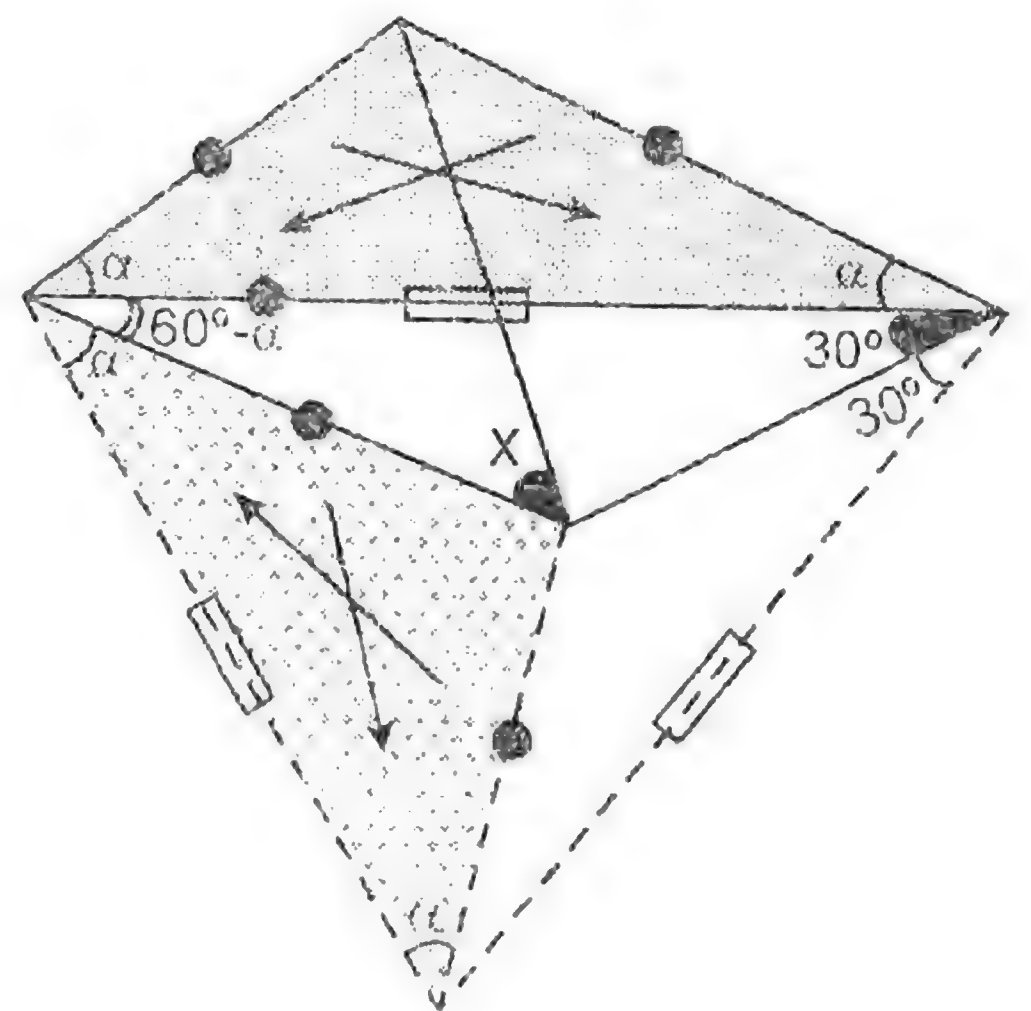
Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



Paso N° 3: Con el trazo realizado, se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)

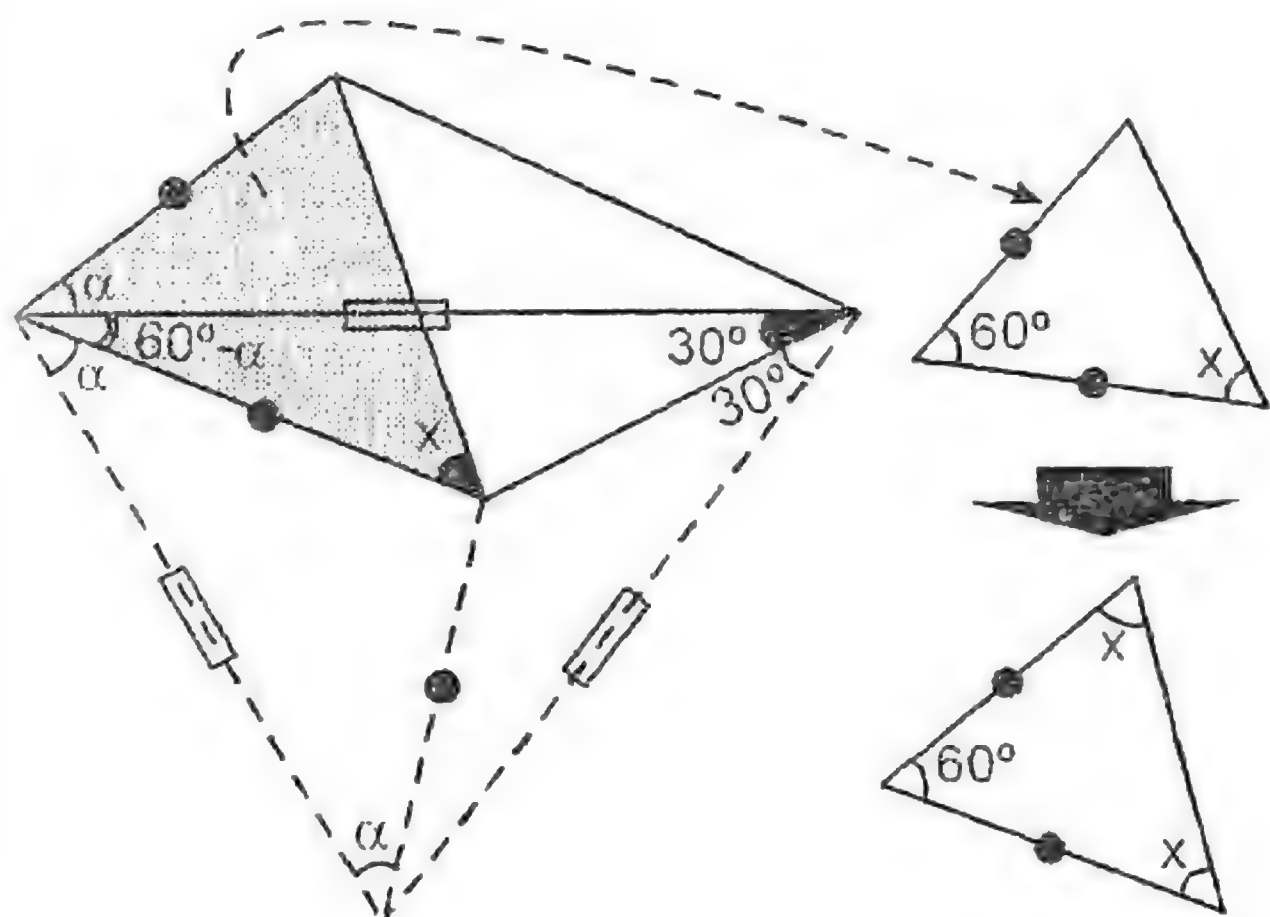


Paso N° 4: Aplicando el principio de congruencia "A ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa"



Paso N° 5

observa en la figura sombreada un triángulo equilátero donde se cumple:



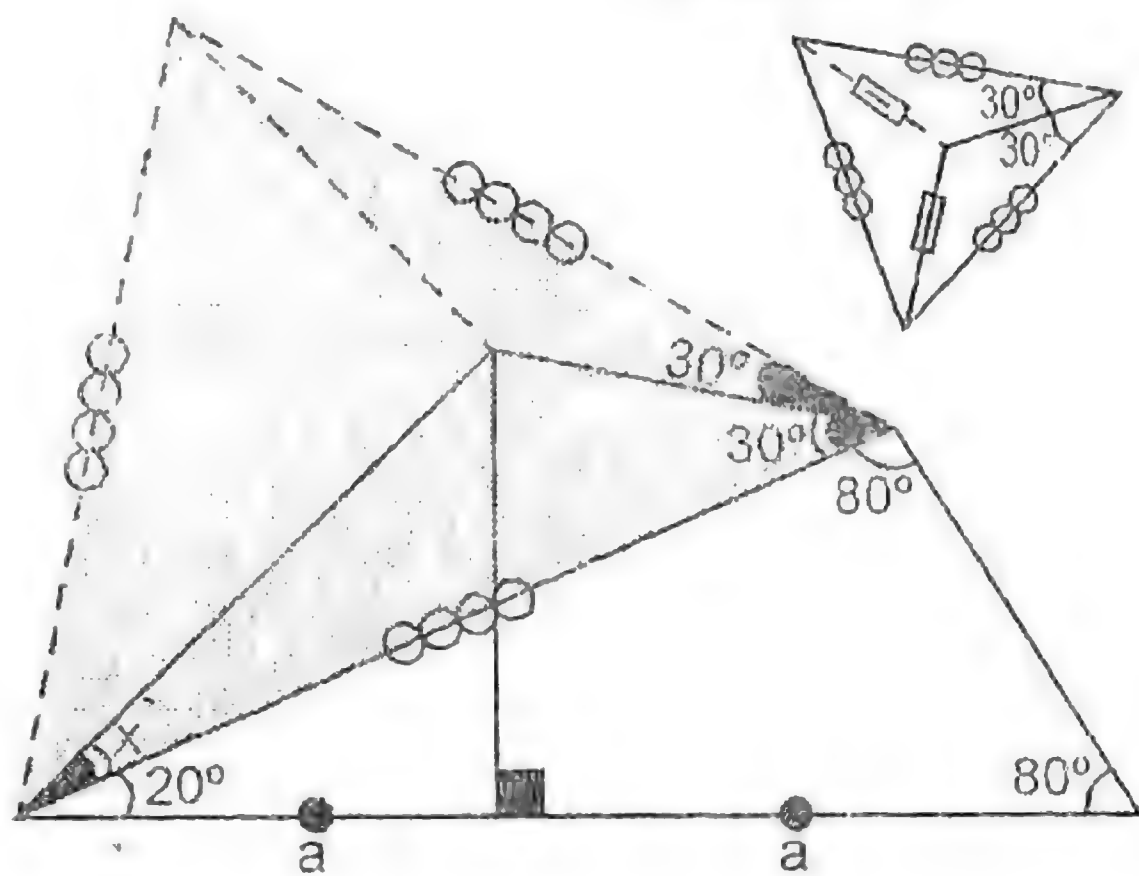
$$\therefore x = 60^\circ$$

Solución N° 19

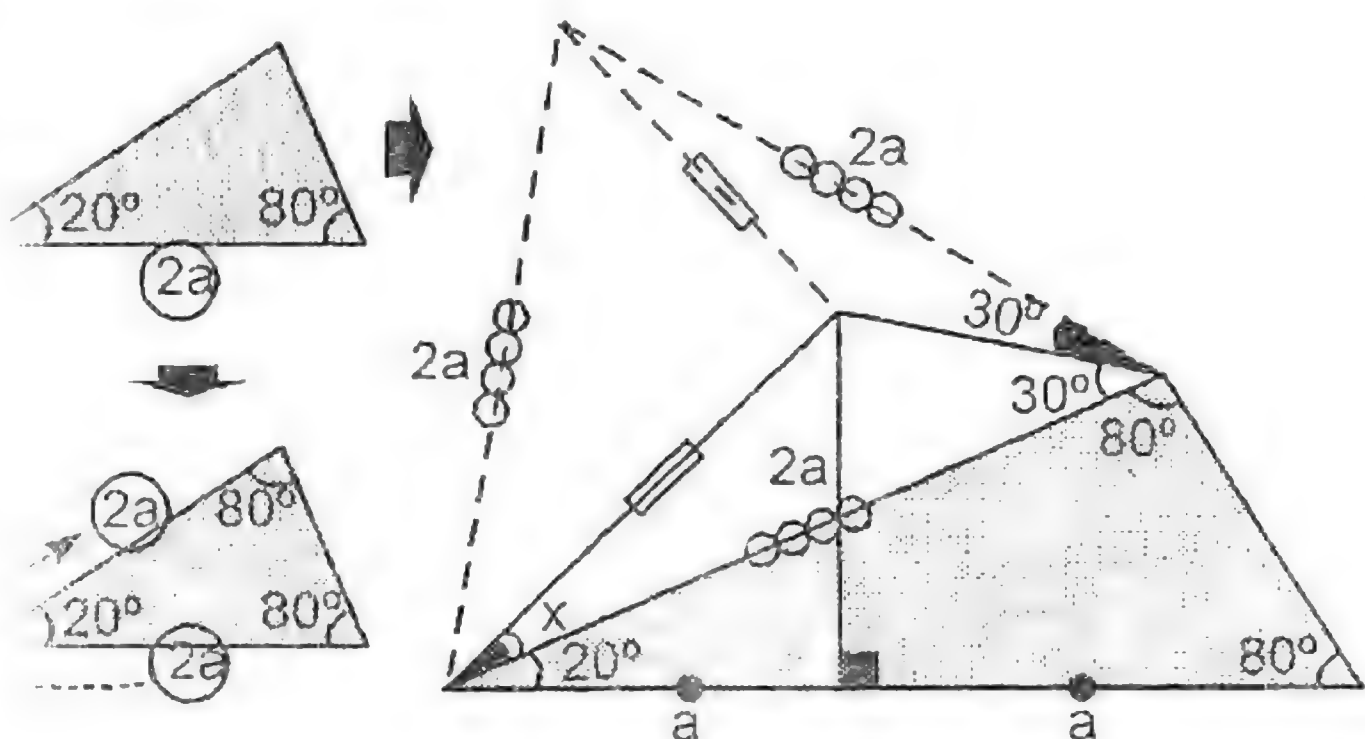
Paso N° 1

Se observa un ángulo de 30° entonces se forma exteriormente un triángulo equilátero.

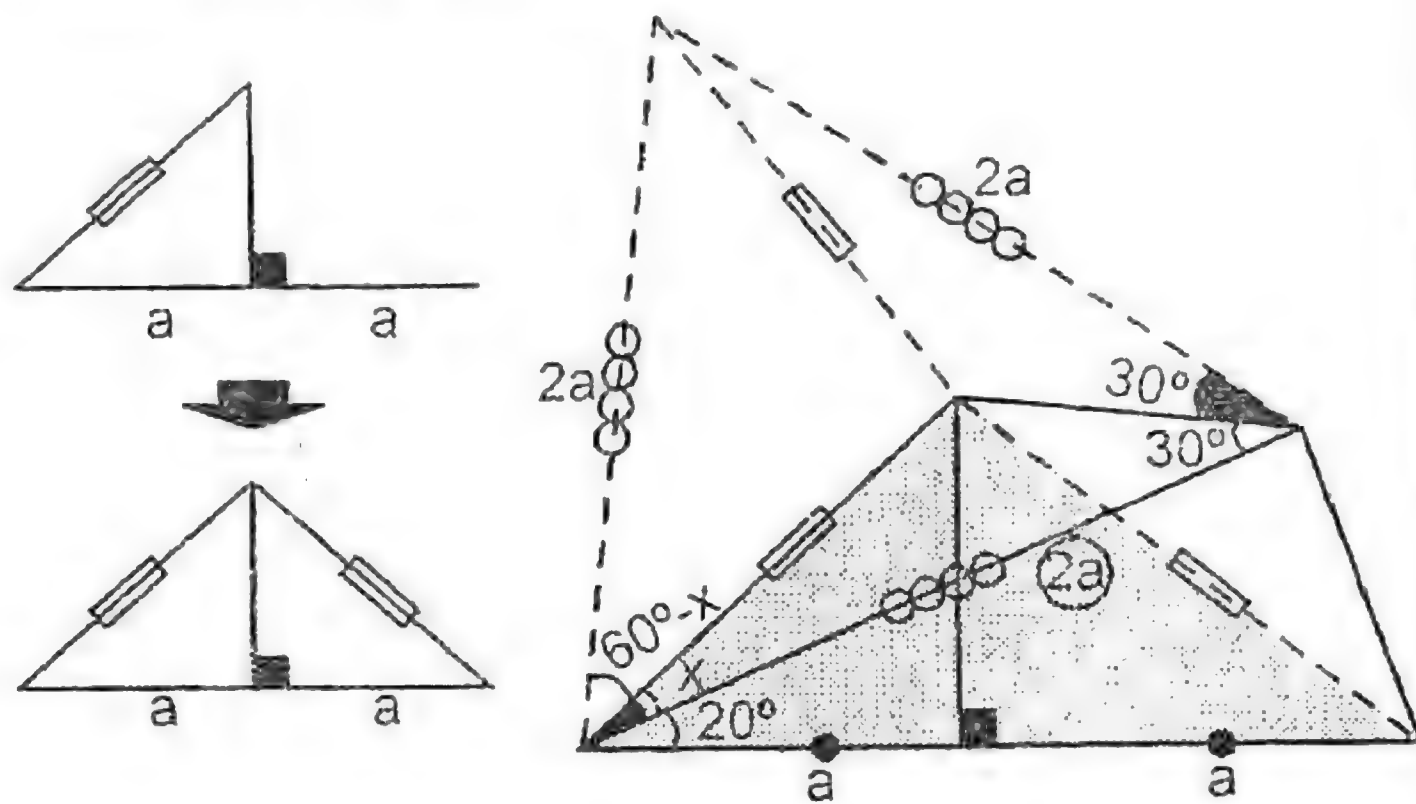
También:



Paso N° 2: En la nueva figura se observa un triángulo isósceles.

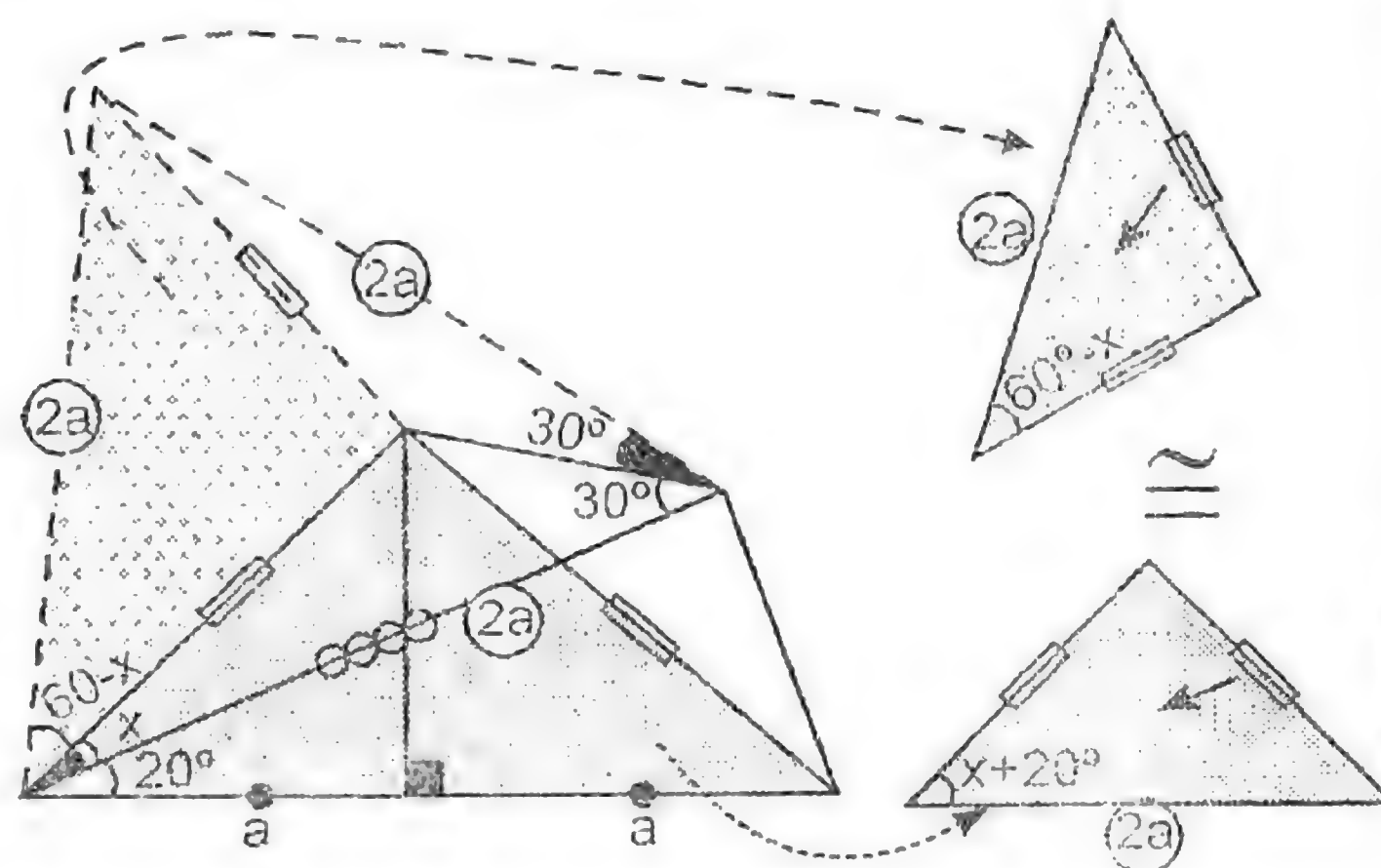


Paso N° 3: Se tiene en la figura, una recta mediatriz y se cumple:



Paso N° 4

Se obtiene dos triángulos congruentes; caso: (L.A.L)



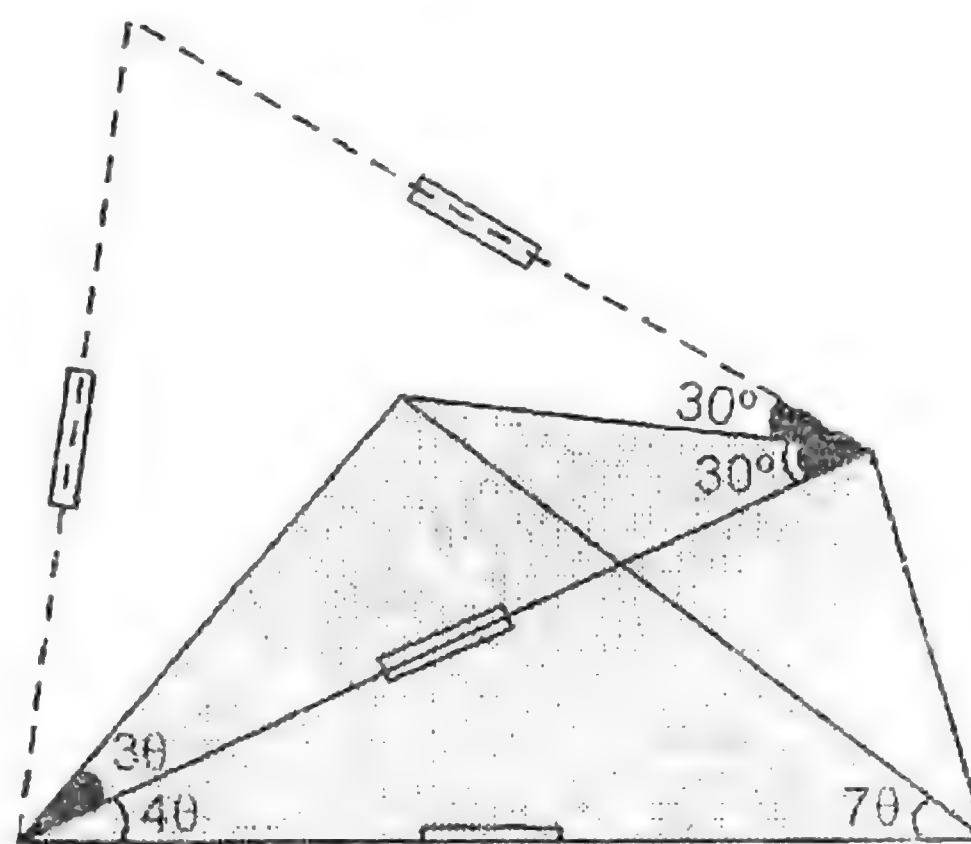
Aquí se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

$$\begin{aligned} \therefore 60^\circ - x &= x + 20^\circ \\ 40^\circ &= 2x \\ 20^\circ &= x \end{aligned}$$

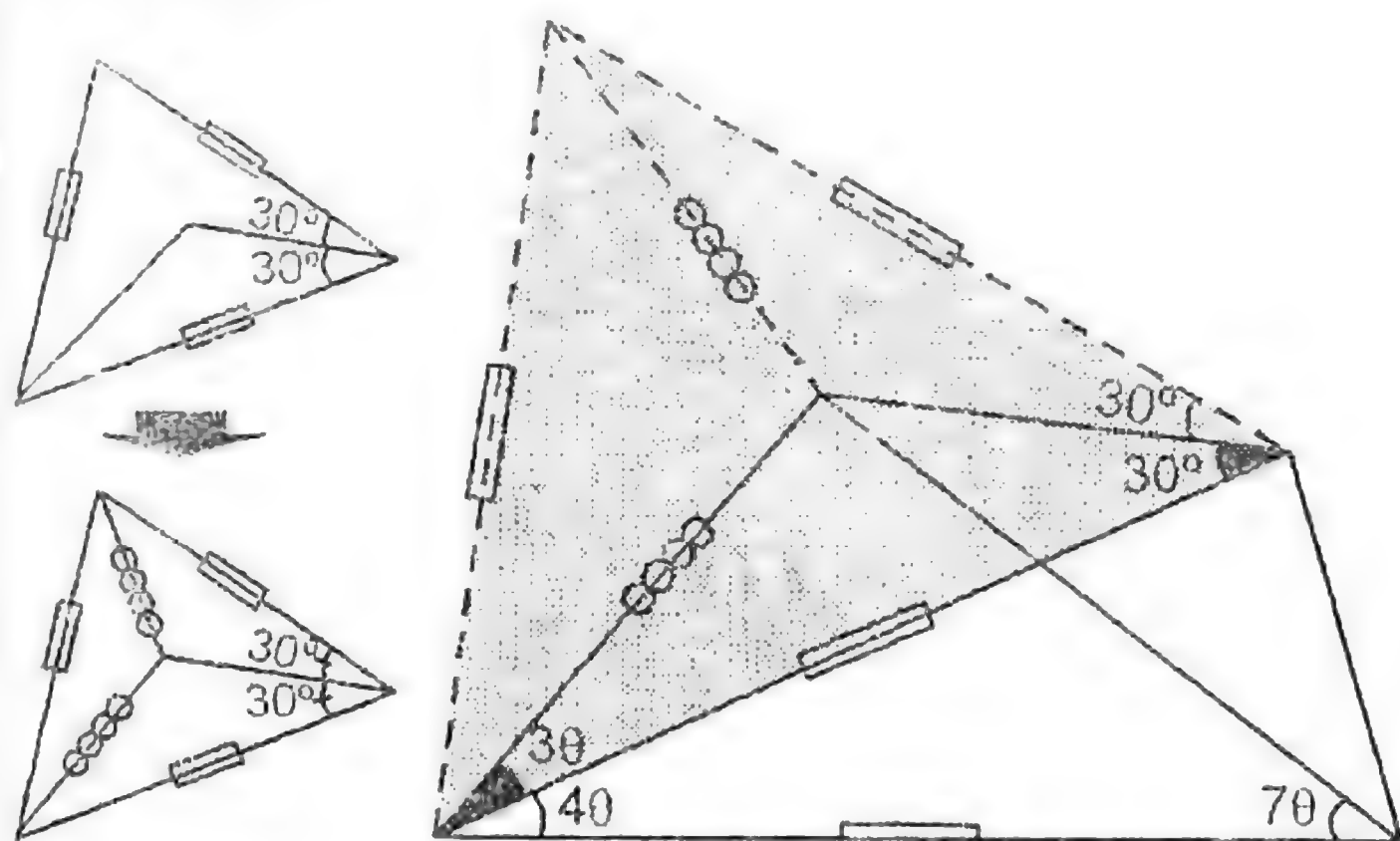
Solución N° 20

Paso N° 1

Se observa un ángulo de 30° , entonces se traza exteriormente un triángulo equilátero.

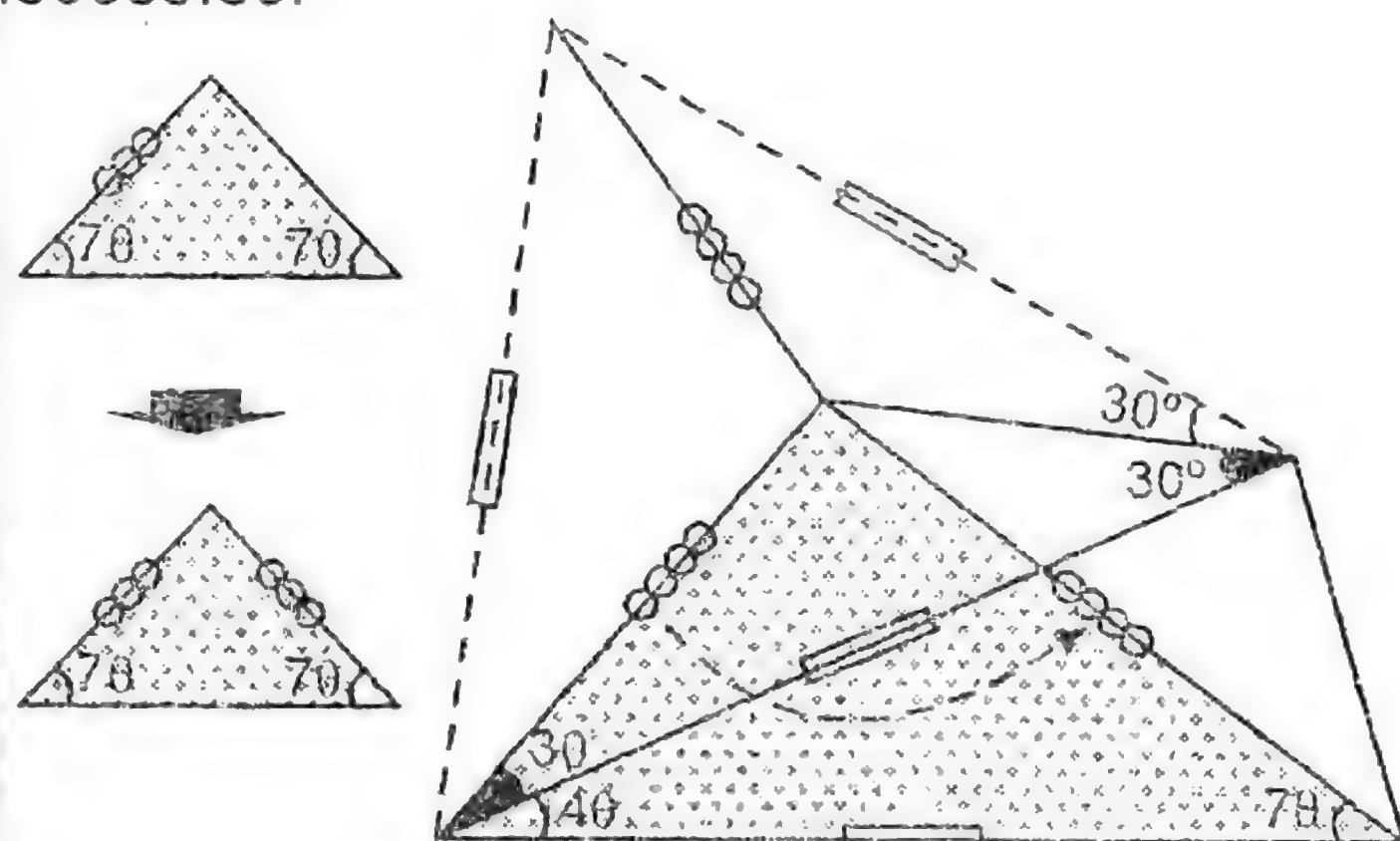


Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



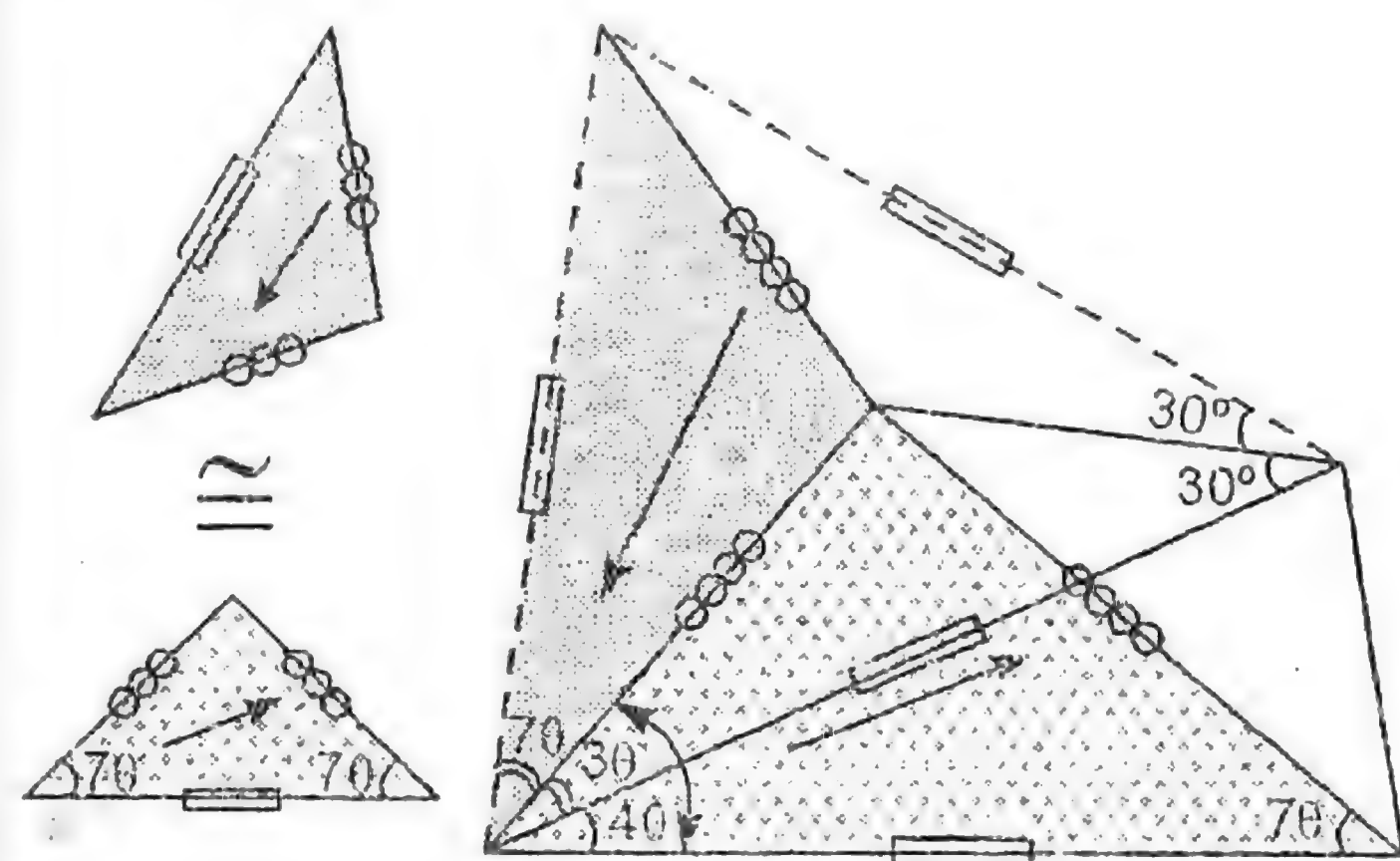
Paso N° 3

Se observa en el interior de la figura un triángulo isósceles.



Paso N° 4

Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso: (L.L.L)



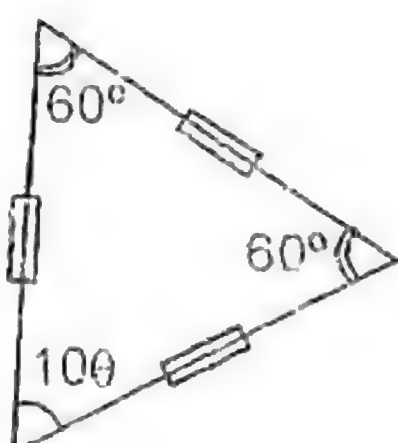
Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

∴ En la figura se cumple:

$$70 + 30 = 60^\circ$$

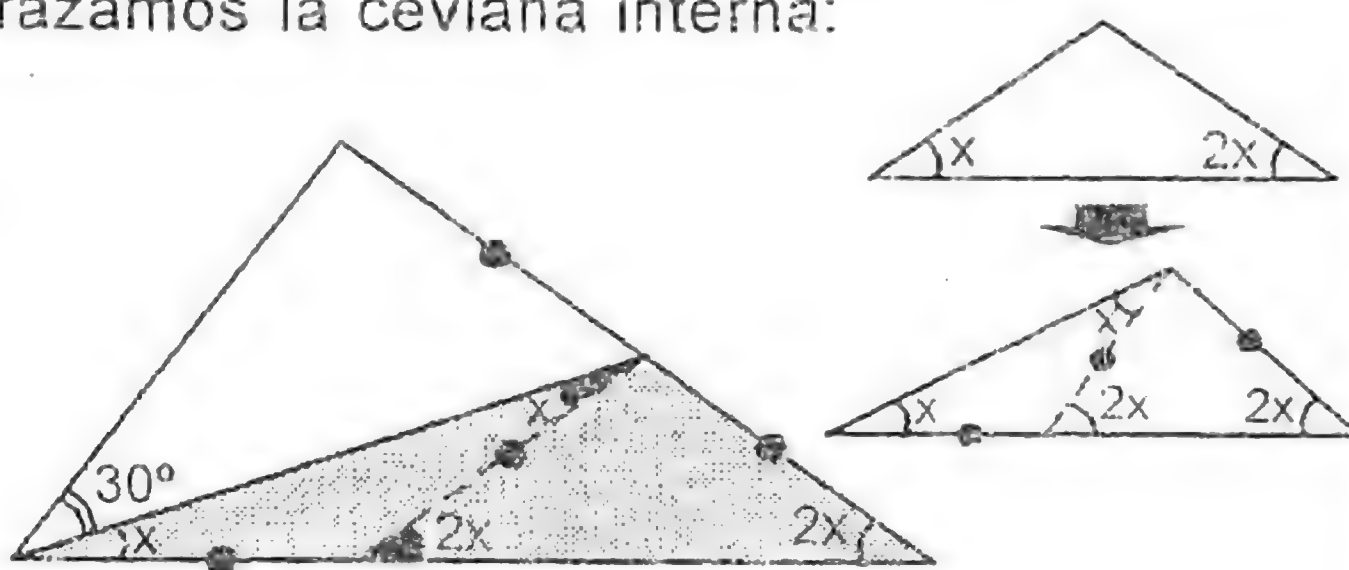
$$100 = 60^\circ$$

$$\theta = 10^\circ$$



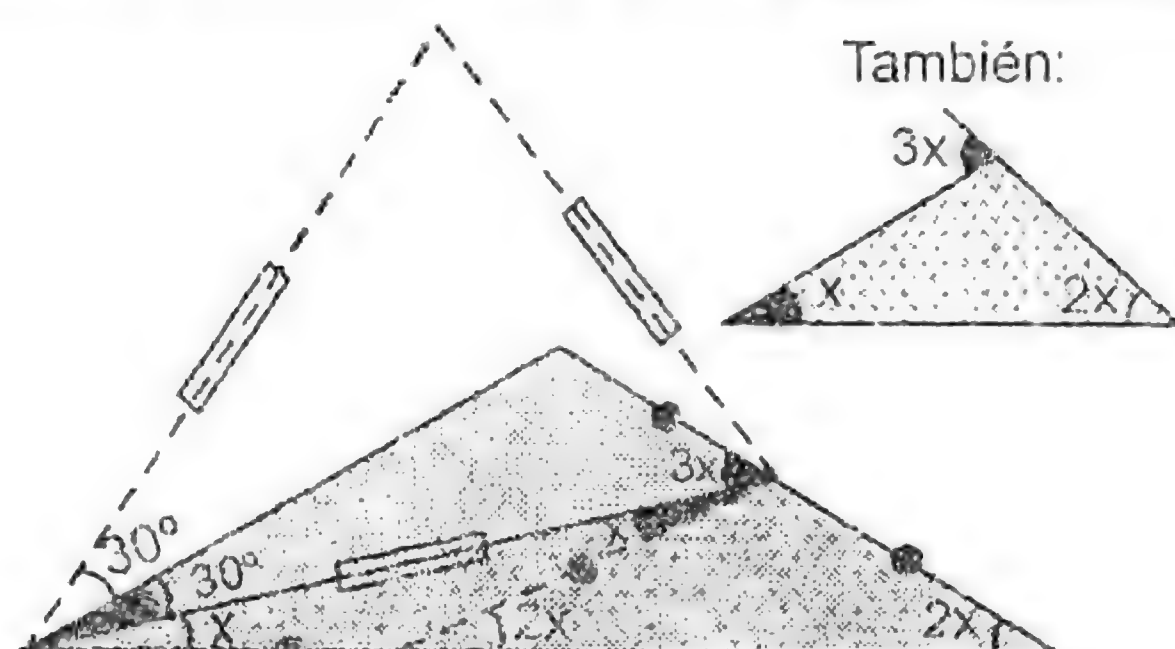
Solución N° 21

Paso N° 1: Se observa en la figura sombreada a ella ángulos en la relación 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna:

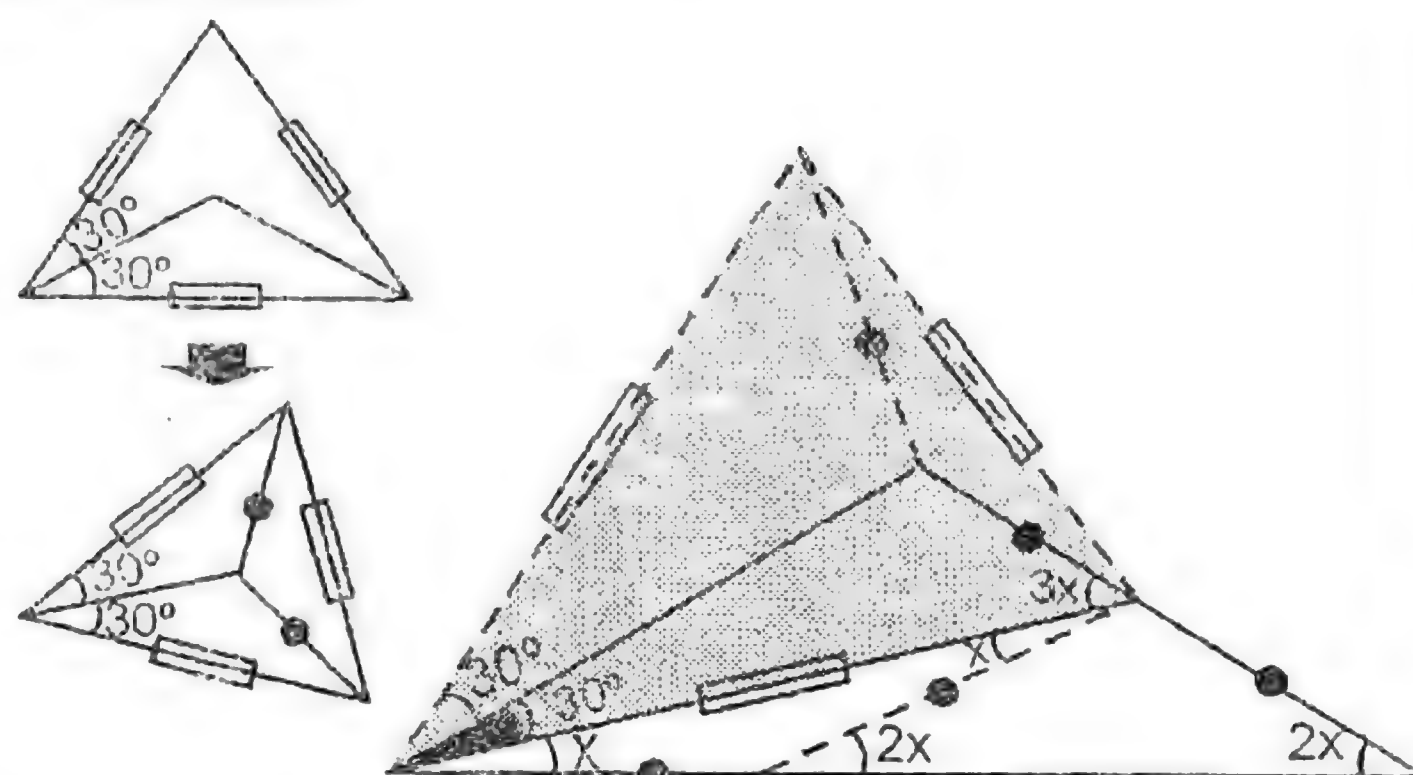


Paso N° 2

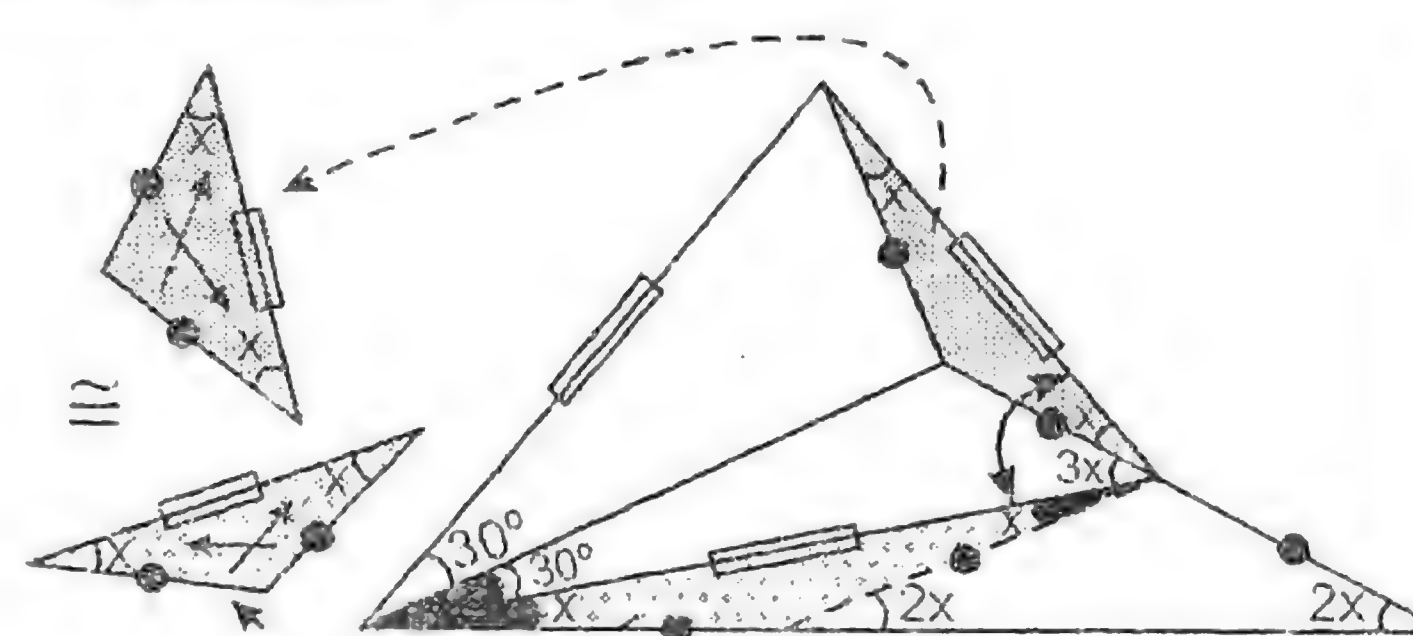
Ahora se observa un ángulo de 30° entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero.



Paso N° 3: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



Paso N° 4: Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



∴ De la figura observa:

$$x + 3x = 60^\circ$$

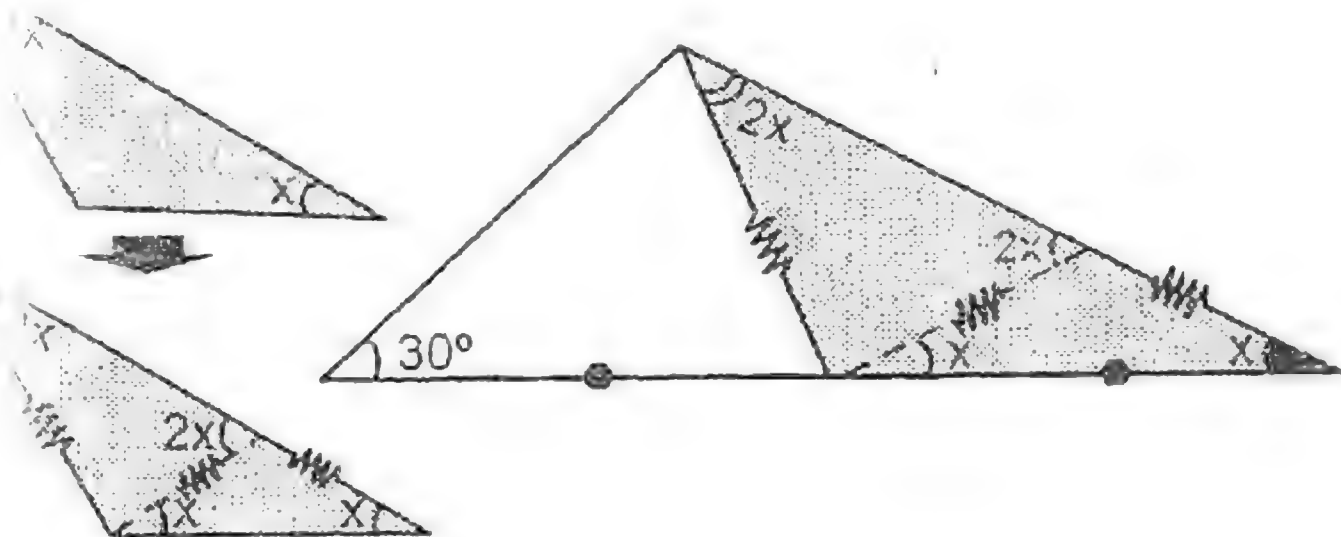
$$4x = 60^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Solución No 22

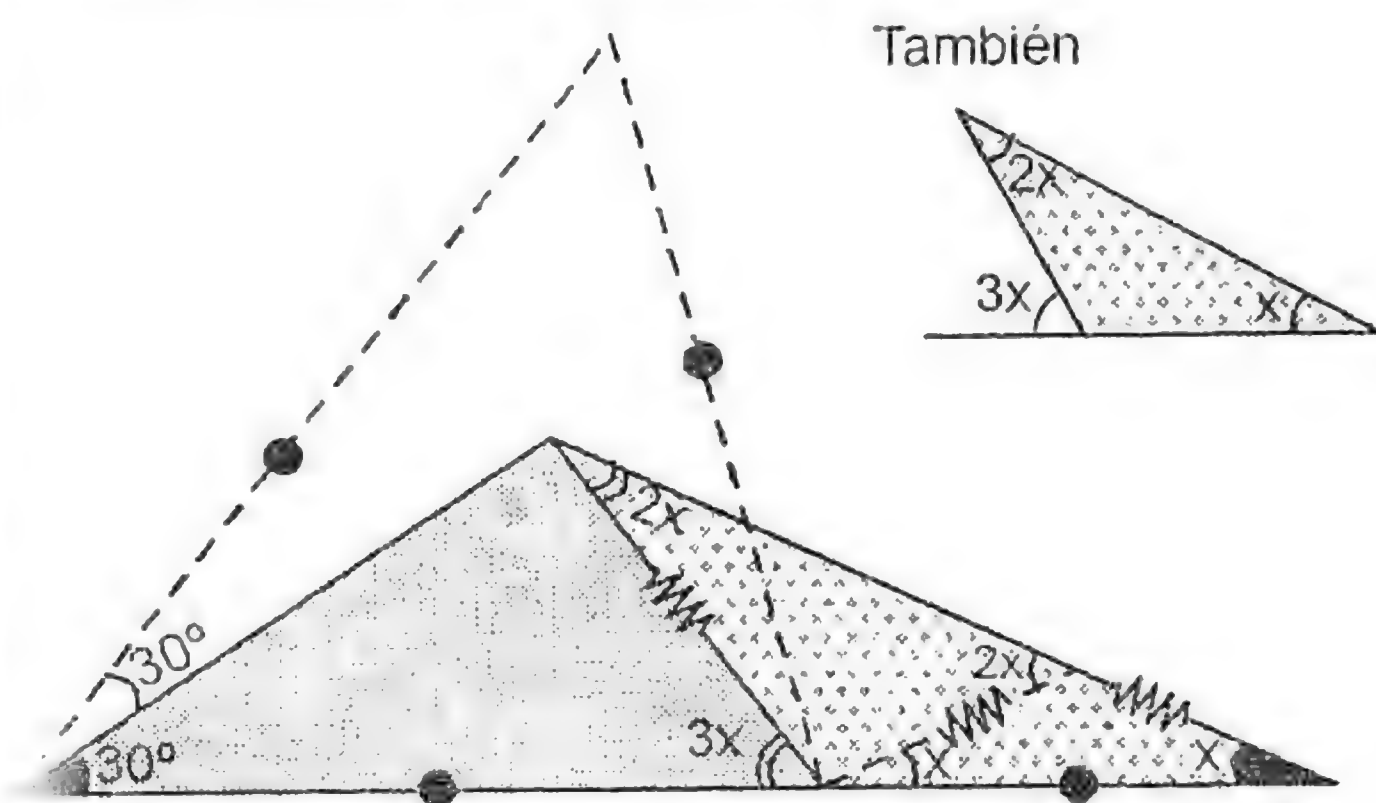
Paso N° 1

Anteriormente en la figura se observa ángulos en relación de 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna. (Primer criterio de construcción)



Paso N° 2

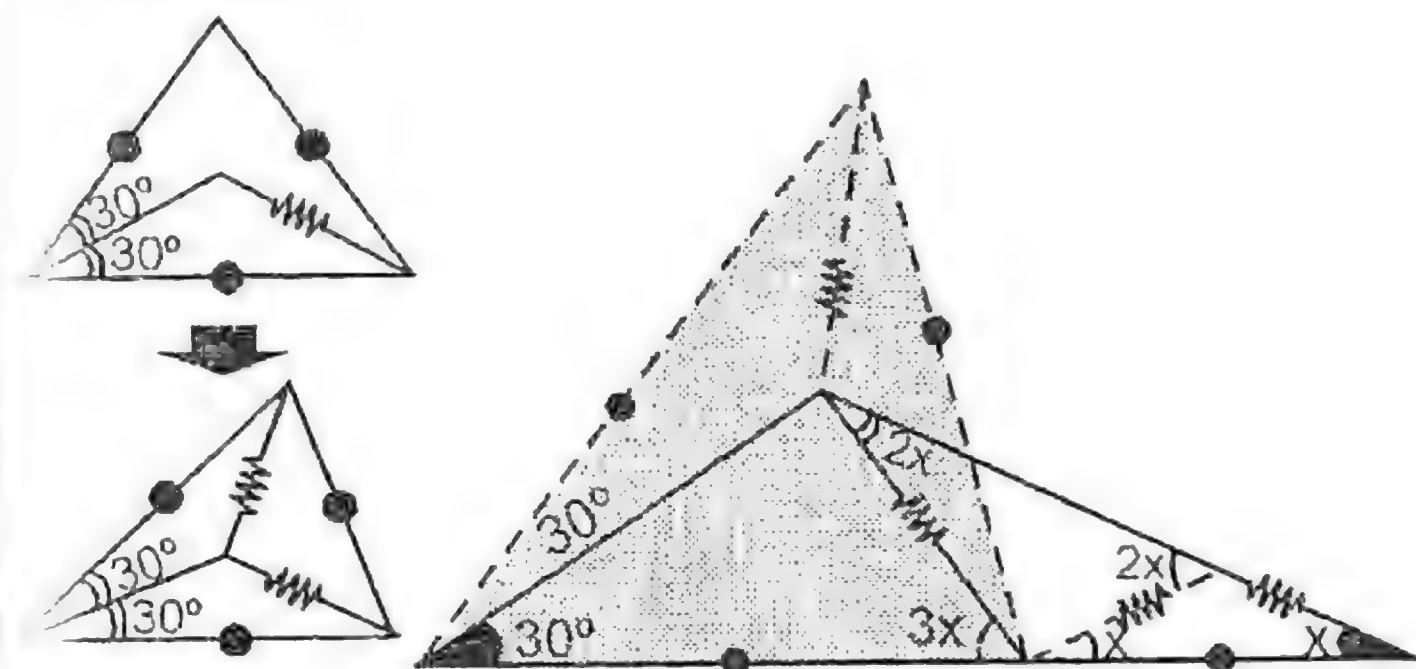
Ahora observamos un ángulo de 30°, entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero, (tercer criterio de construcción)



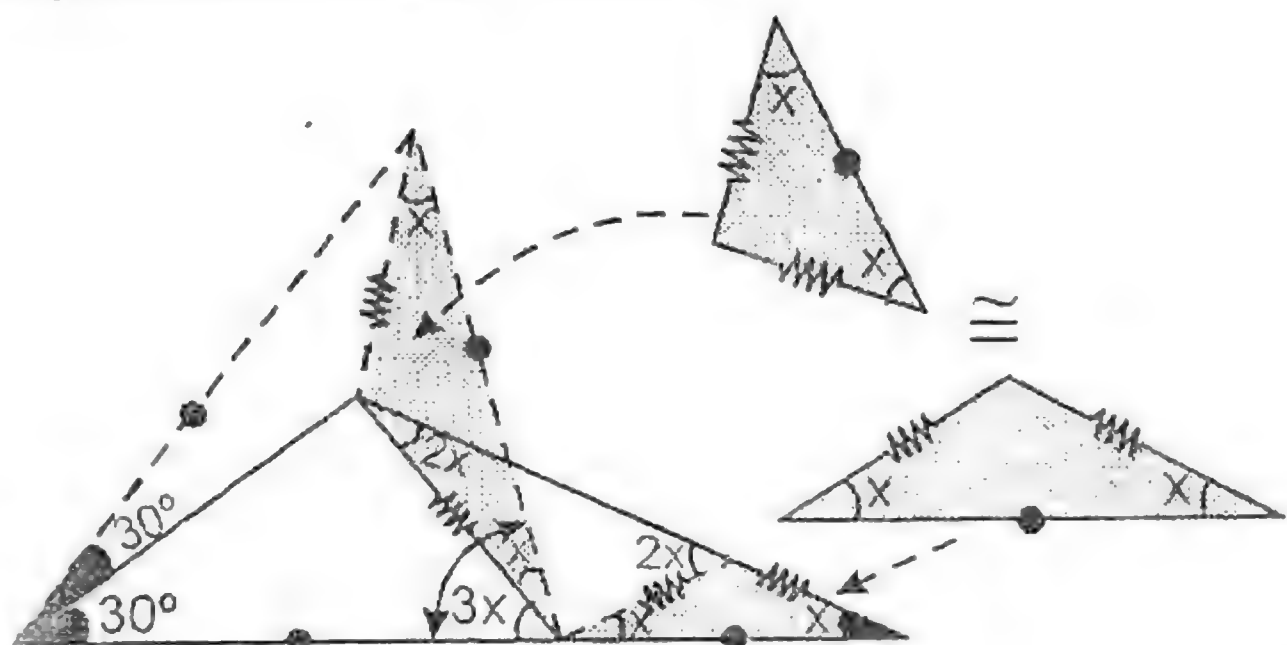
También



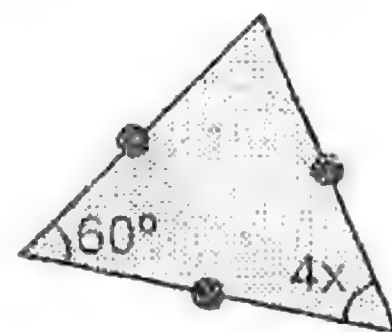
Paso N° 3: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:



Paso N° 4: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



Se observa de la figura en el triángulo equilátero.



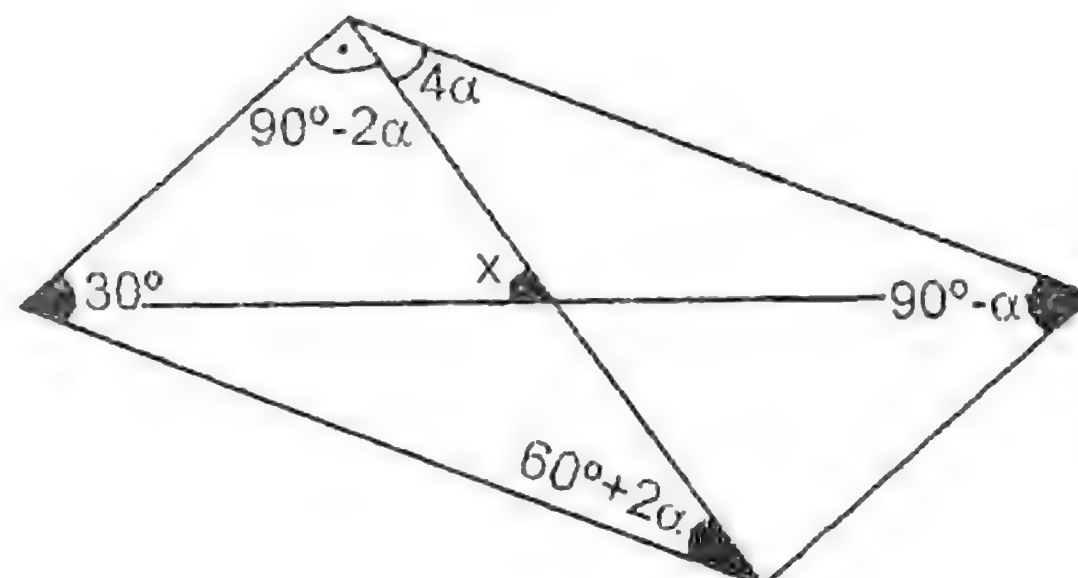
$$3x + x = 60^\circ$$

$$4x = 60^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

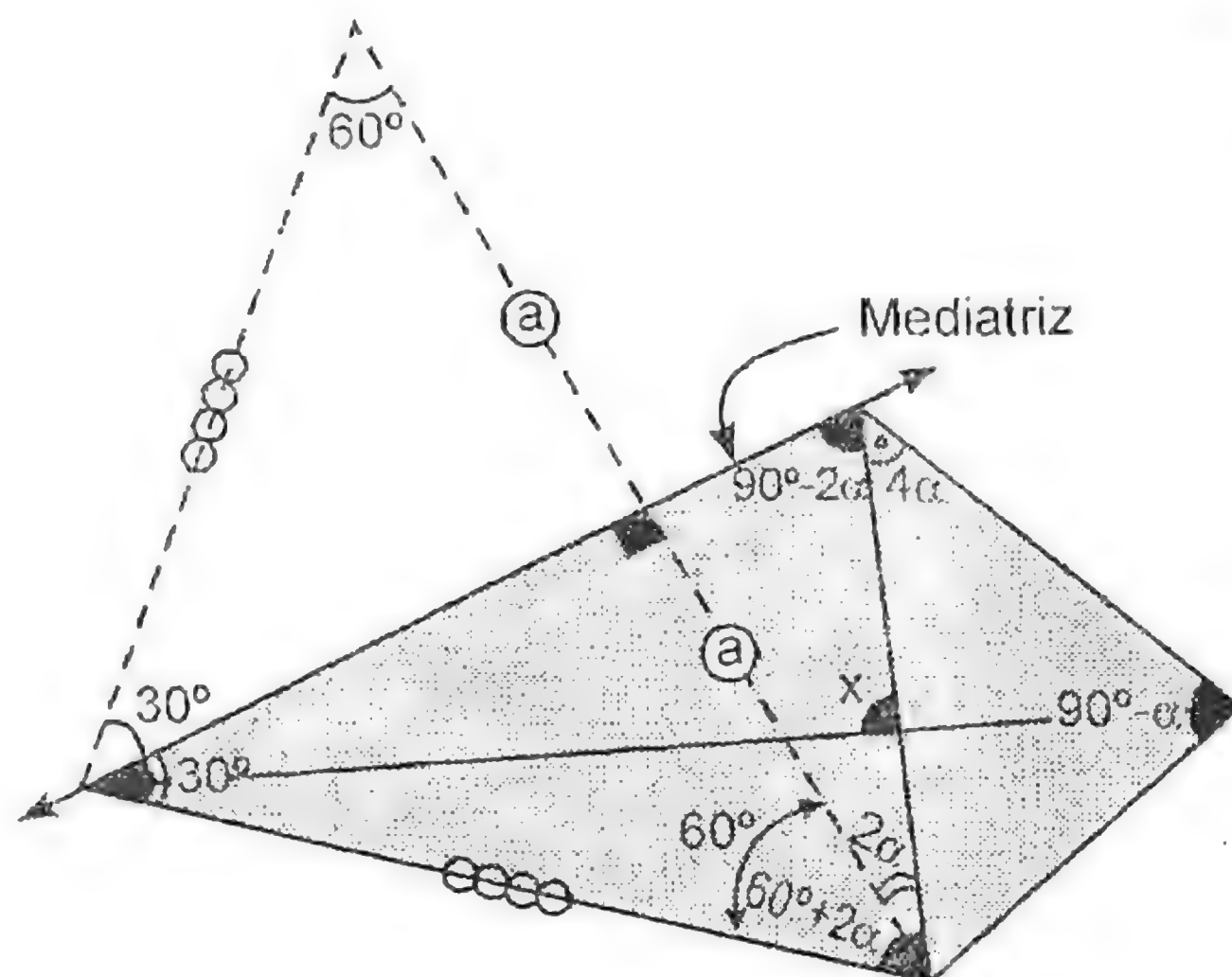
Solución No 23

Completamos los ángulos internos en el triángulo.

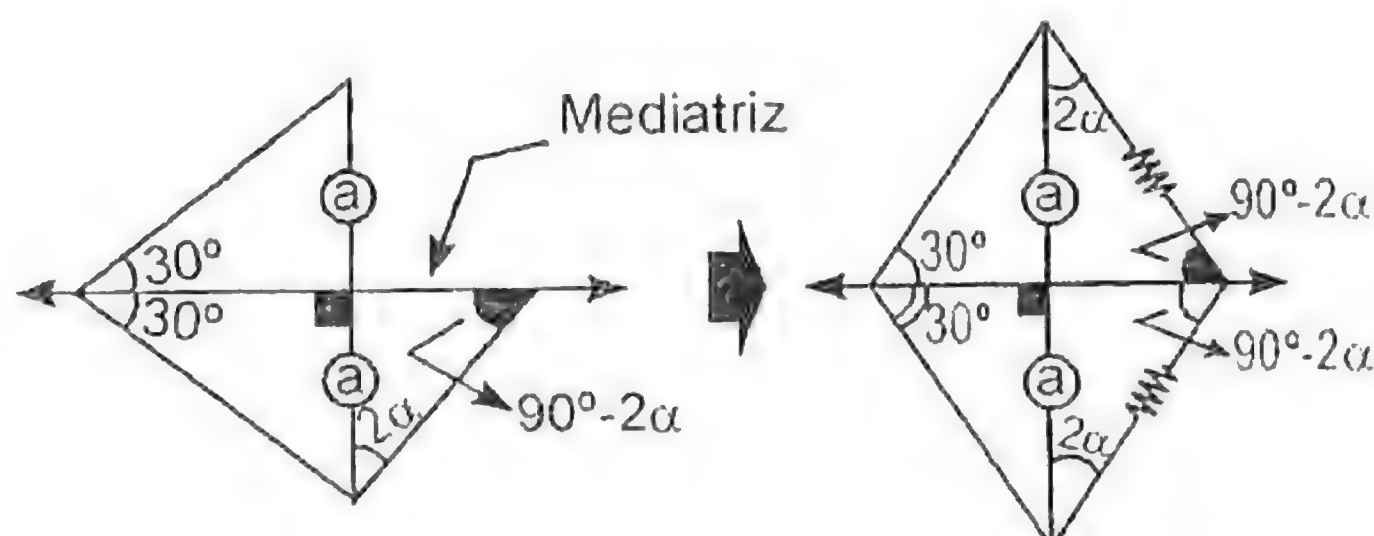


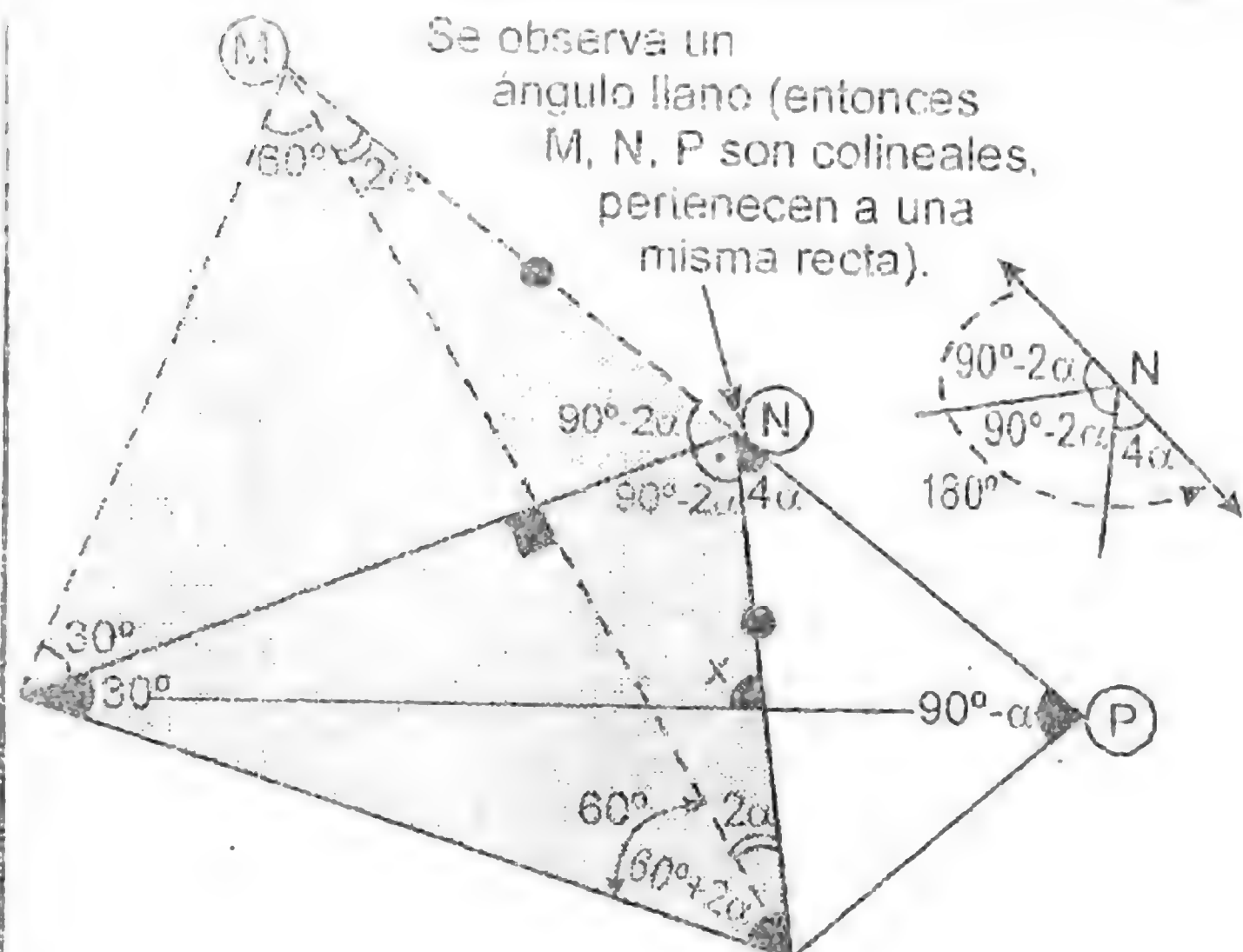
Paso N° 1

Observamos un ángulo de 30°, entonces construimos exteriormente un triángulo equilátero de la siguiente manera.



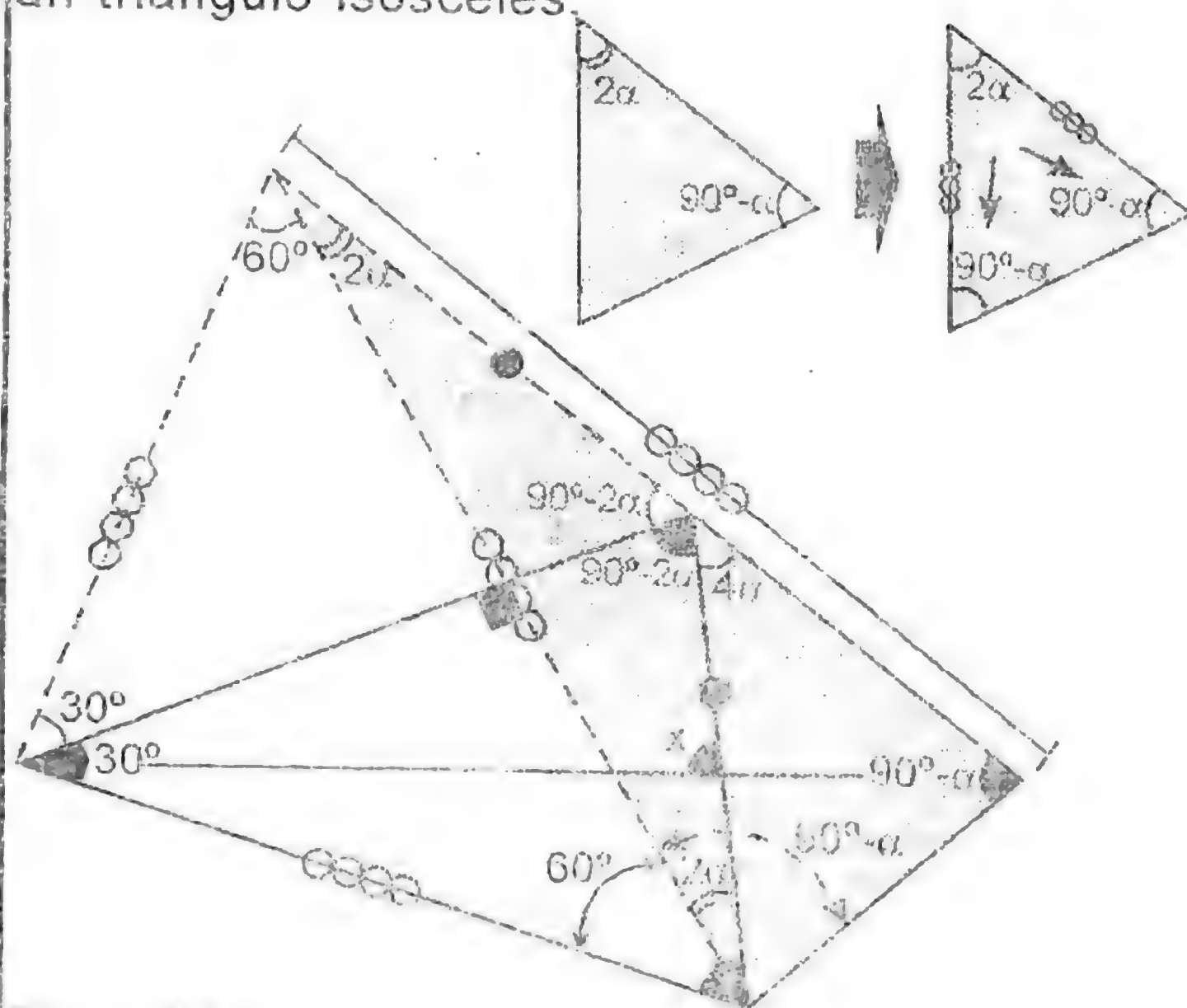
Paso N° 2: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:





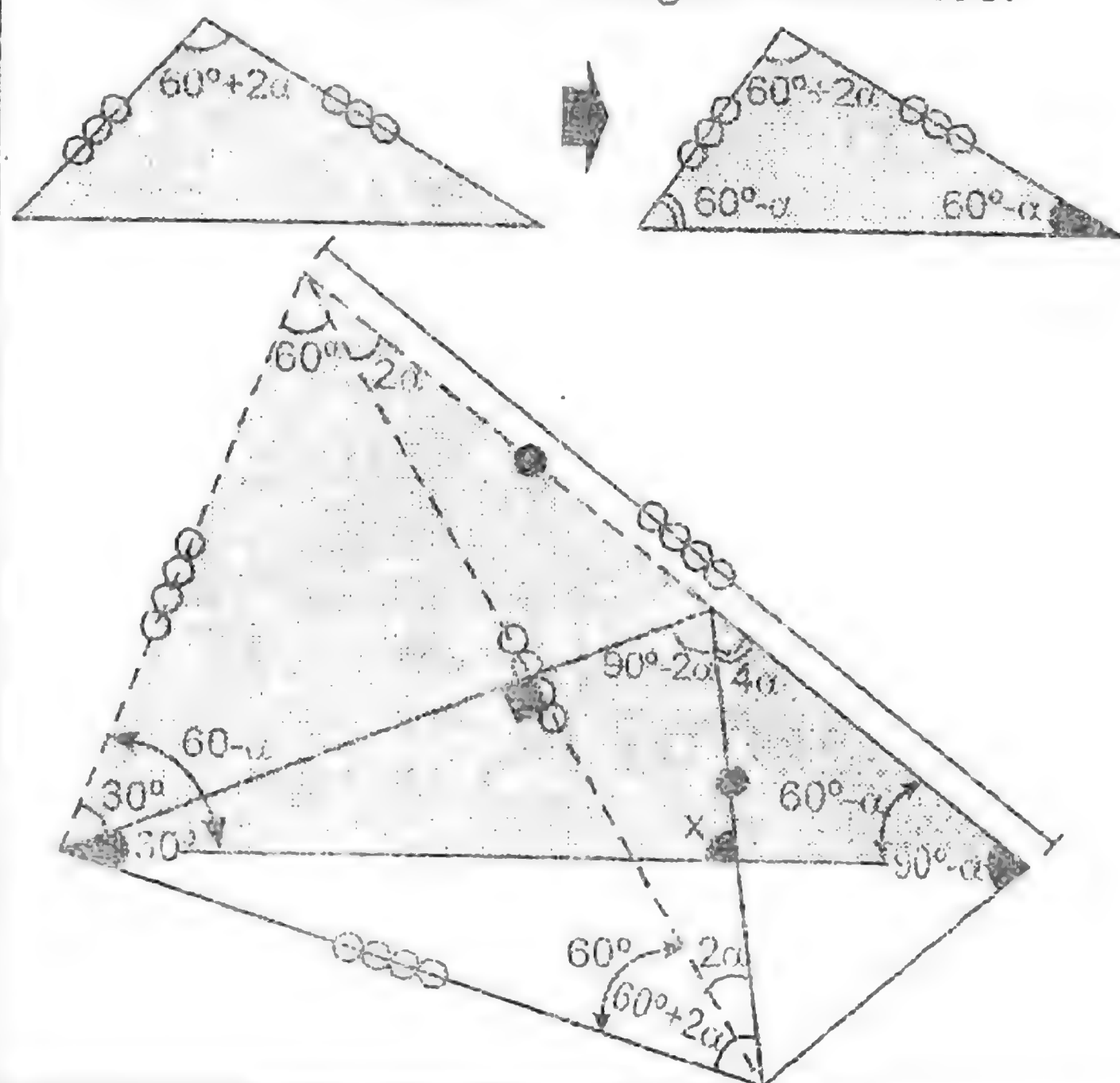
Paso N° 3

Se observa, la siguiente figura sombreada es un triángulo isósceles.



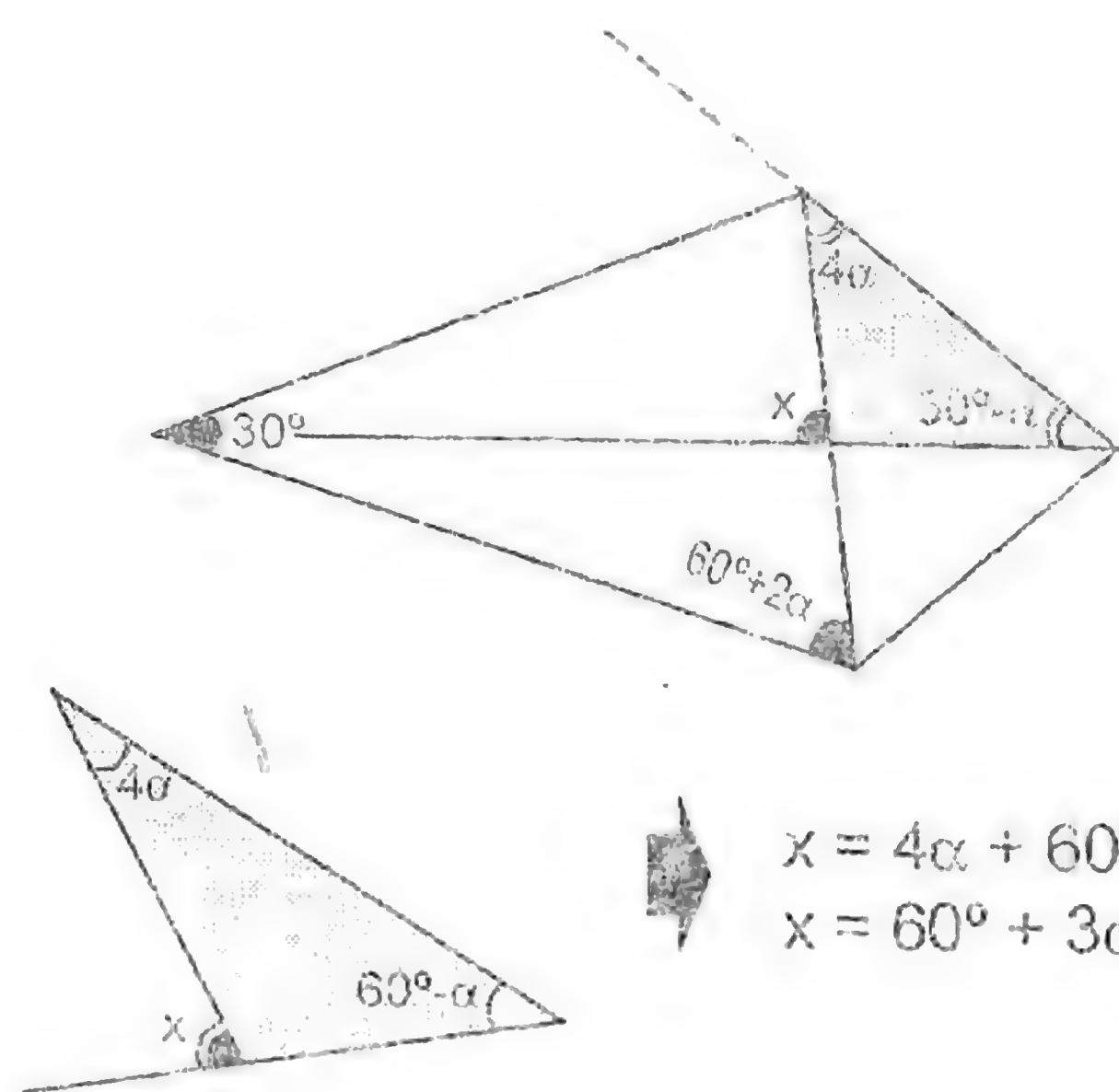
Paso N° 4

Se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 6

Ahora se observa interiormente de en figura resultante un triángulo con las siguientes características:



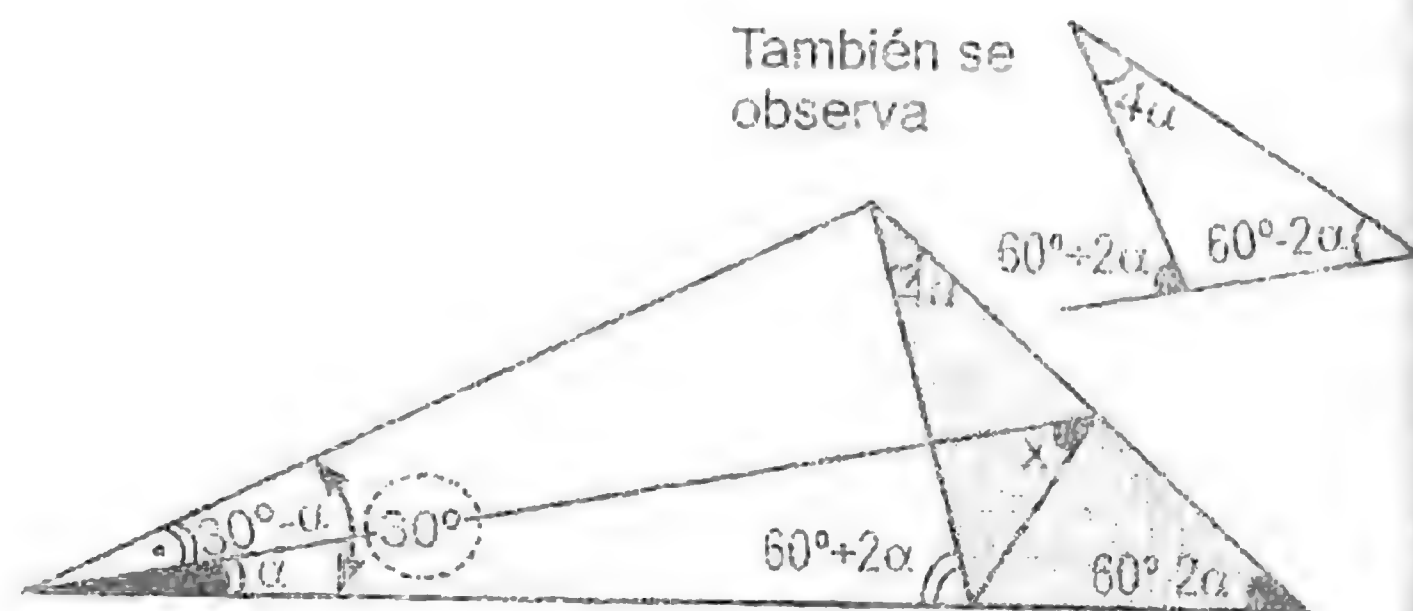
$$x = 4\alpha + 60^\circ - \alpha$$

$$x = 60^\circ + 3\alpha$$

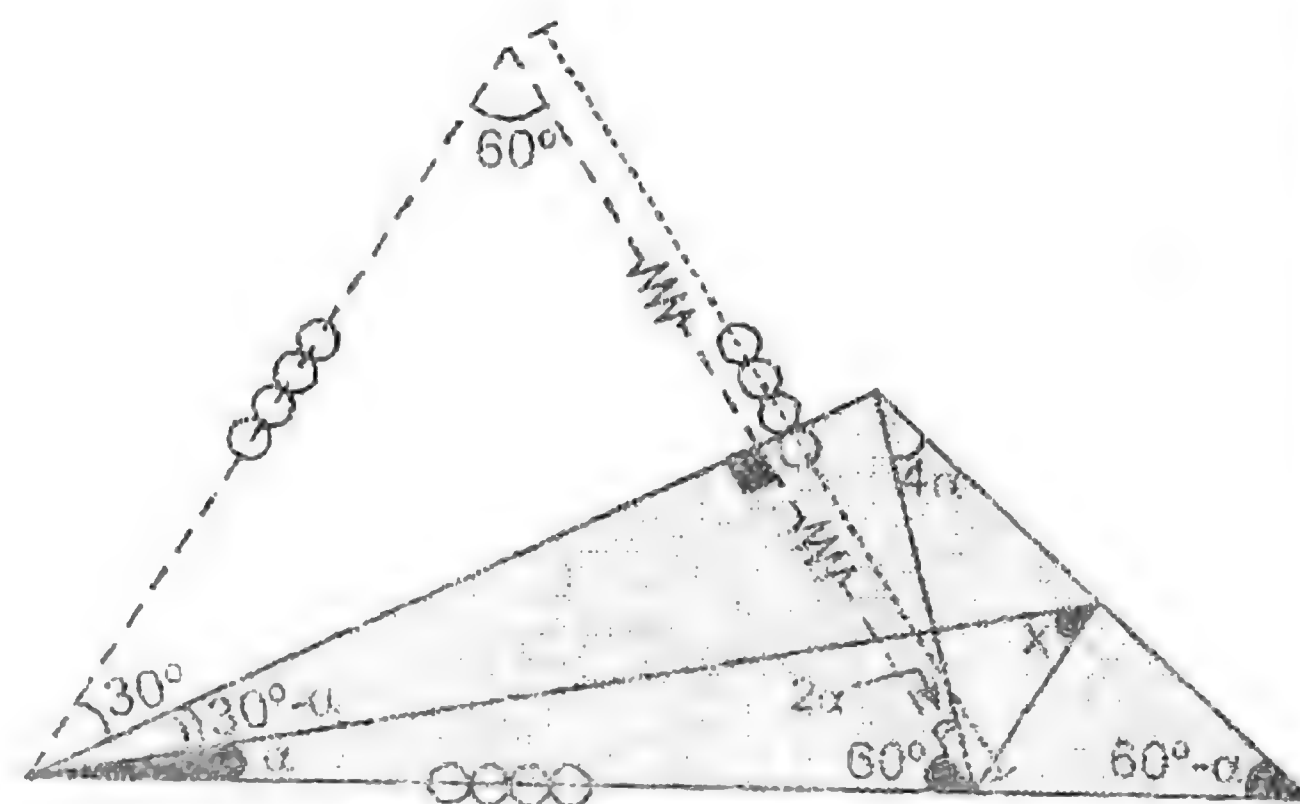
Solución N° 24

Paso N° 1

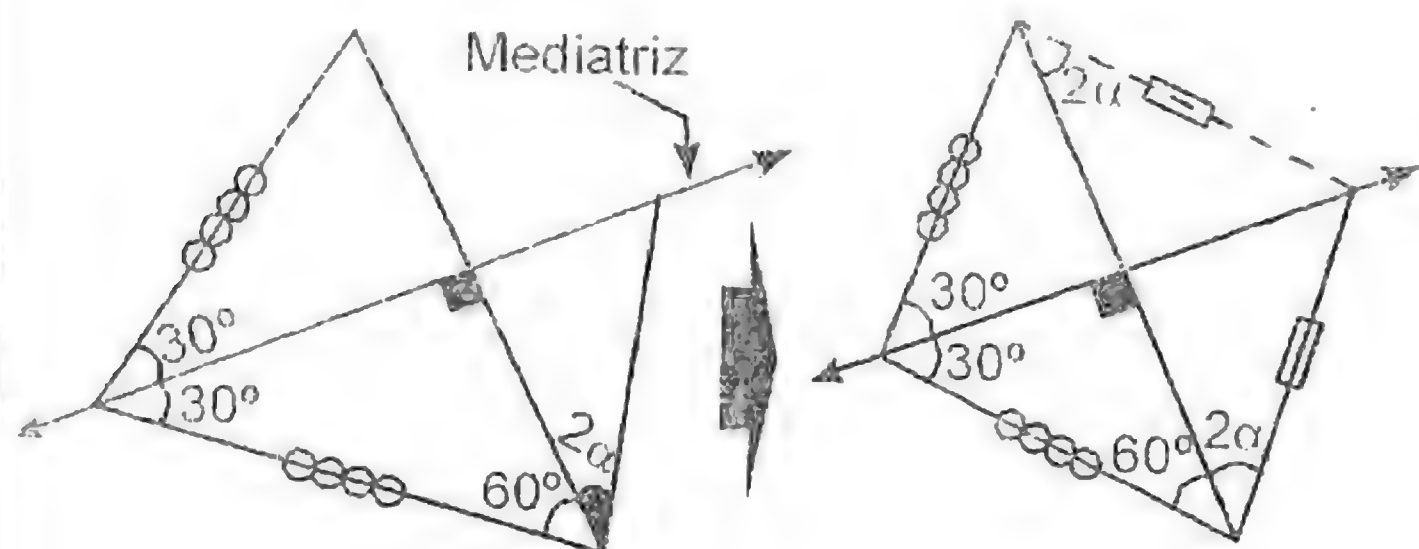
En la figura se observa un ángulo de 30°



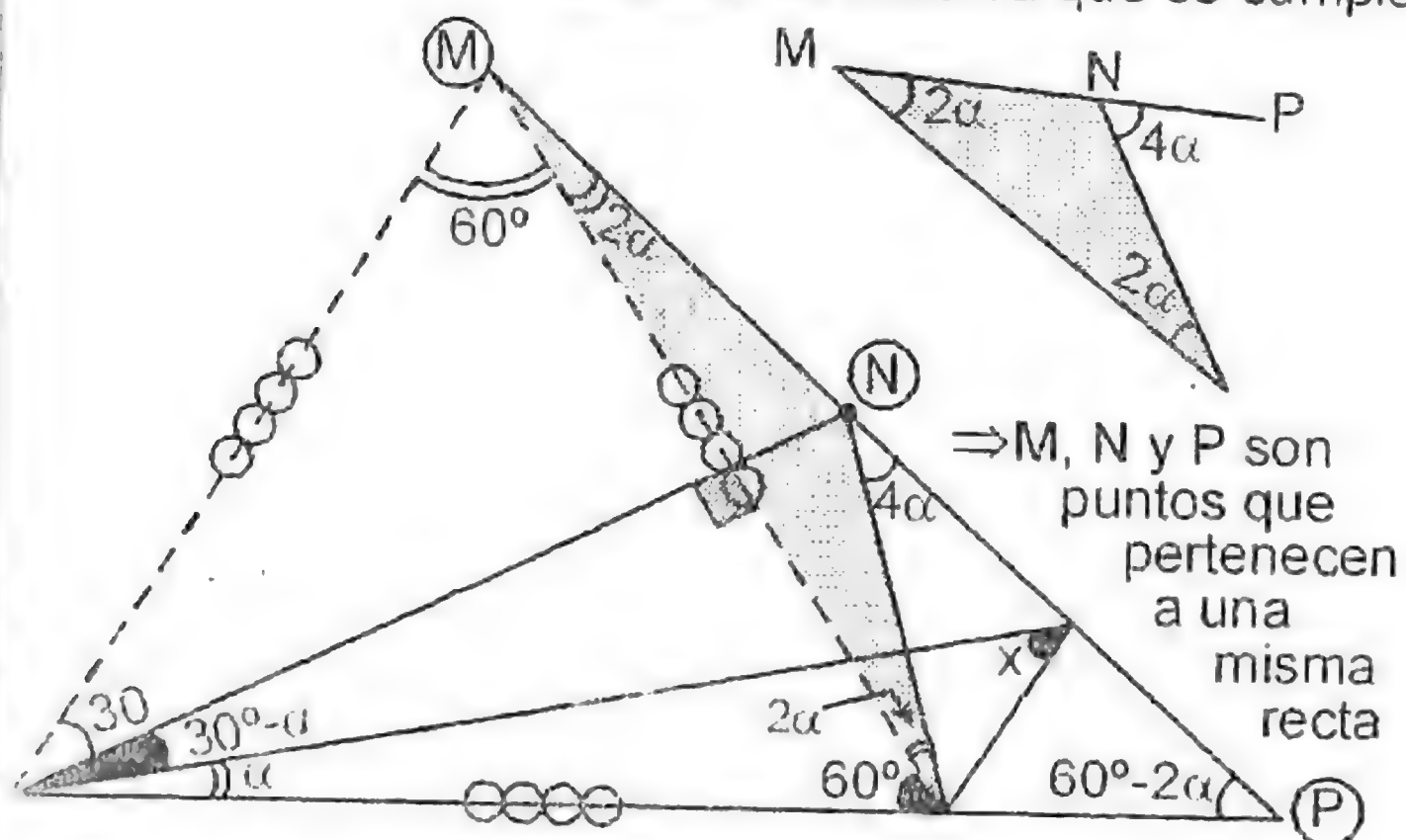
Ahora trazamos un triángulo equilátero exteriormente.



Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

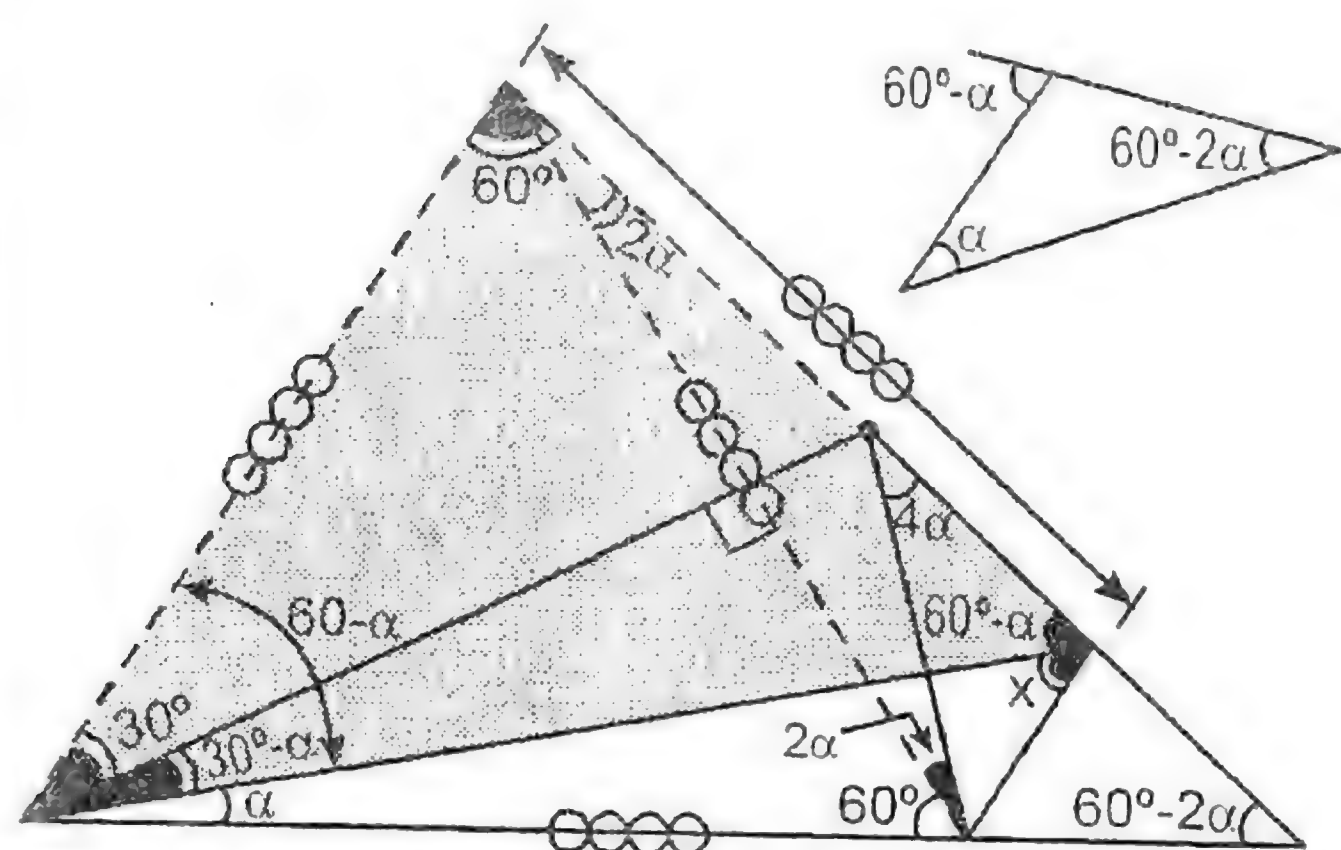
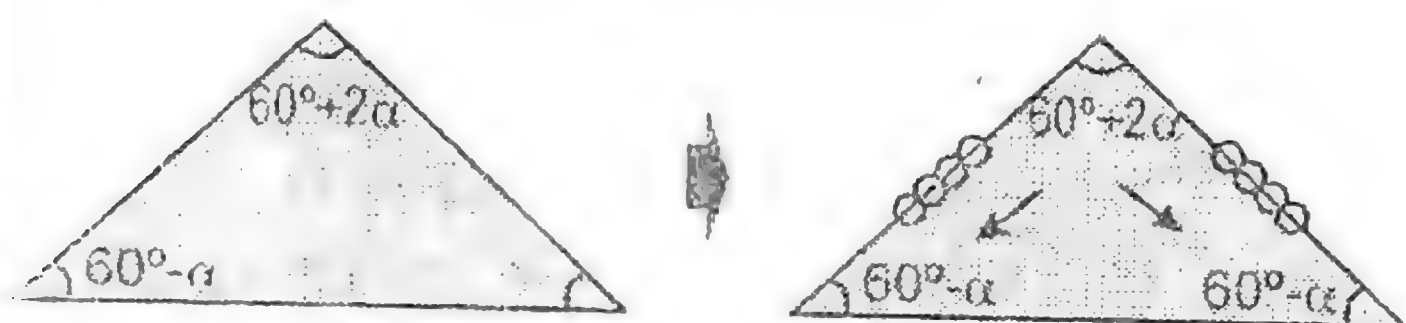


También se observa que se cumple:



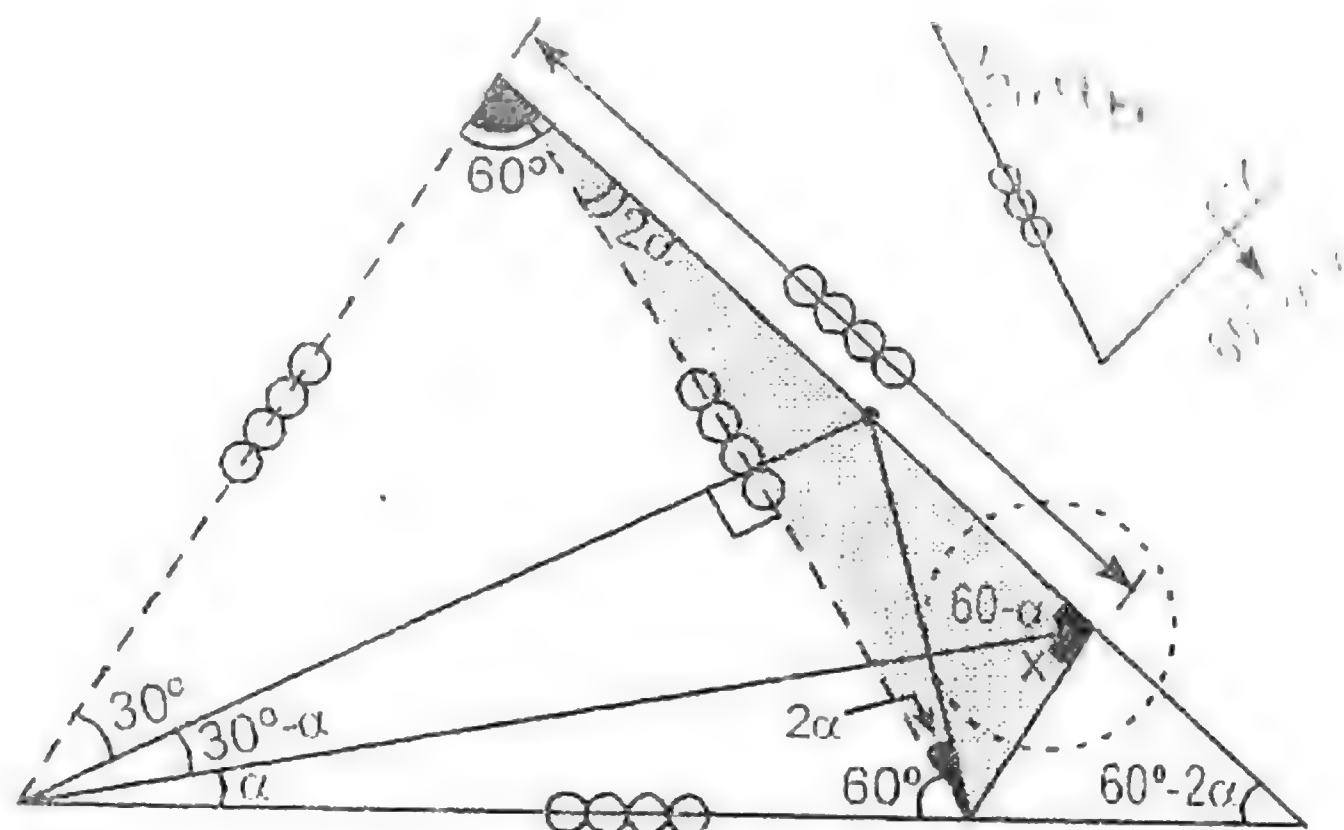
Paso N° 3

Se obtiene un triángulo isósceles.



Paso N° 4

Se observa en la figura sombreada un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:



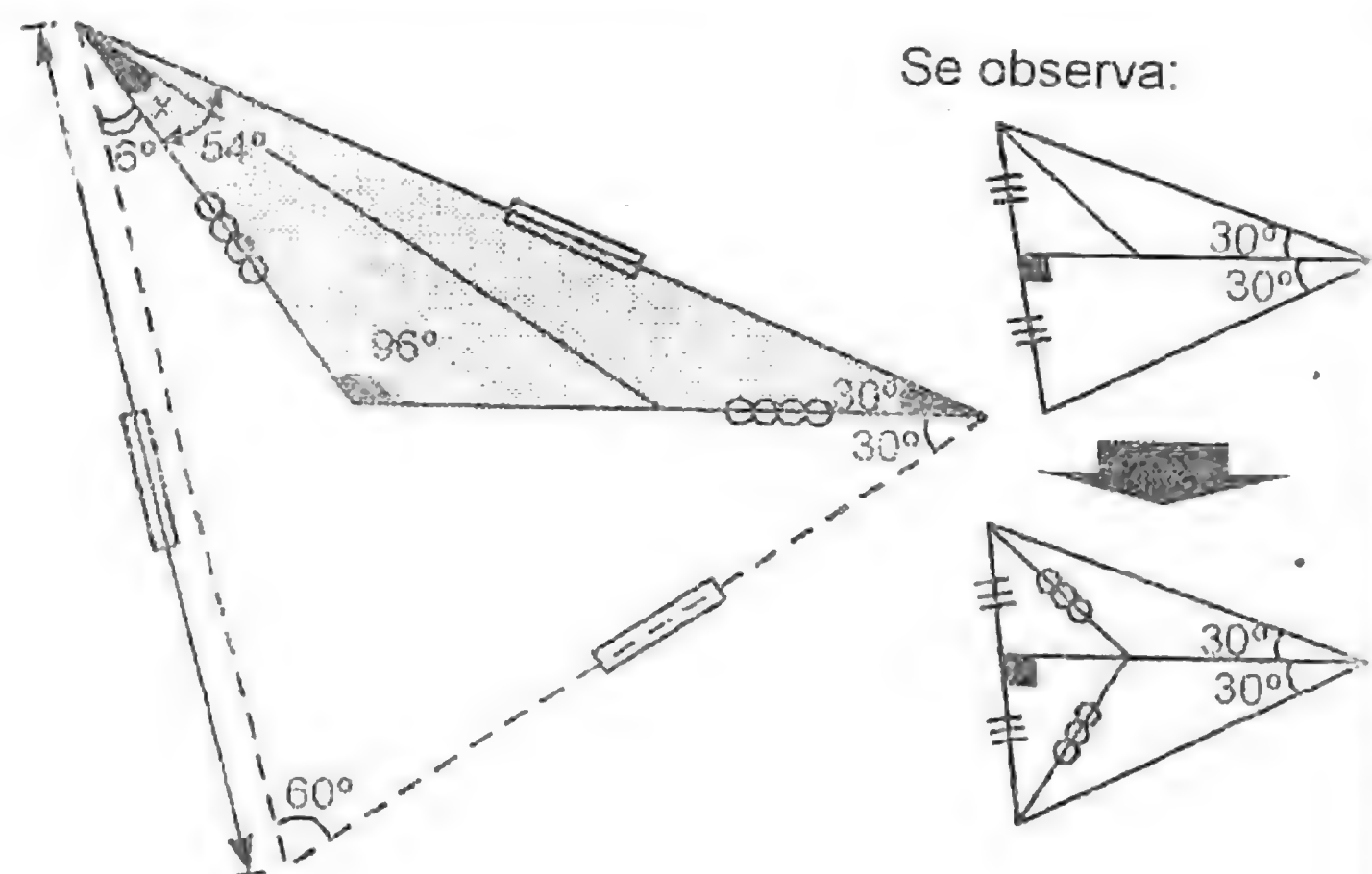
$$\Rightarrow 60^\circ - \alpha + x = 90^\circ - \alpha$$

$$x = 30^\circ$$

Solución N° 25

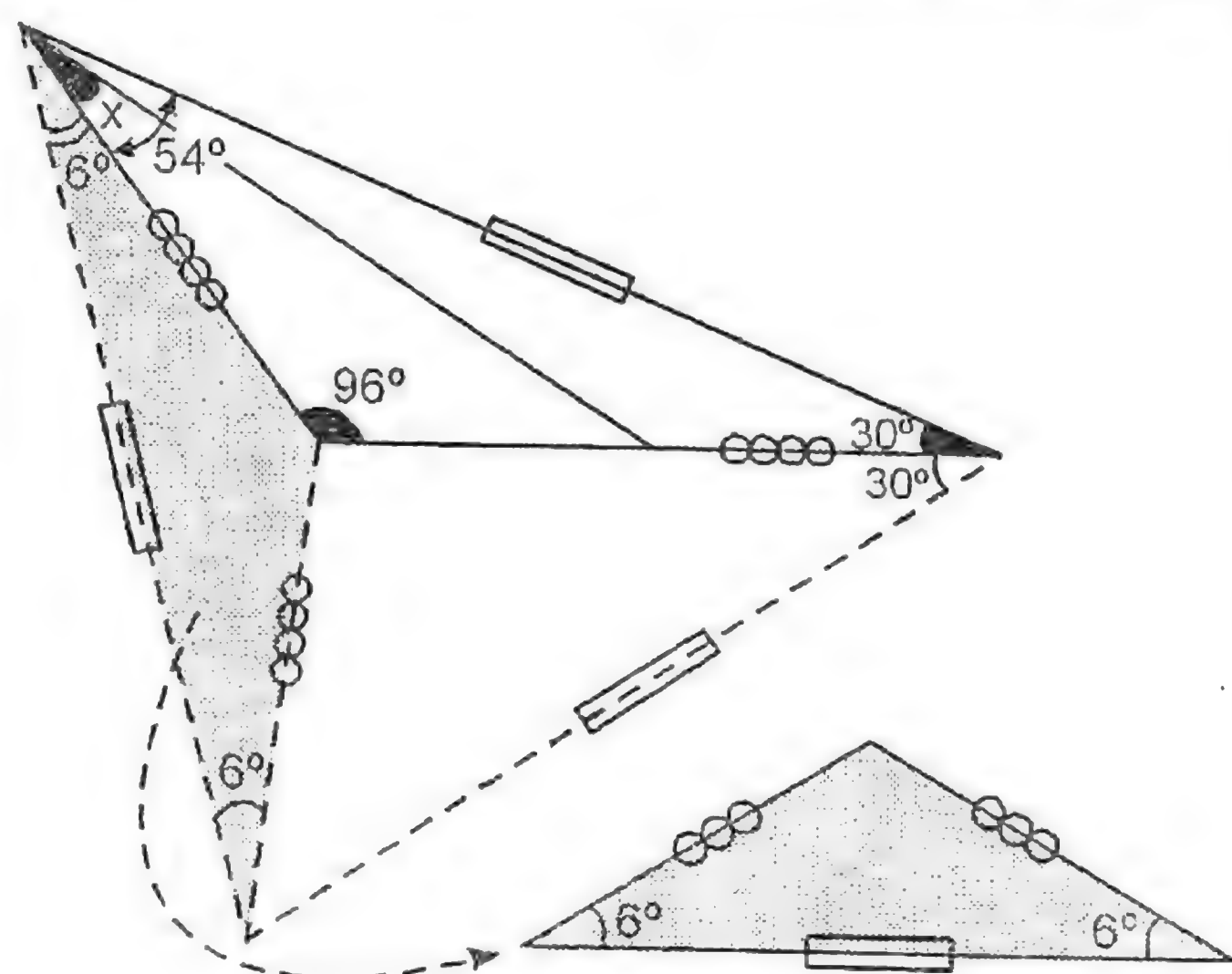
Paso N° 1

Se observa un ángulo de 30°, entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera.



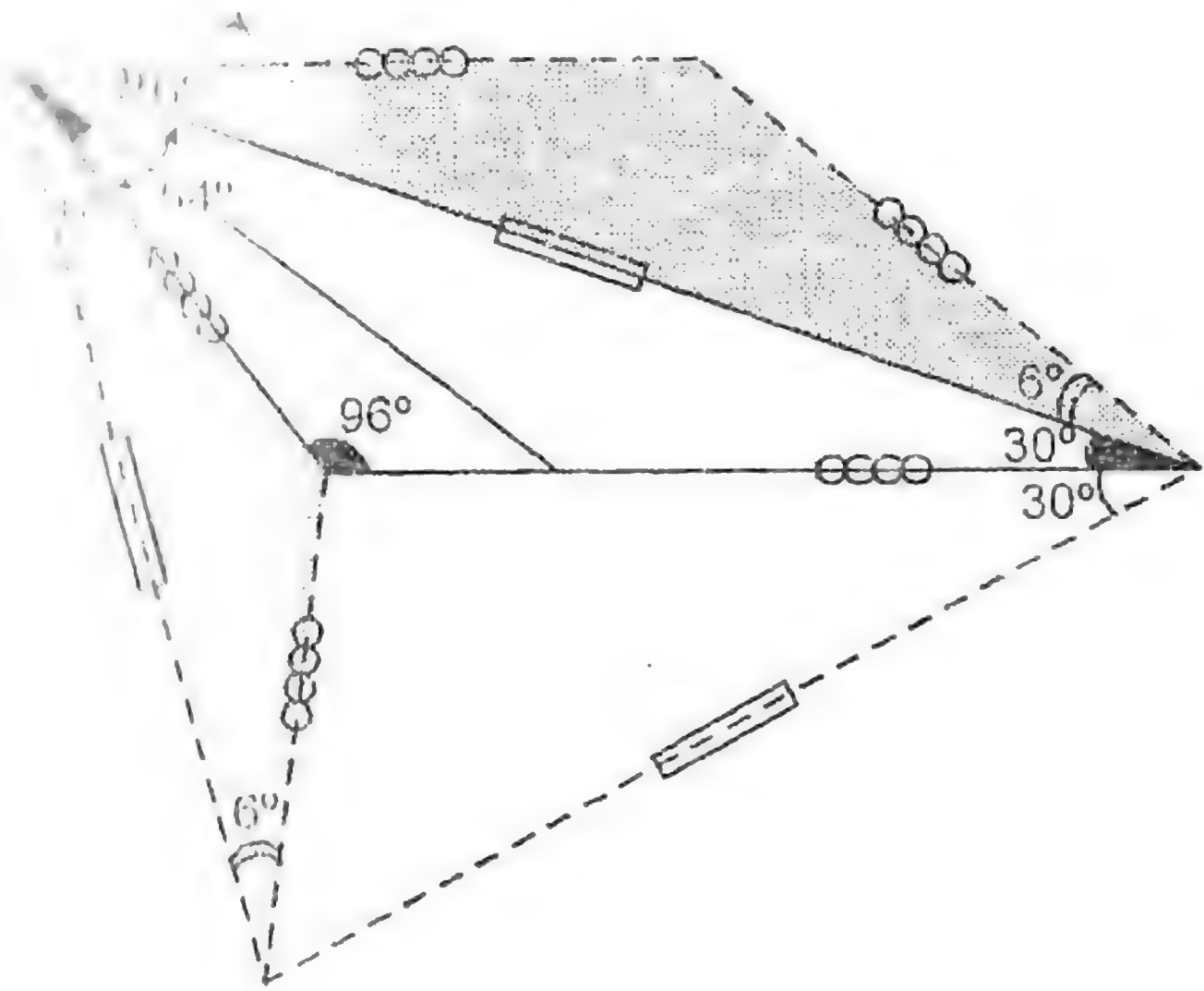
Paso N° 2

En el triángulo equilátero formado, se cumple:

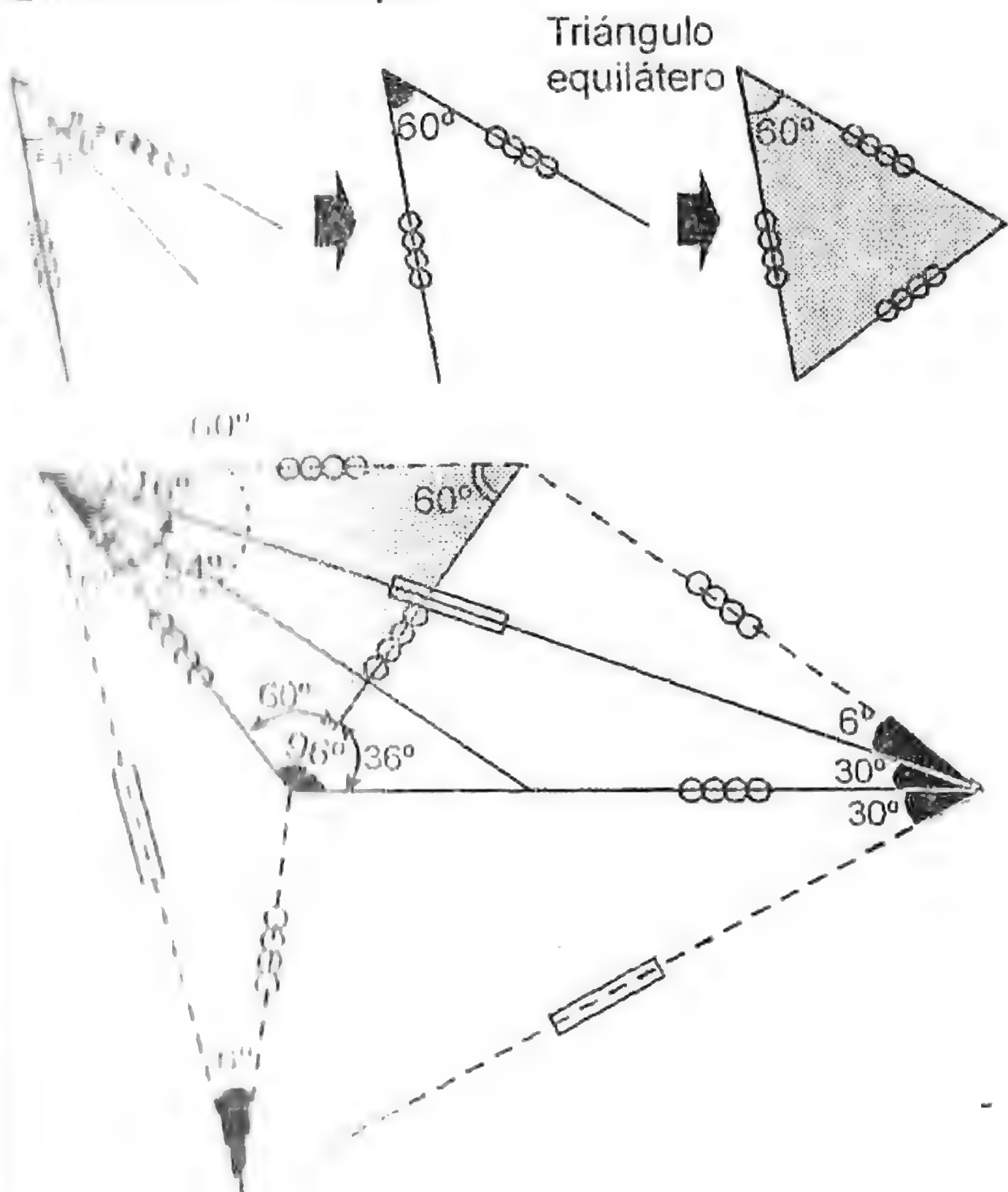


Paso N° 3

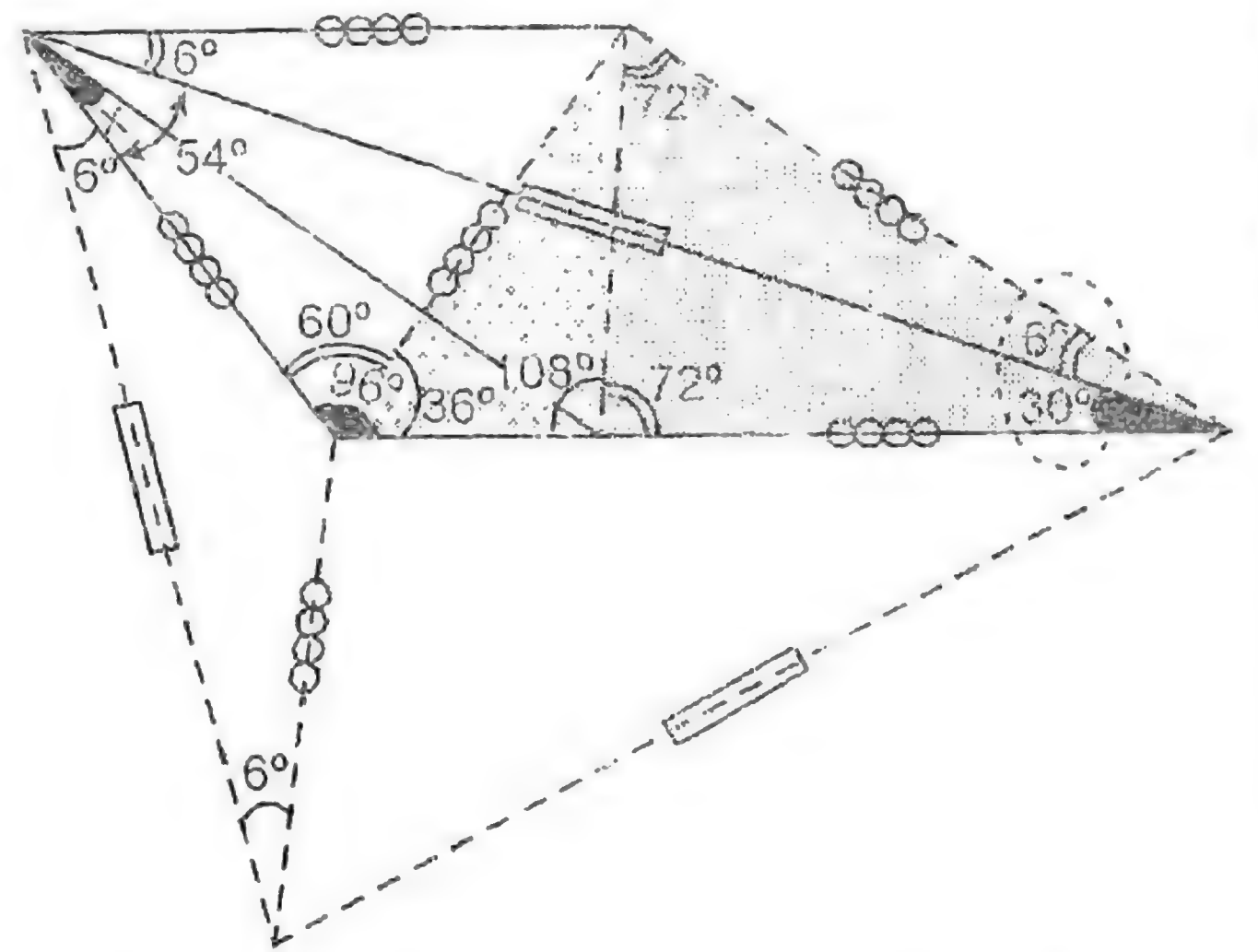
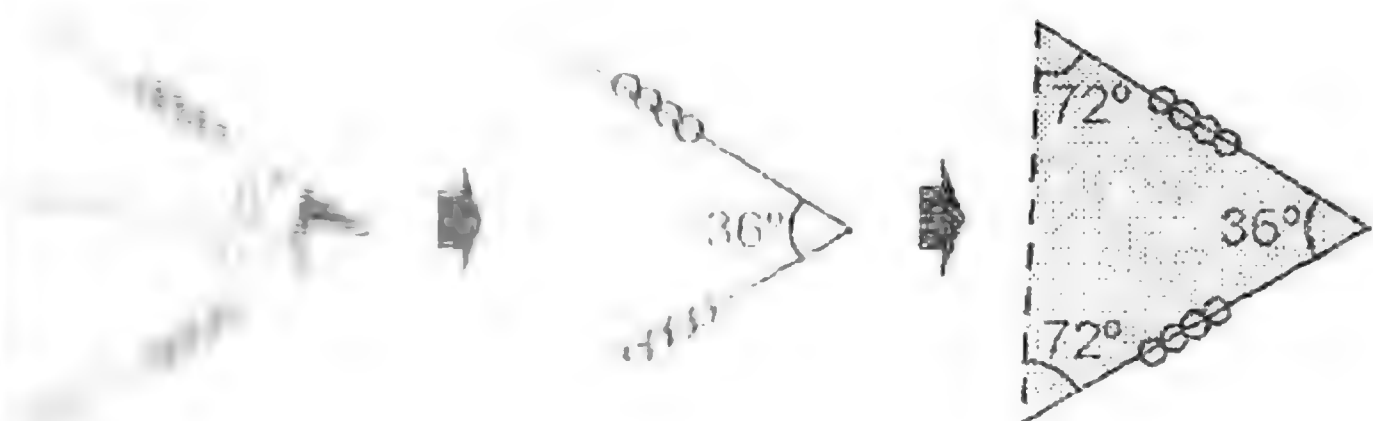
buscamos un triángulo externo congruente al triángulo isósceles obtenido en el paso anterior.



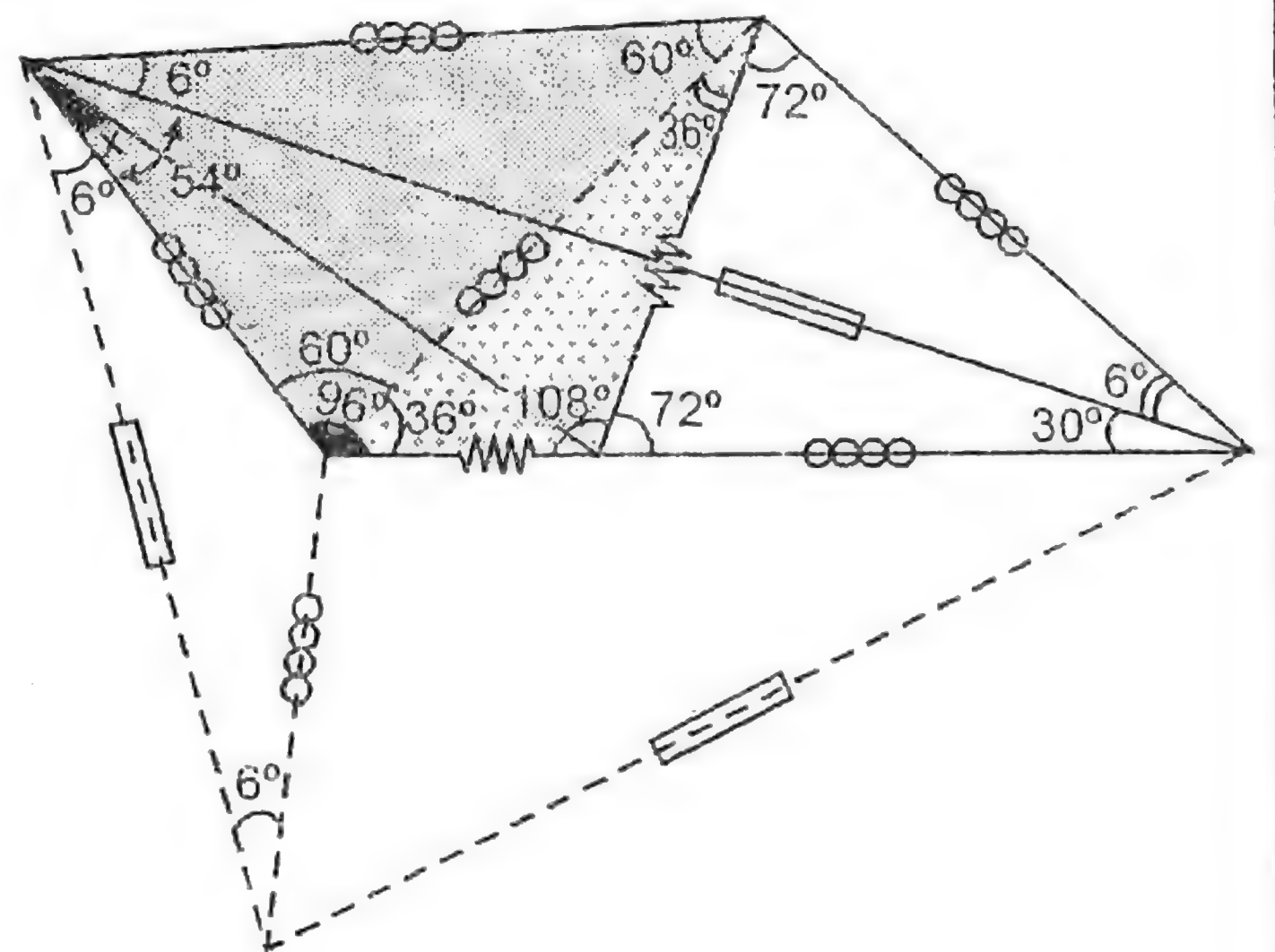
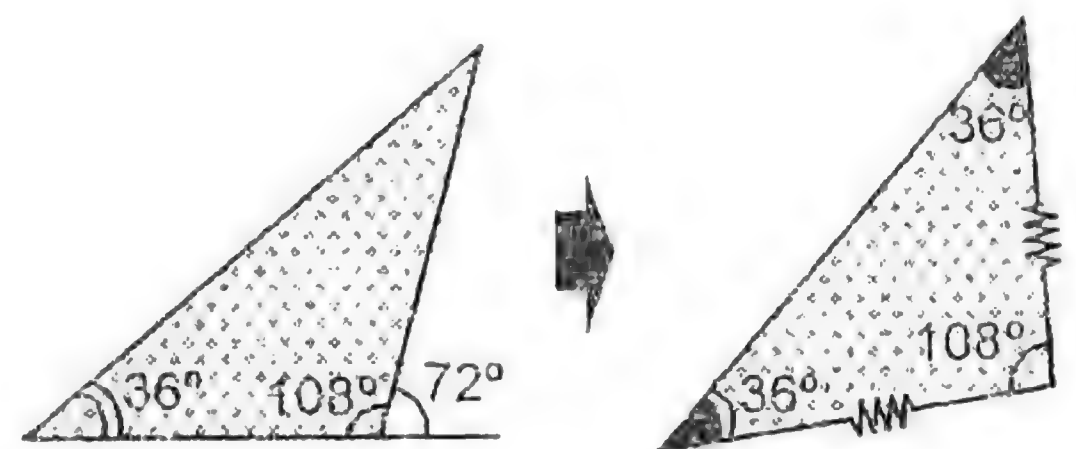
Paso N° 4: Y observa que se obtiene la siguiente figura donde cumple:



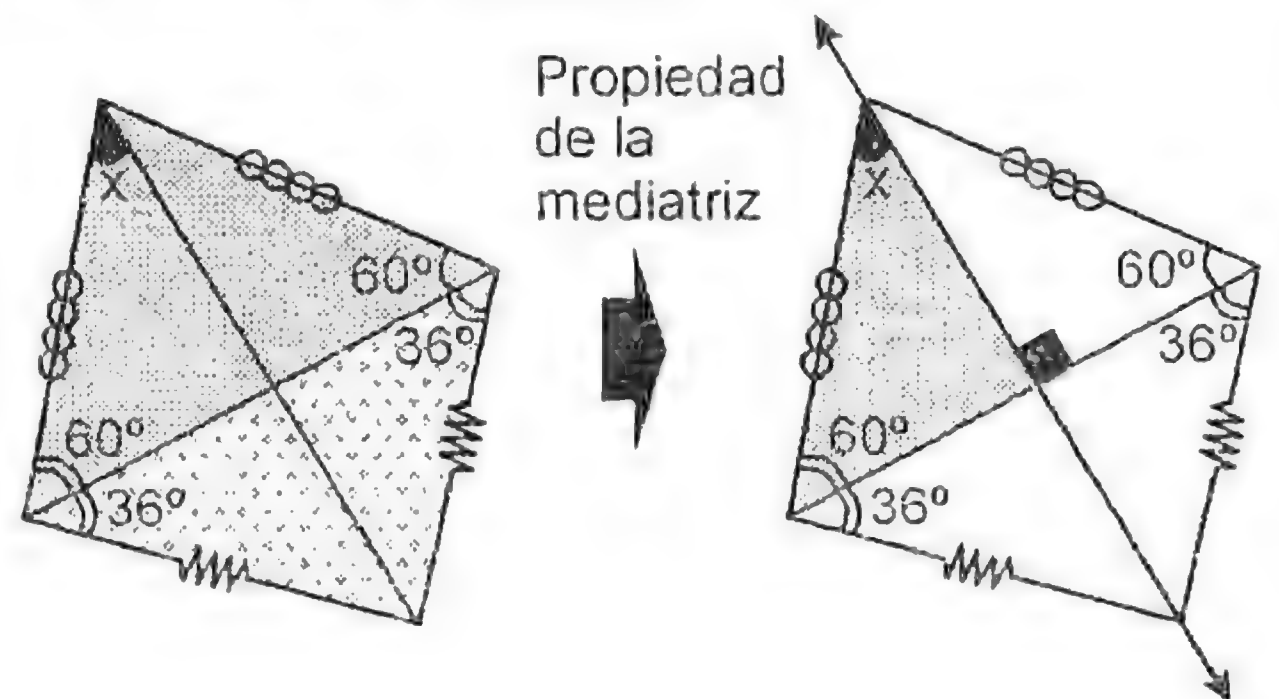
Paso N° 5: En la figura se obtiene un triángulo isósceles, de la siguiente manera:



Se observa también un nuevo triángulo isósceles:



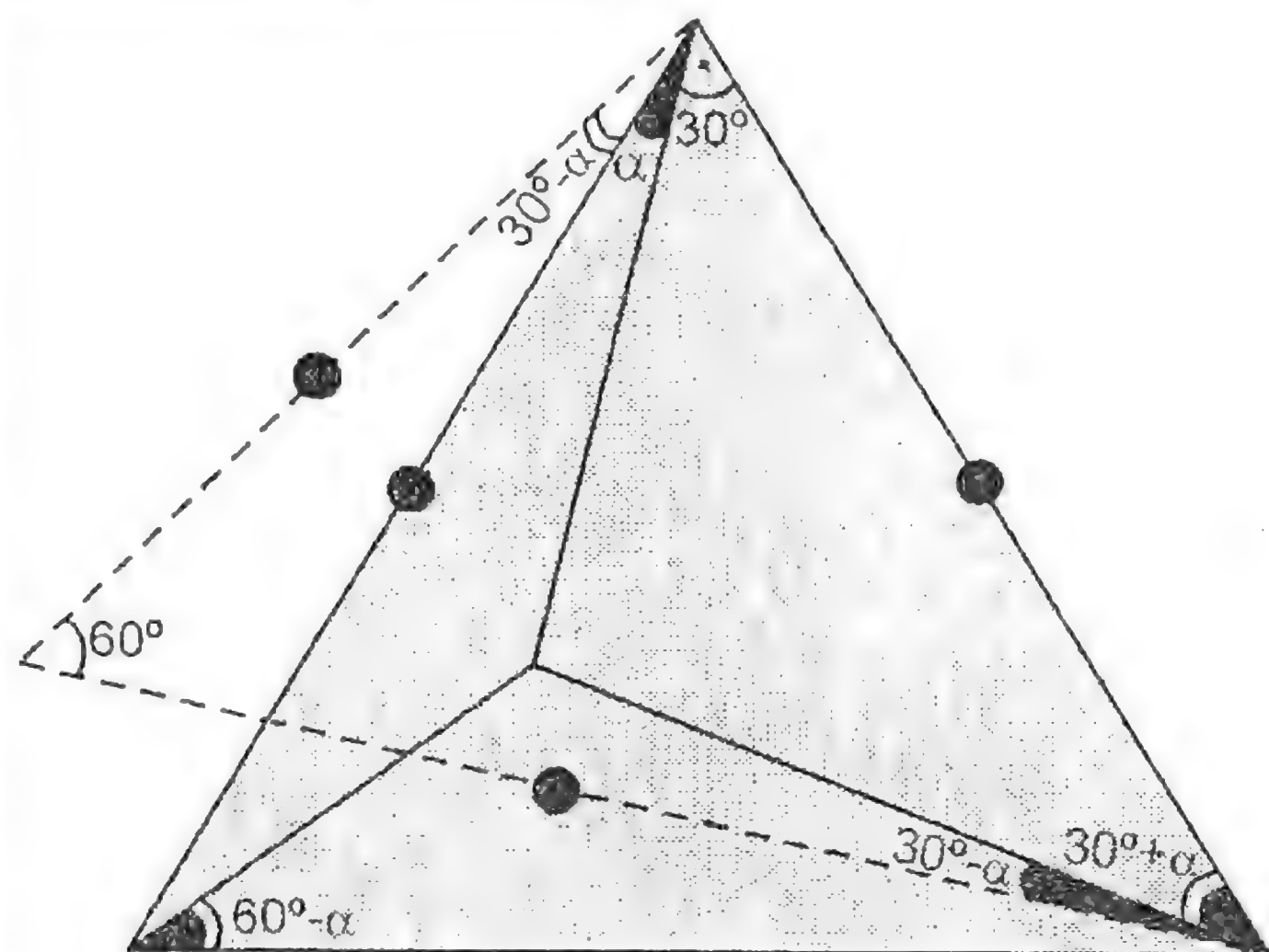
Con los trazos realizados se obtiene la siguiente figura, donde se cumple:



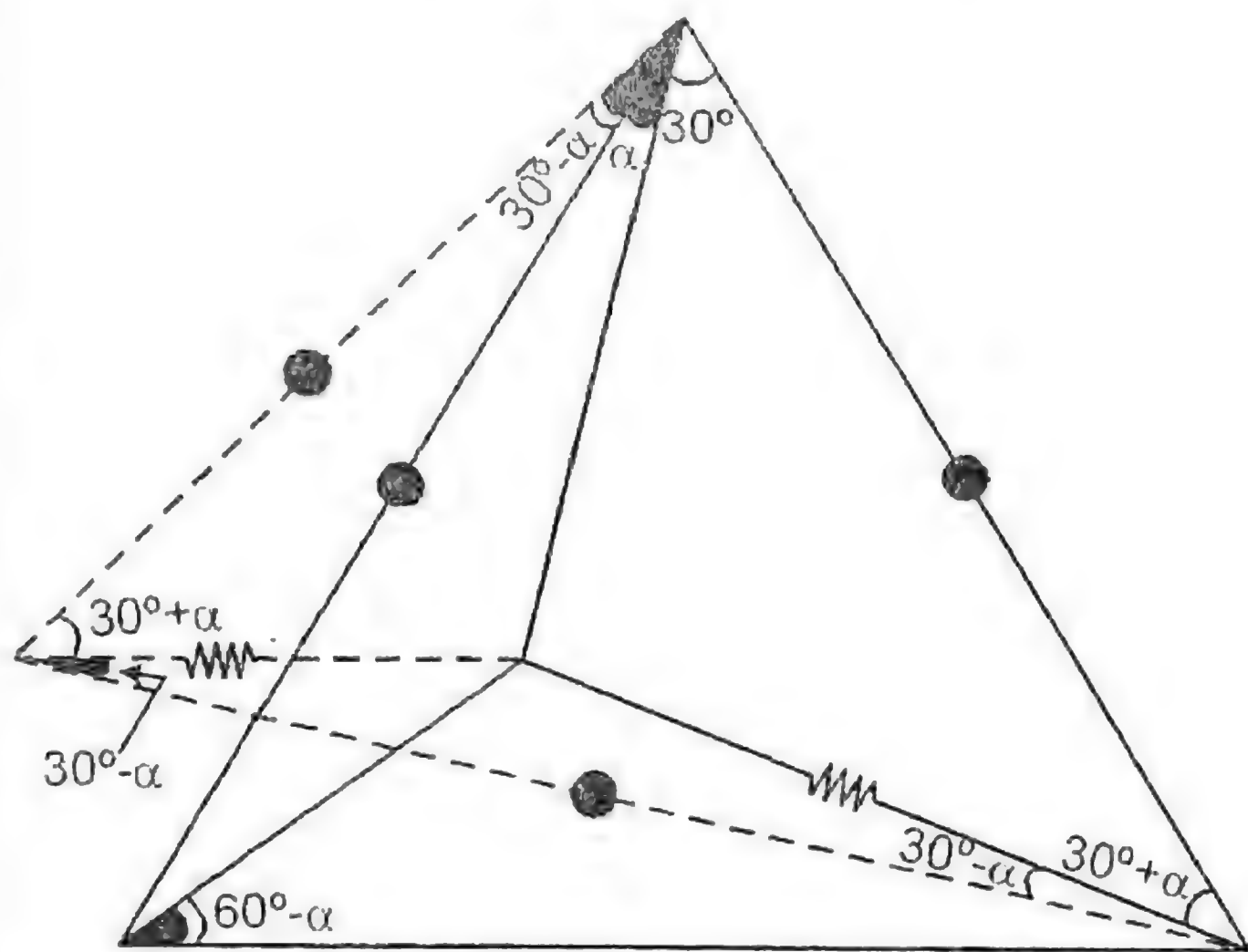
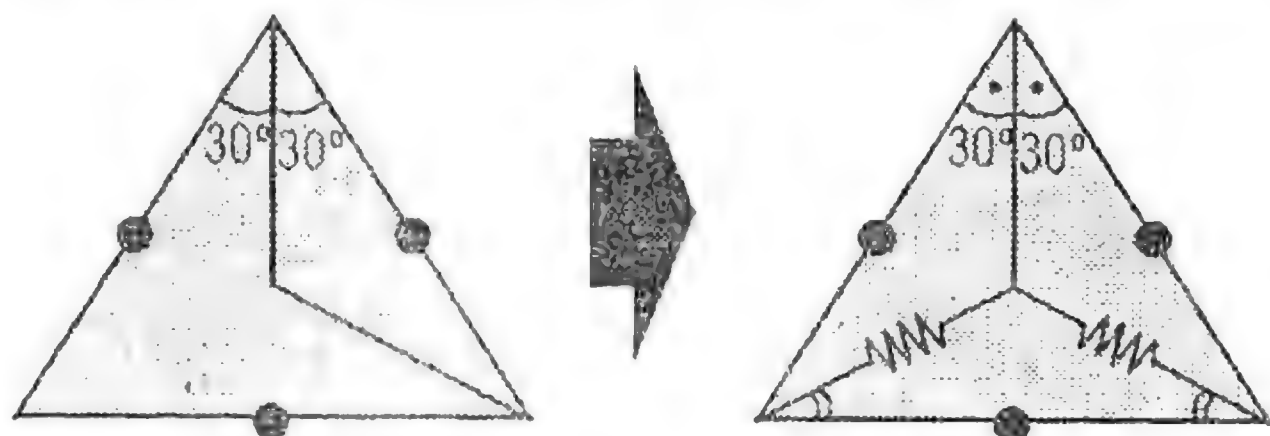
$$\therefore x = 30^\circ$$

Solución N° 26**Paso N° 1 :**

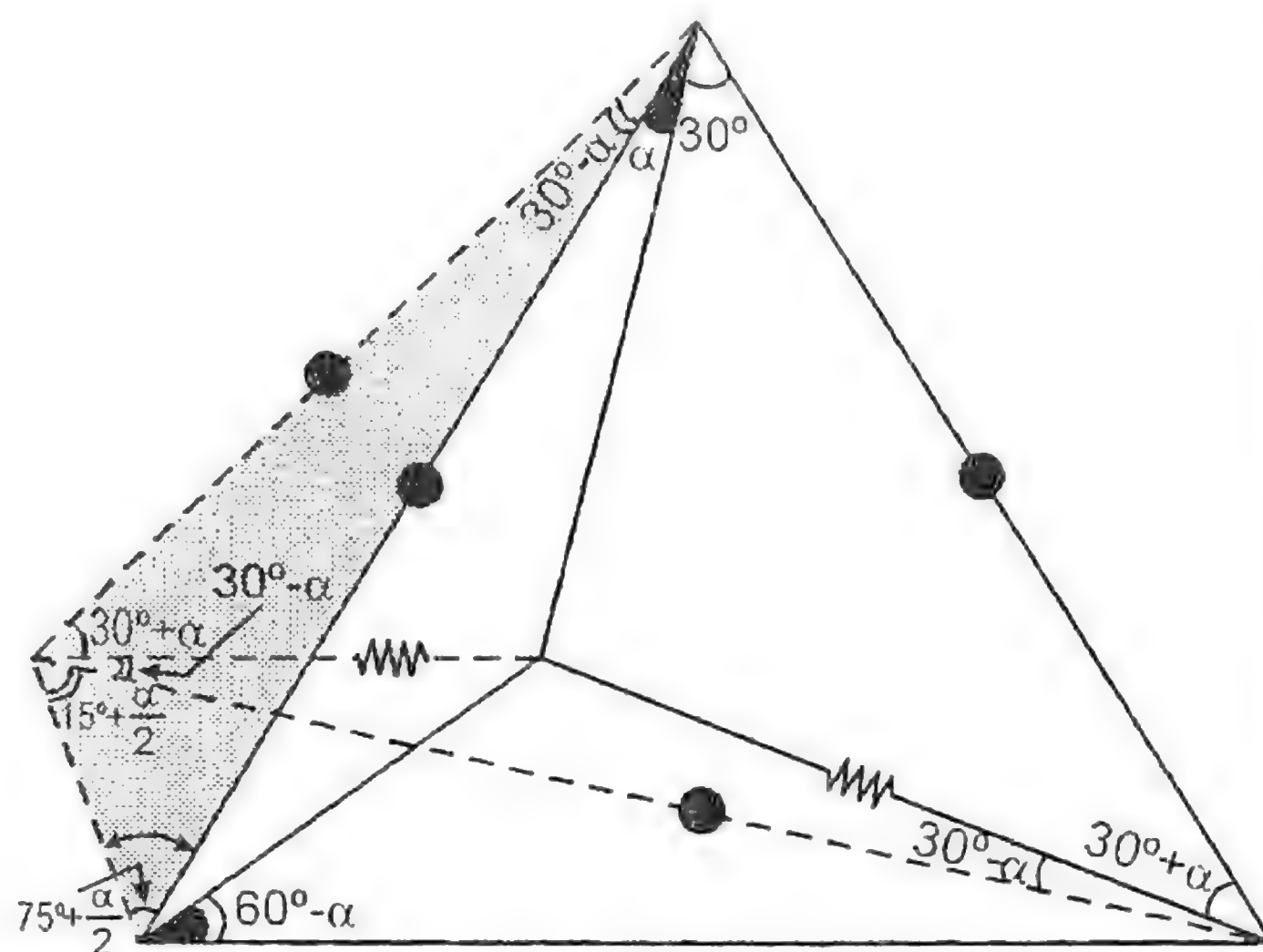
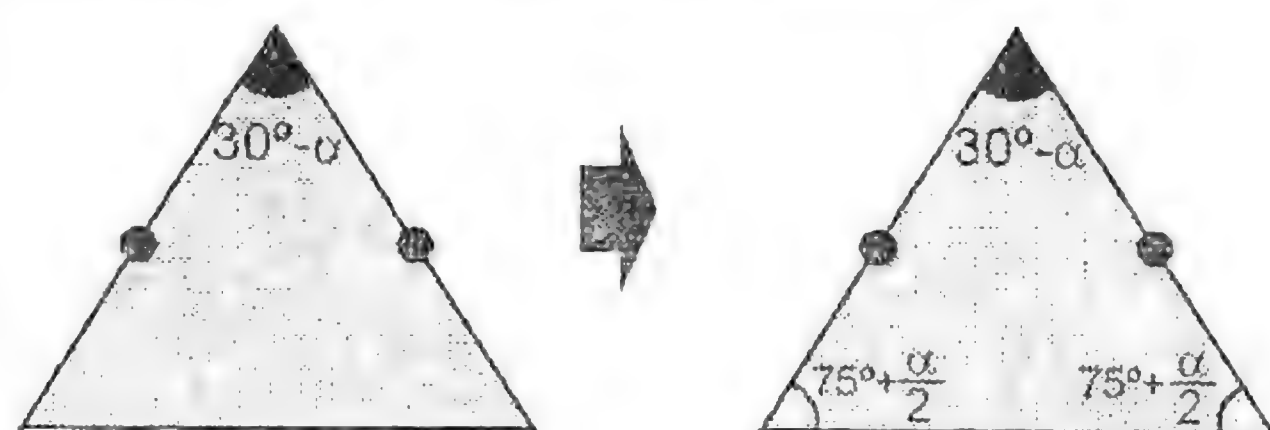
Se observa un ángulo de 30° entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera:

**Paso N° 2:**

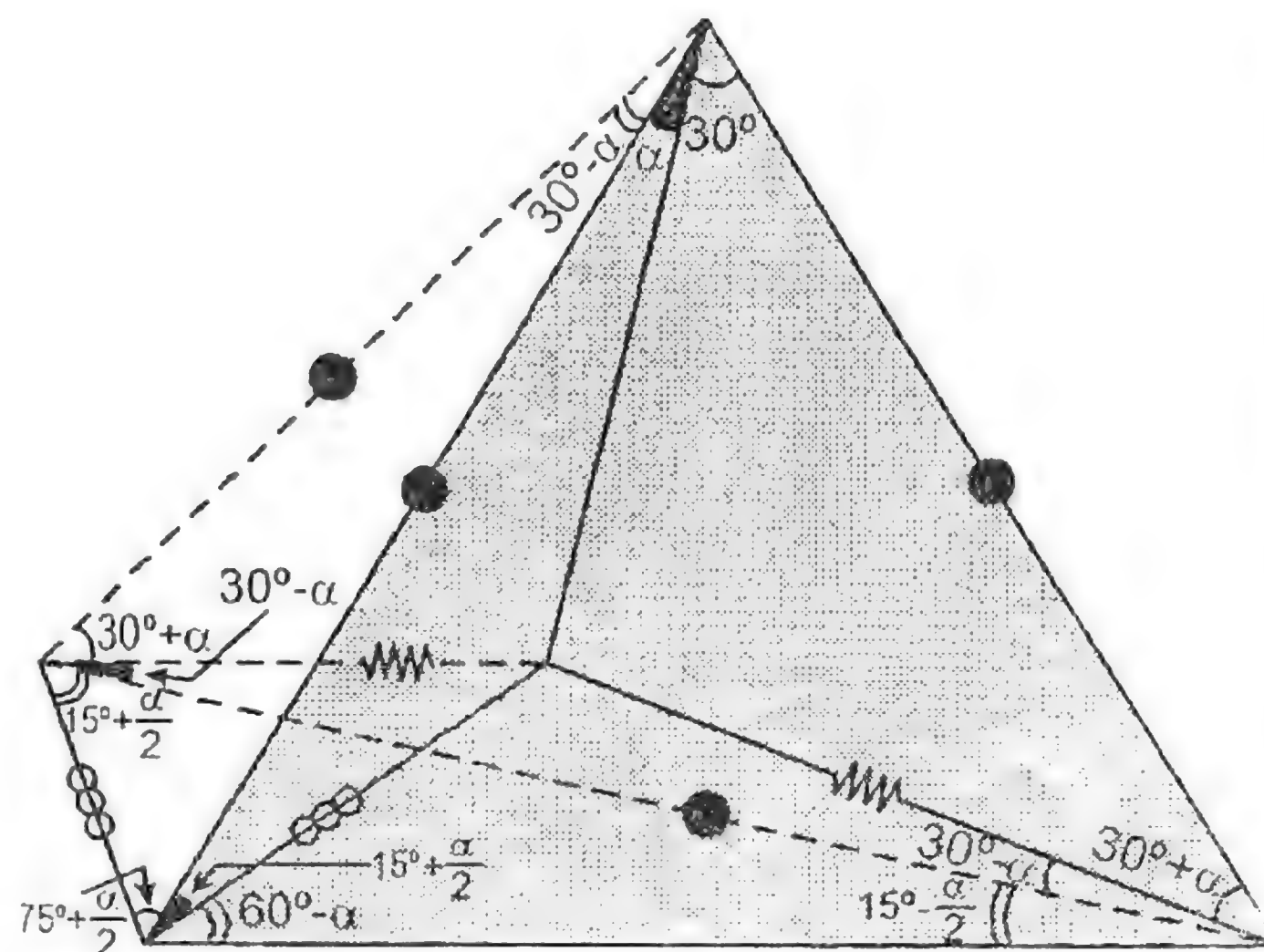
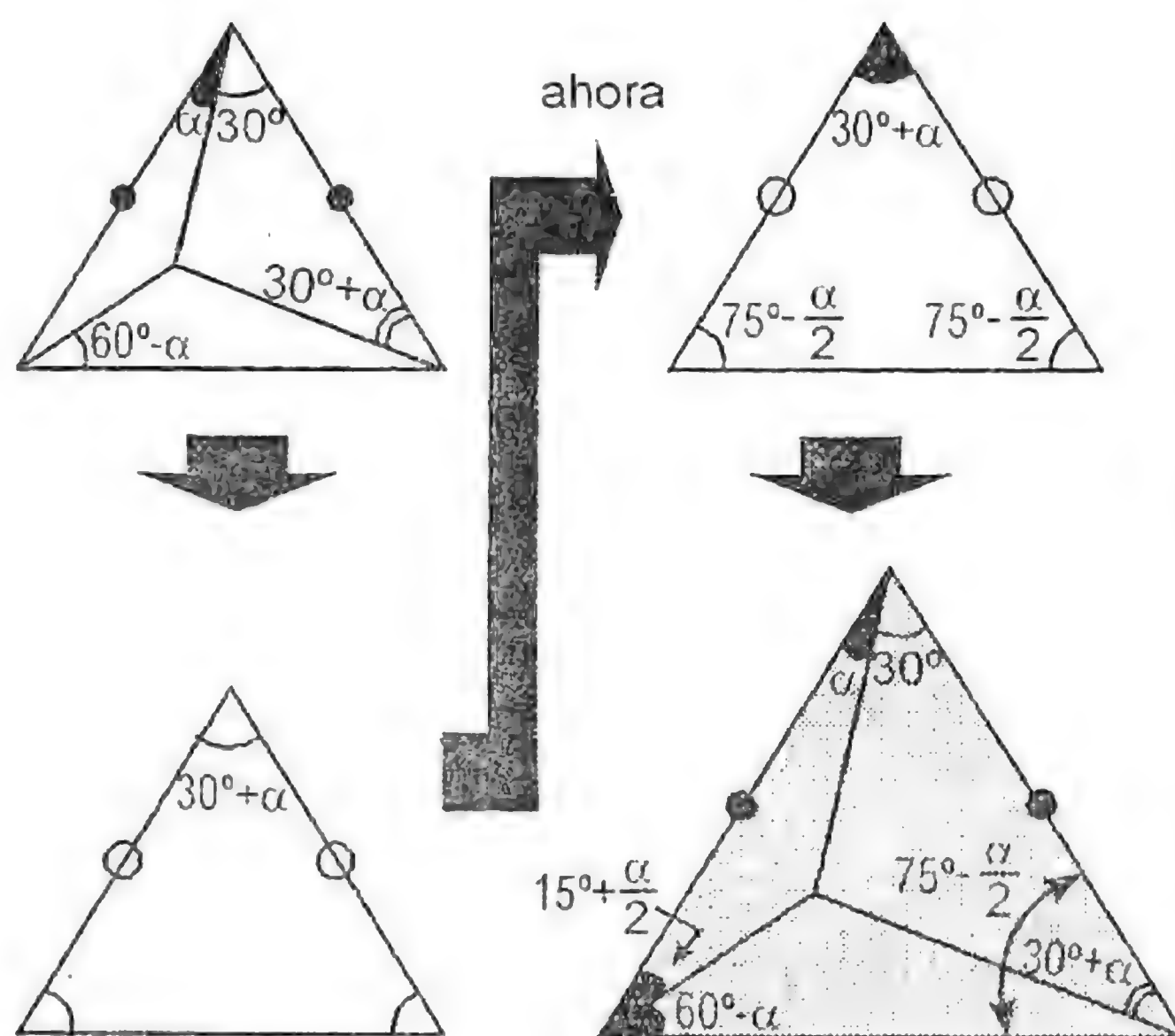
En el triángulo equilátero trazado, se cumple:

**Paso N° 3:**

Observamos un triángulo isósceles:

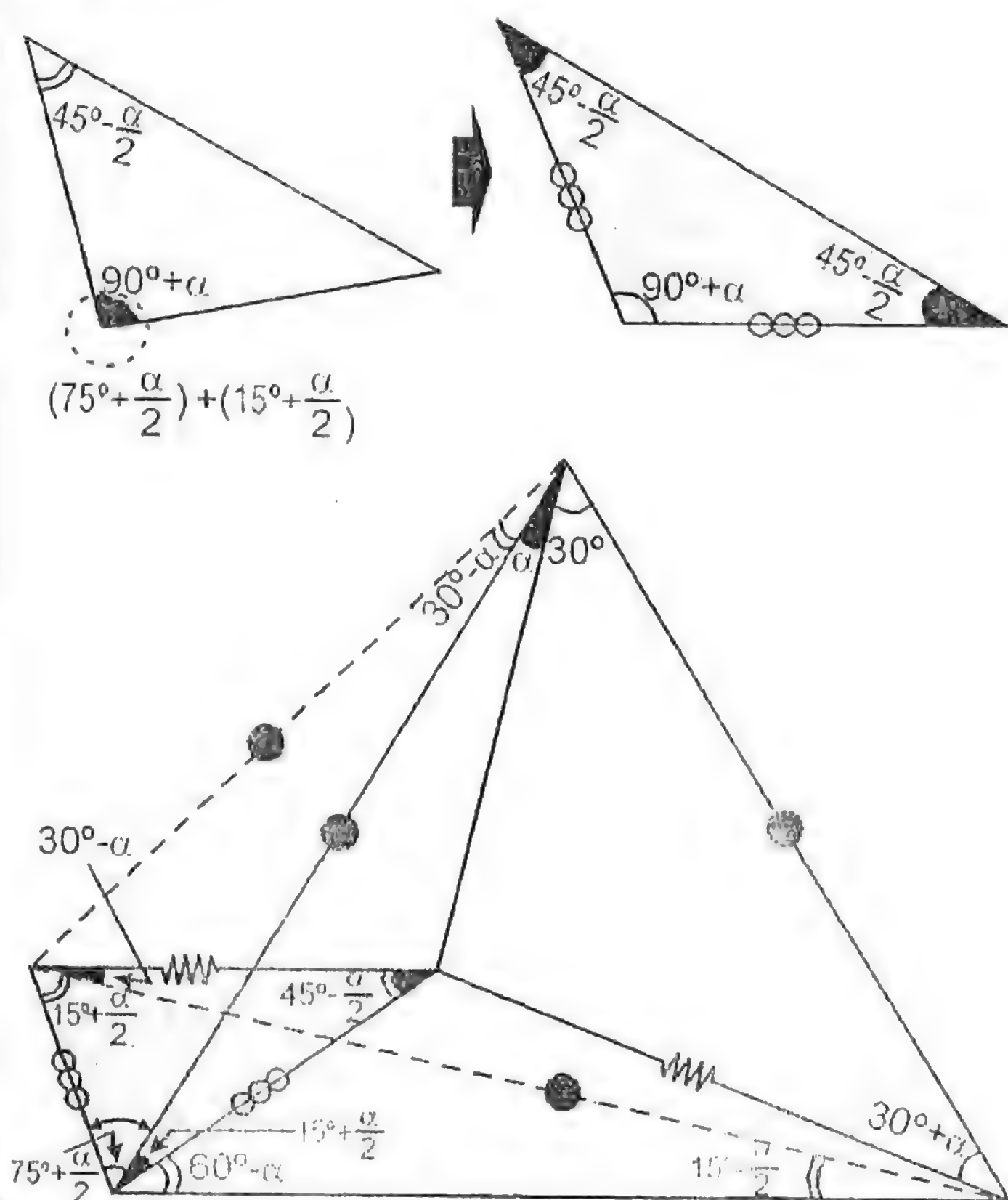
**Paso N° 4:**

Completando ángulos en el triángulo original.



Paso N° 5:

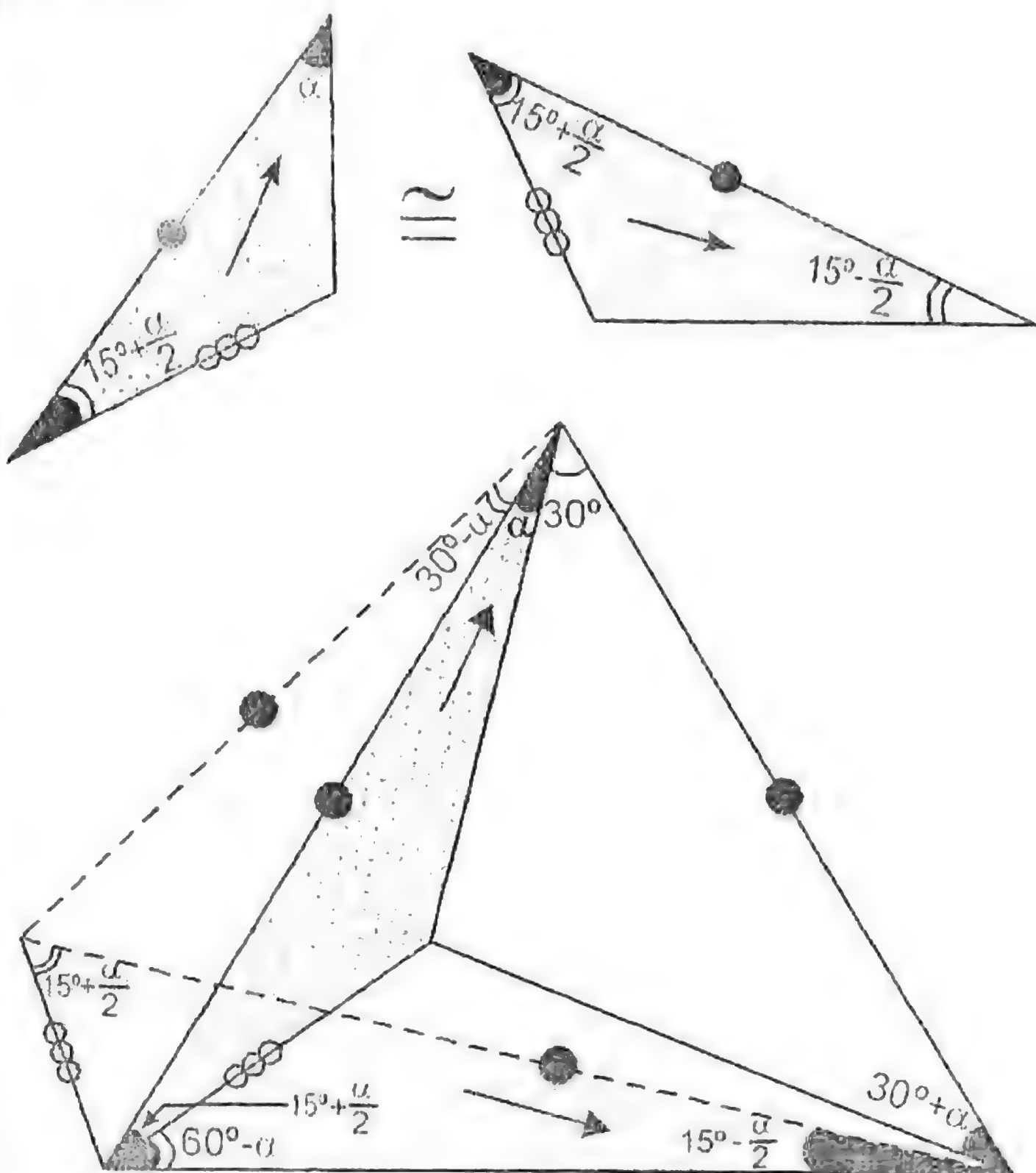
Se observa el siguiente triángulo sombreado en la figura:



70

Paso N° 6:

Se obtiene dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)

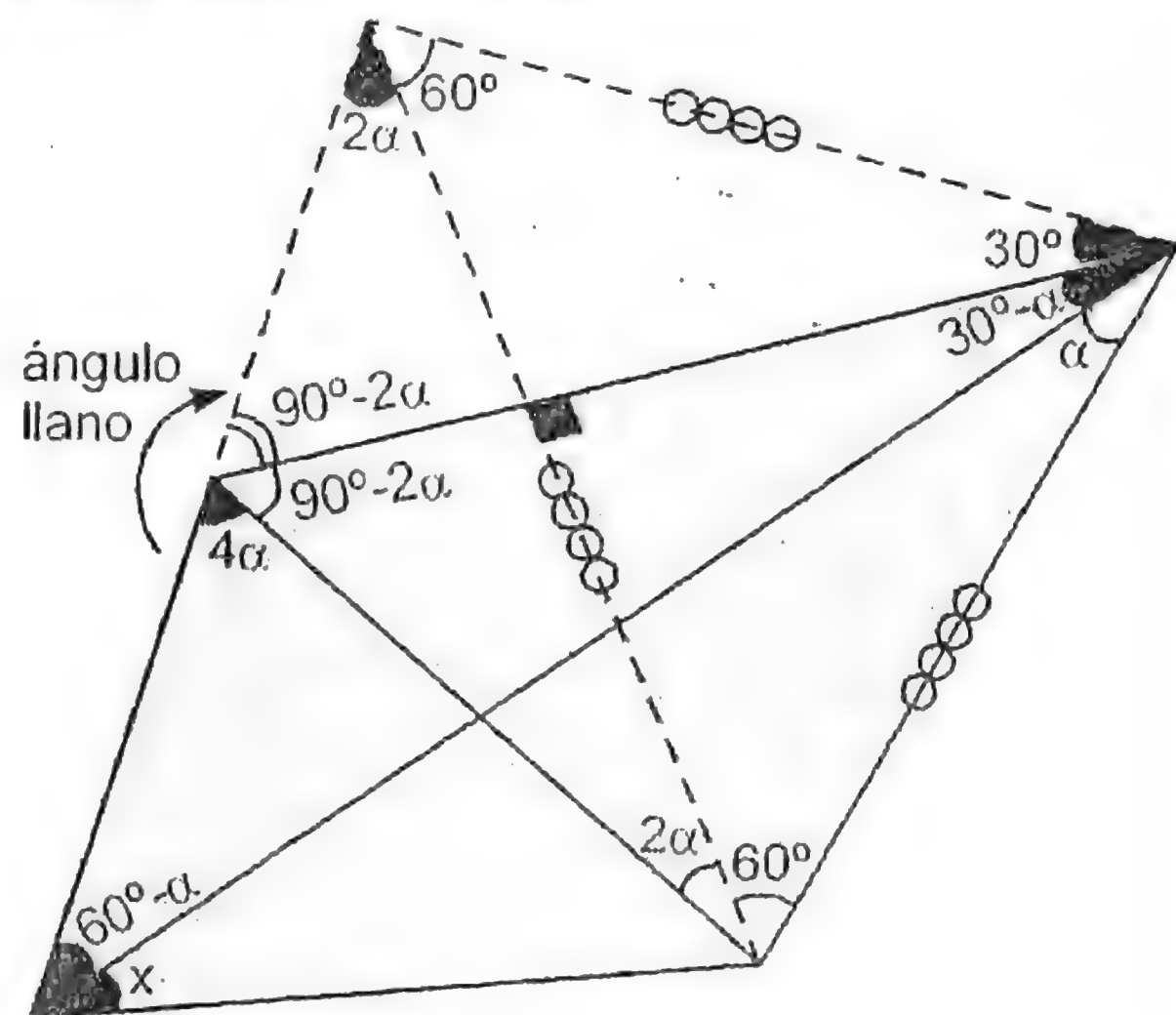


Por principio de congruencia: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

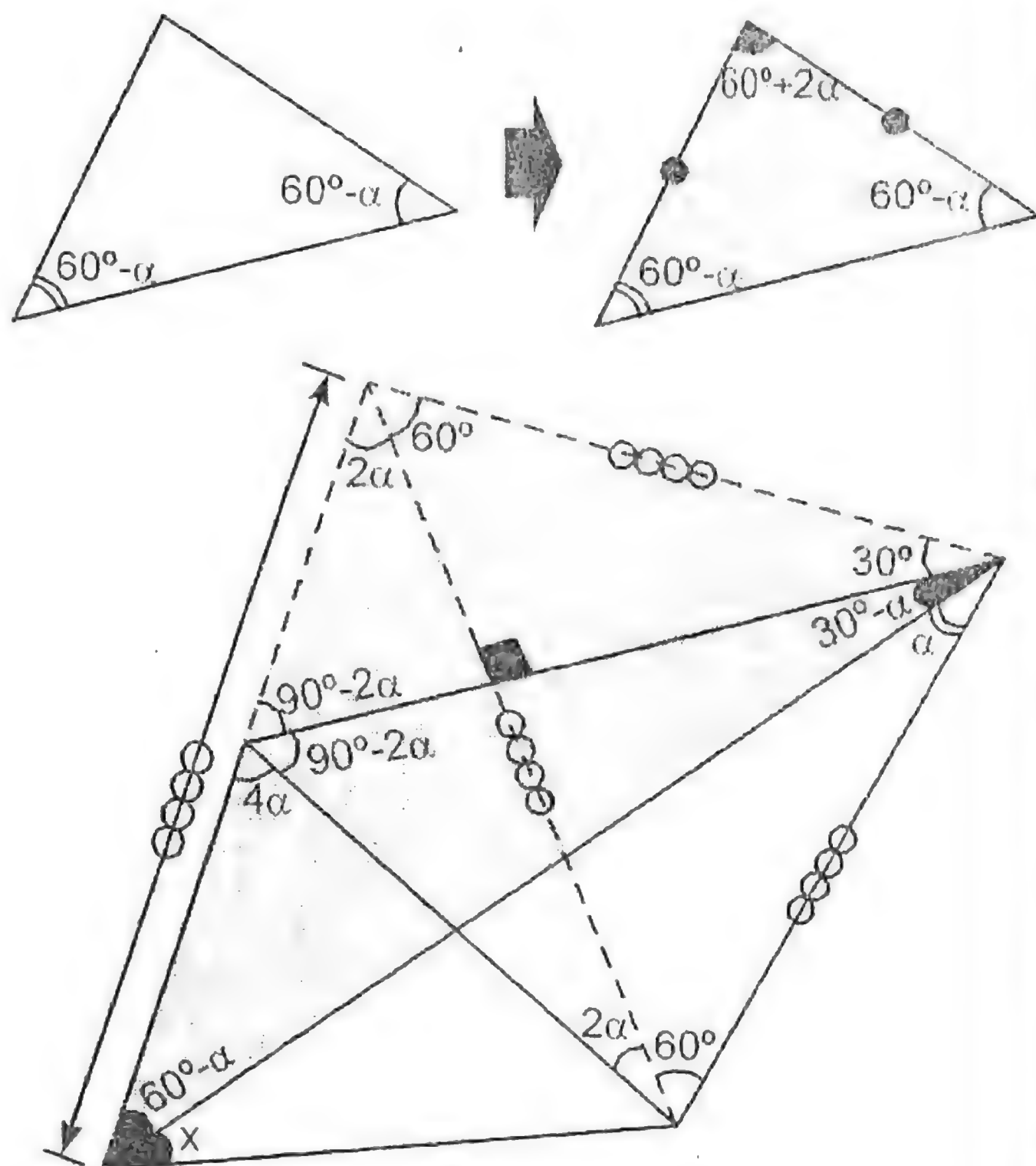
$$\begin{aligned} \therefore \alpha &= 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{3\alpha}{2} &= 15 \\ \alpha &= 10^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 27:

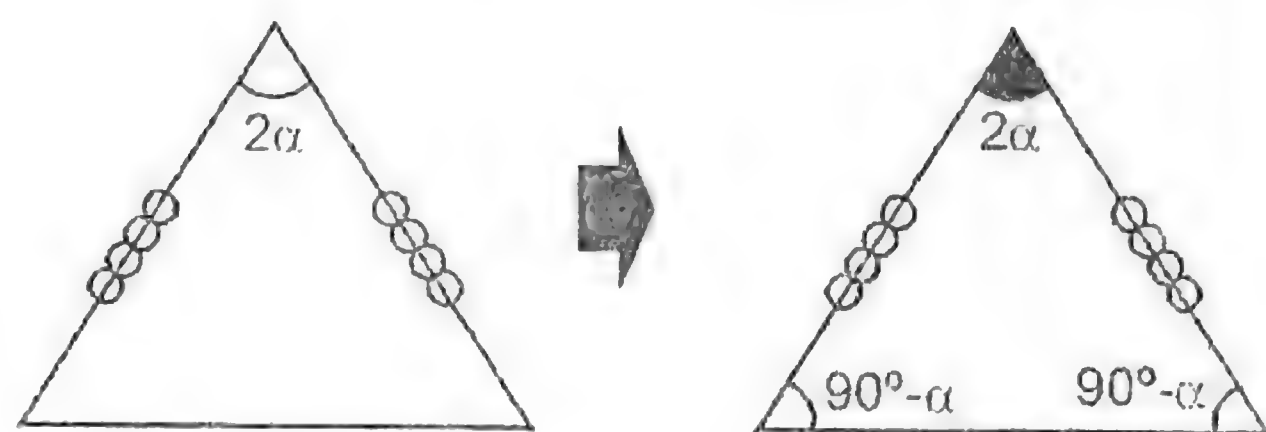
Paso N° 1: Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

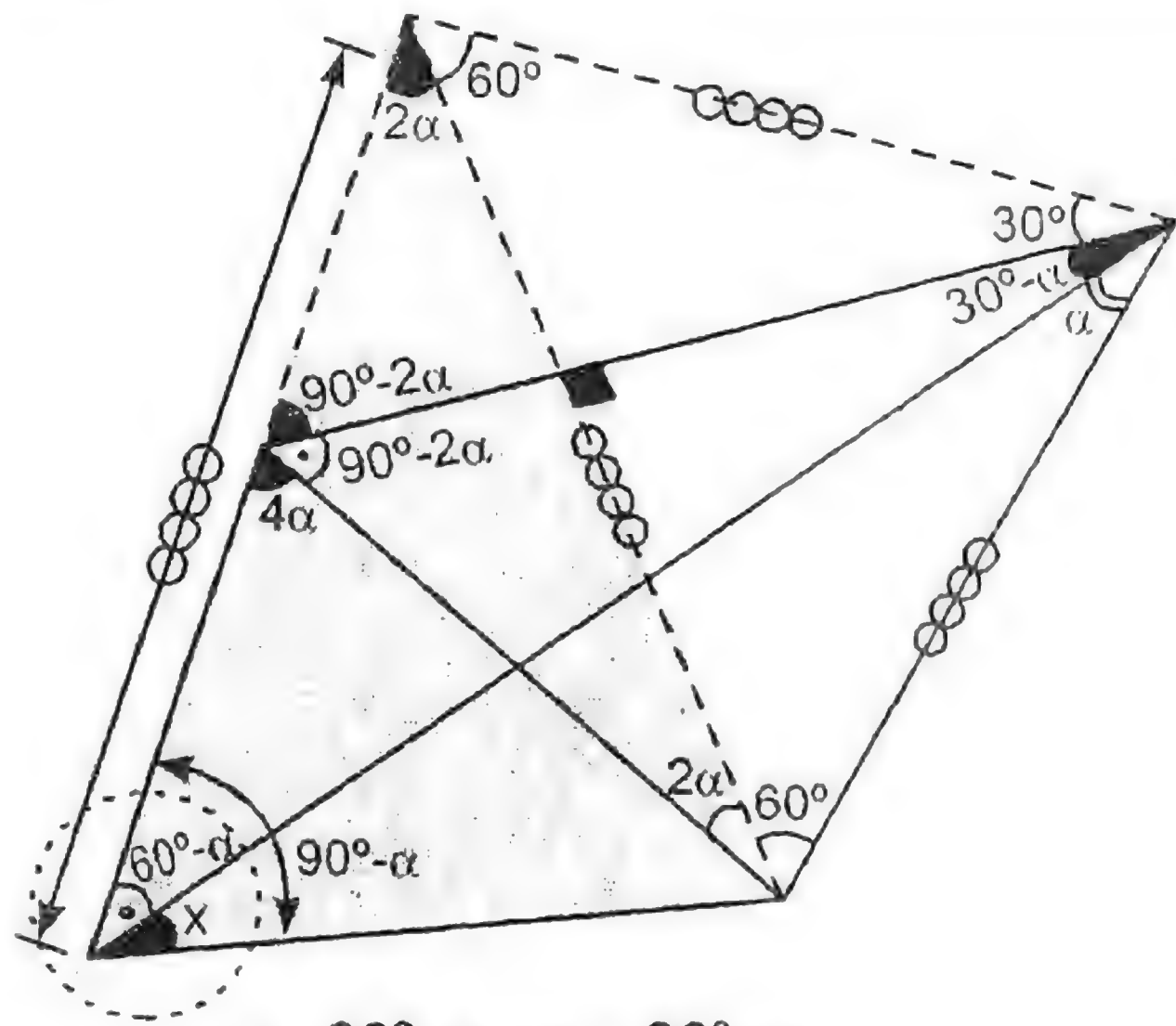


Paso N° 2: Se observa un triángulo isósceles.



Paso N° 3: Se tiene un triángulo isósceles.





$$\Rightarrow 60^\circ - \alpha + x = 90^\circ - \alpha$$

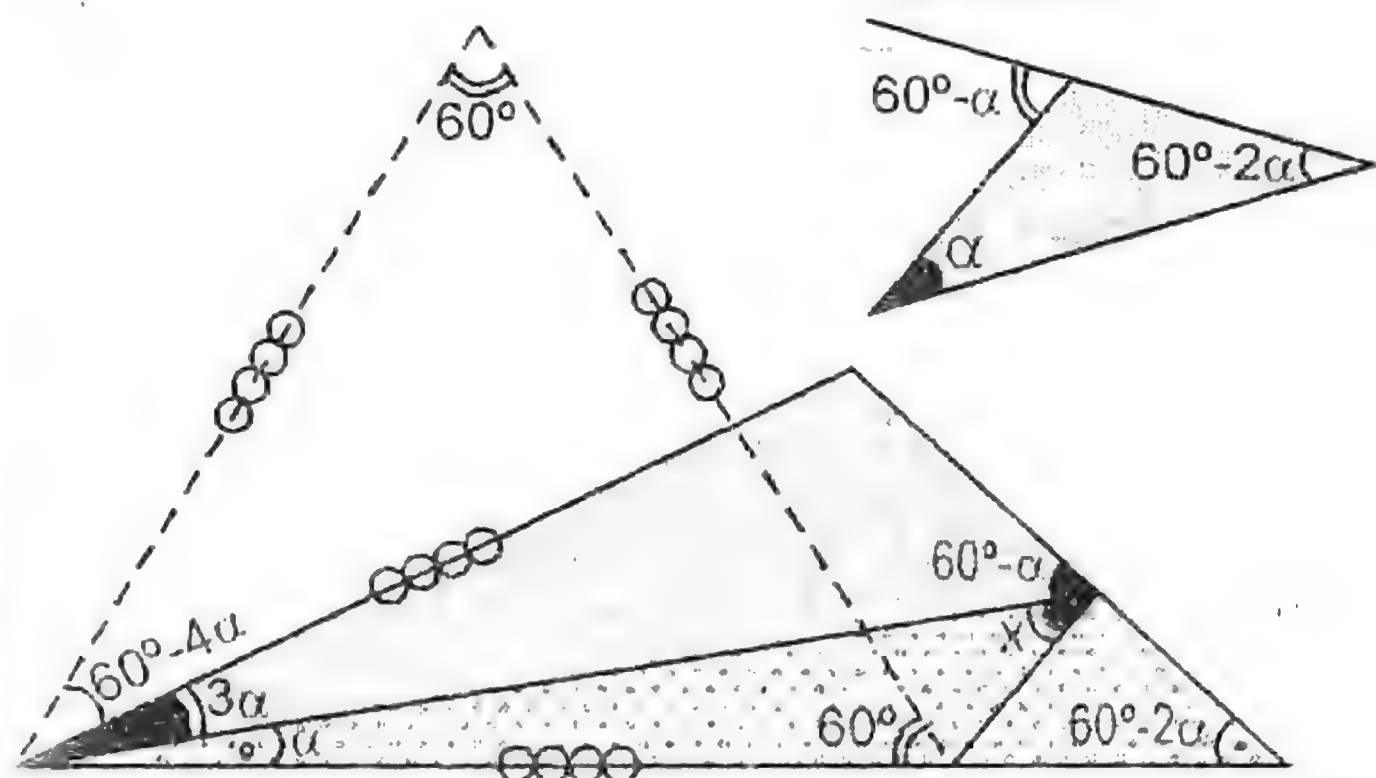
$$x = 30^\circ$$

Solución No 28

Paso N° 1:

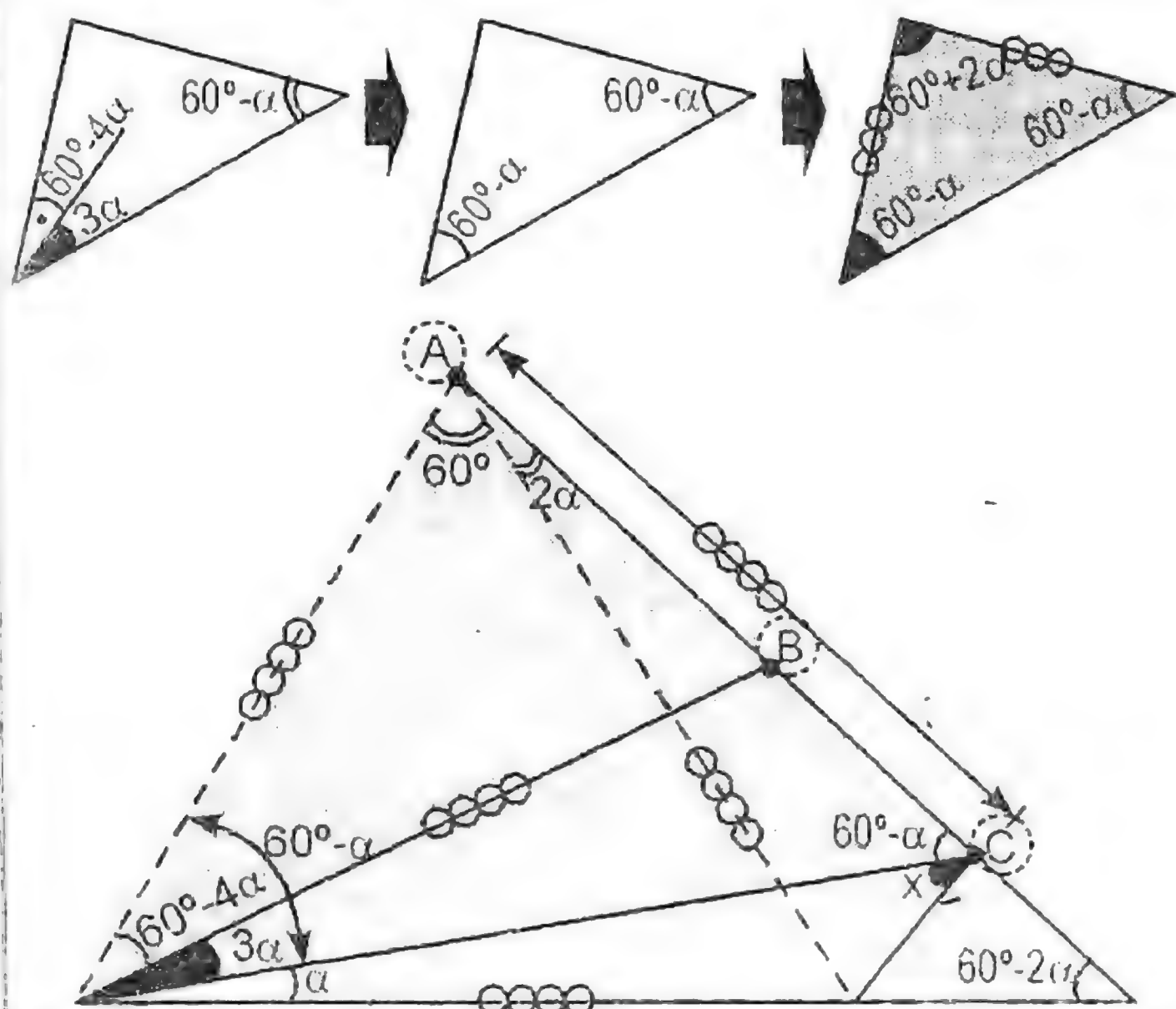
Aquí construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

También:



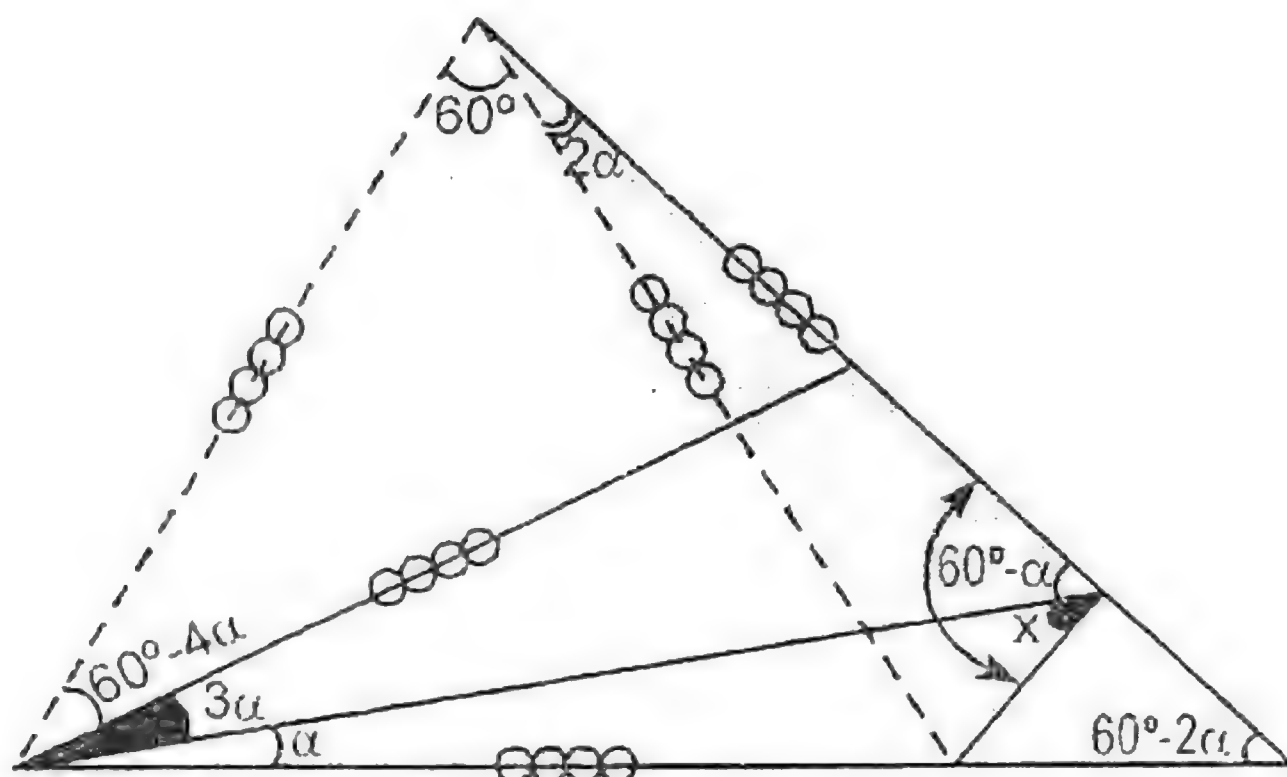
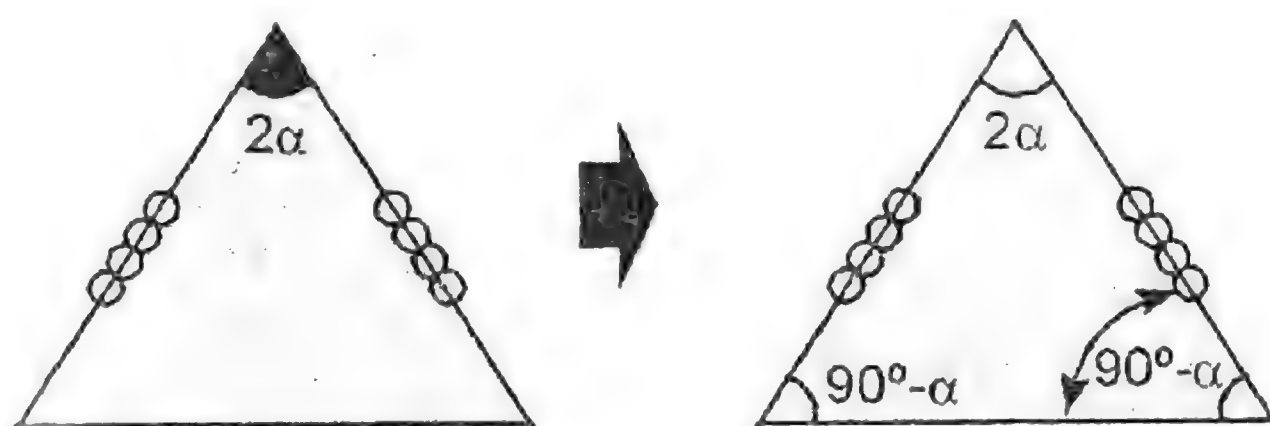
Paso N° 2:

Se observa en el gráfico que los puntos A, B y C son colineales.



Paso N° 3:

Ahora se observa:



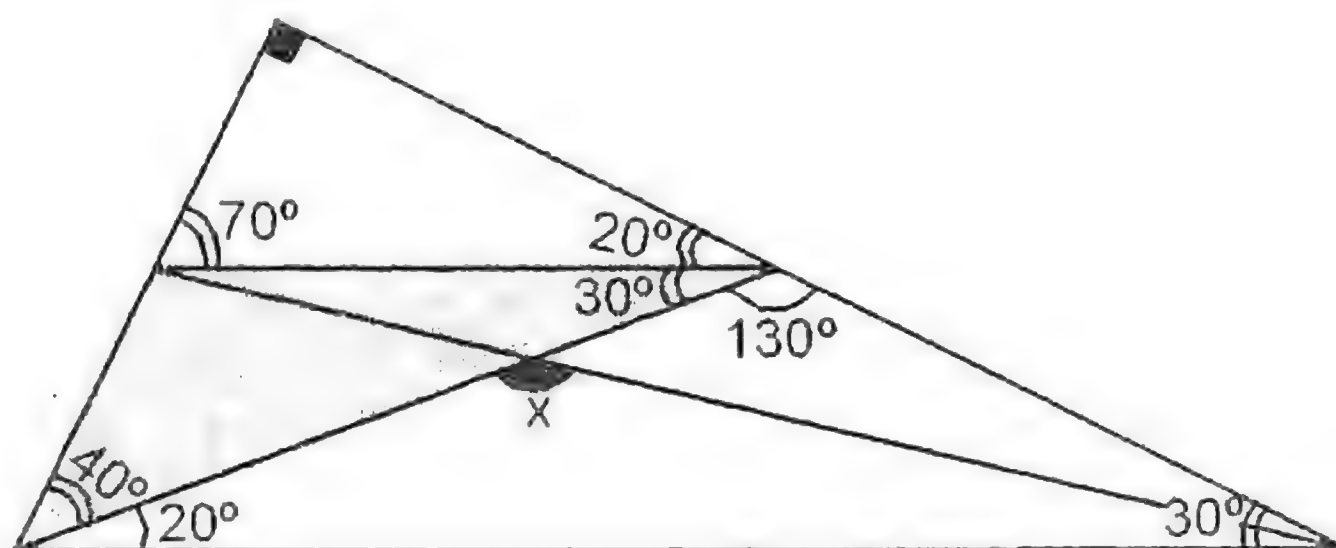
Entonces de la figura sombreada, se cumple:

$$60^\circ - \alpha + x = 90^\circ - \alpha$$

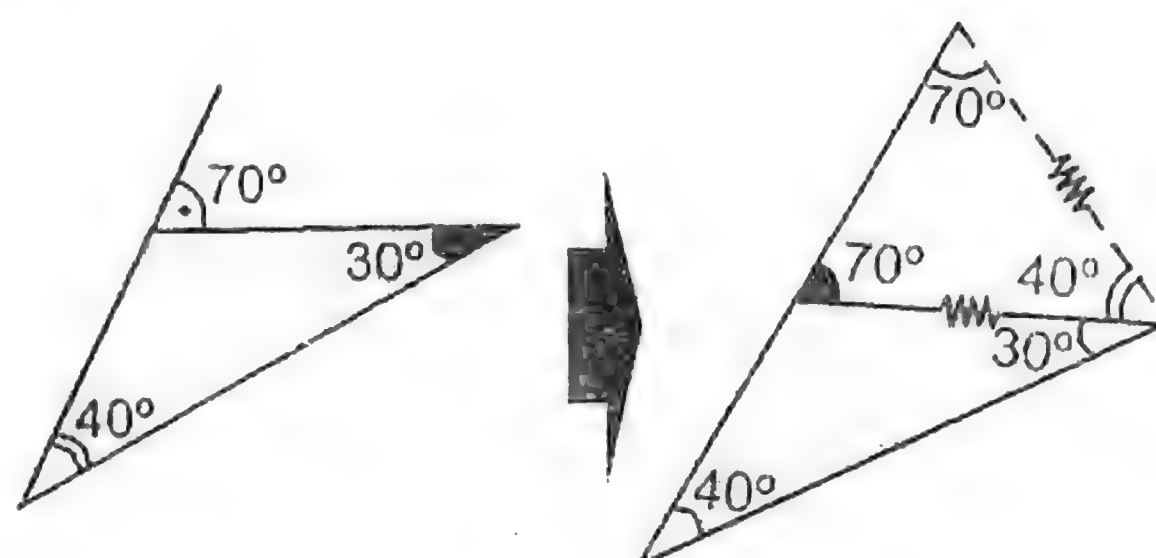
$$x = 30^\circ$$

Solución No 29

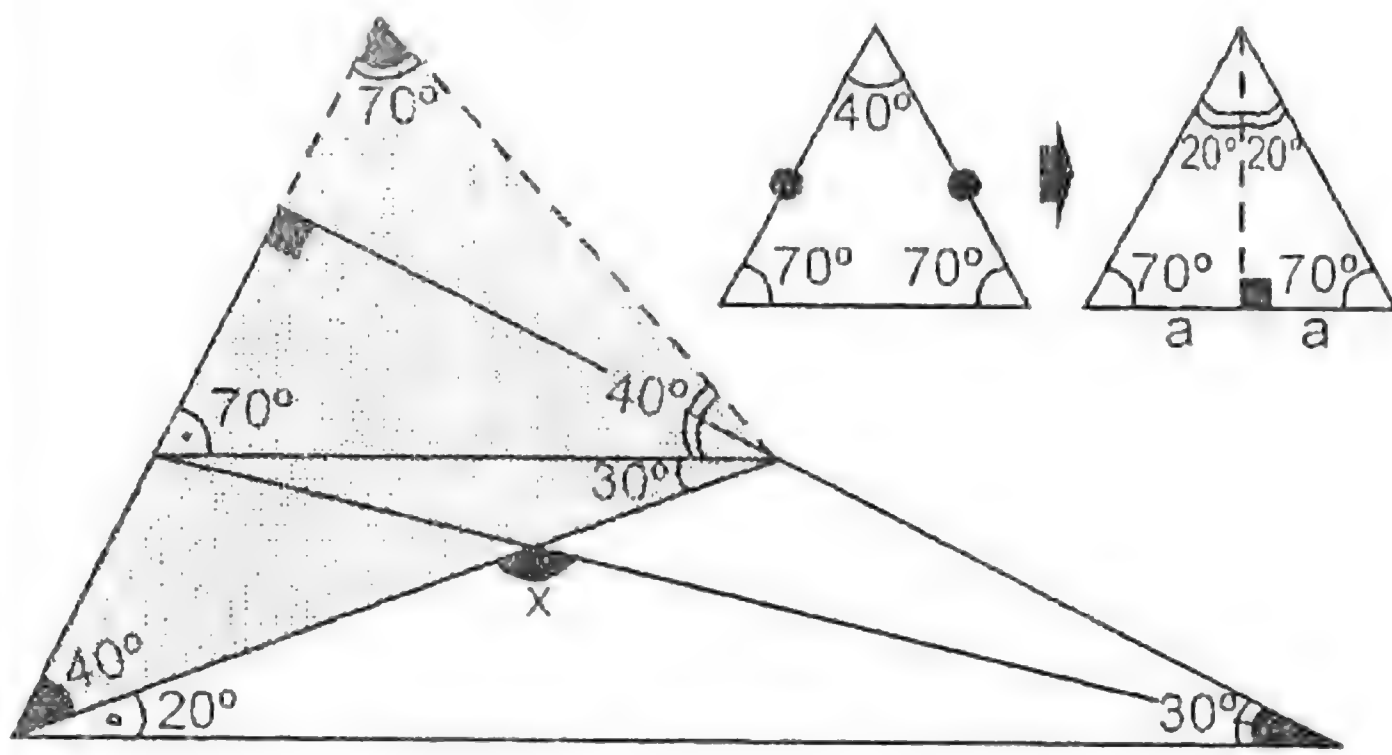
En la figura completamos los ángulos internos.



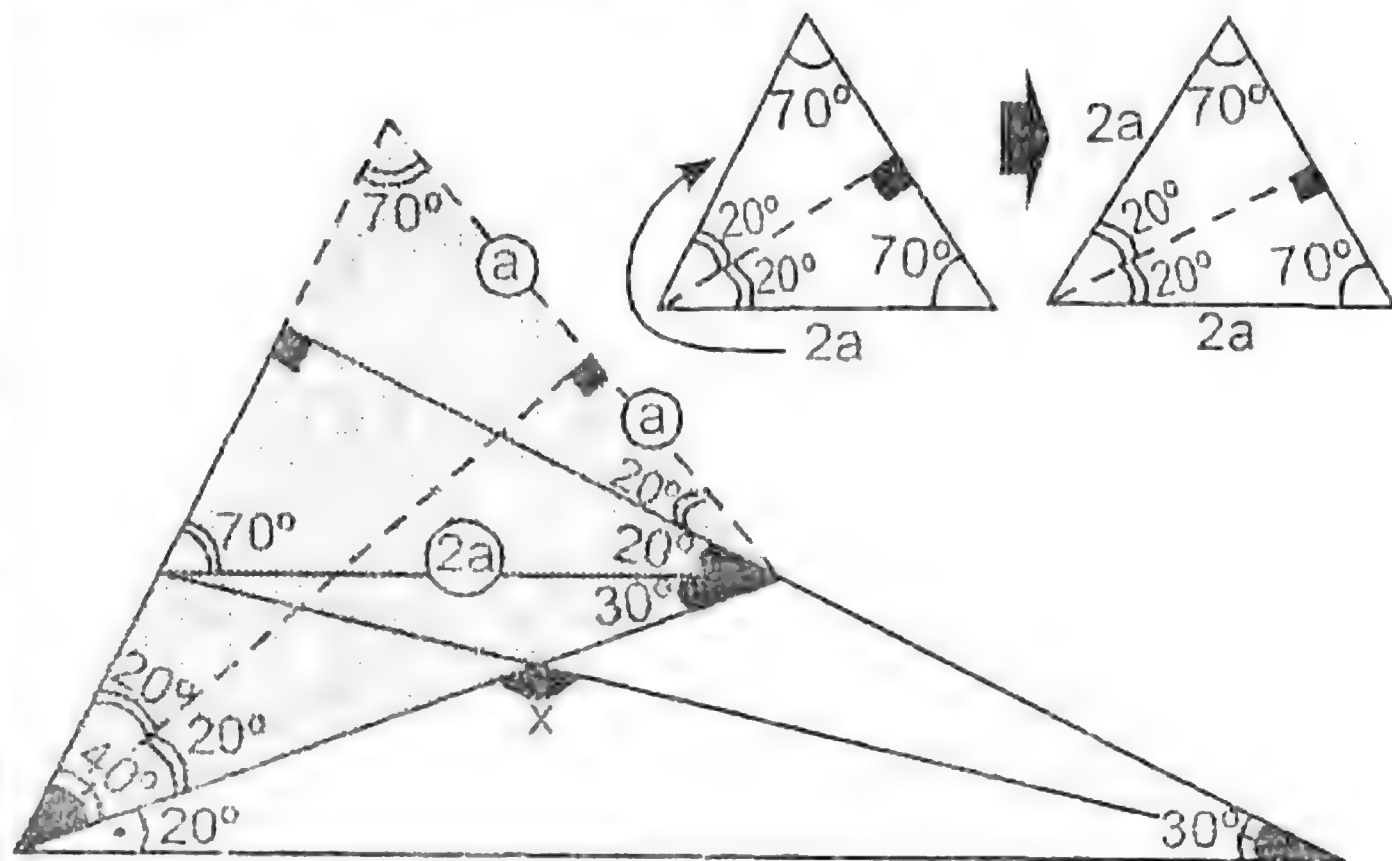
Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo en la figura:



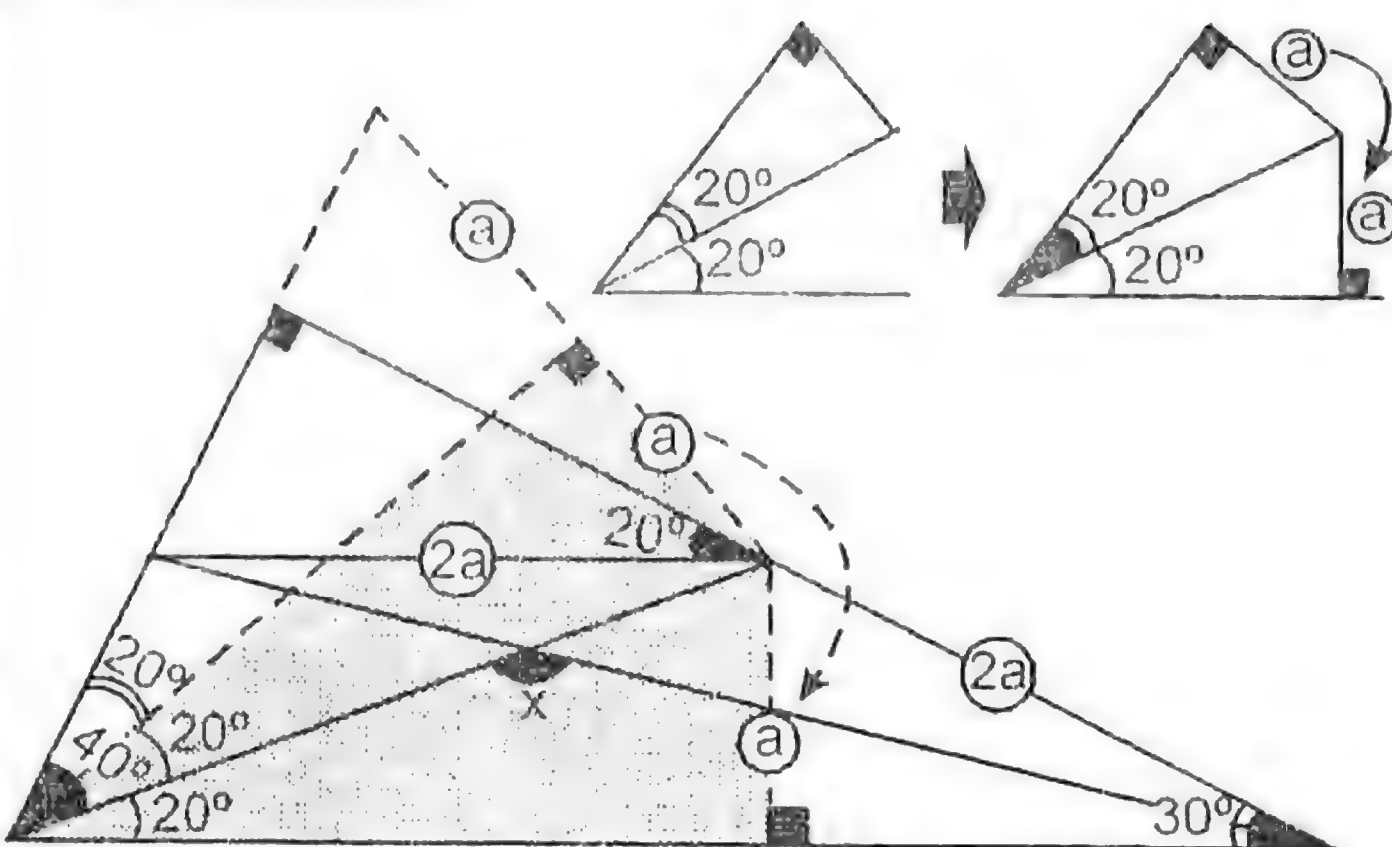
Se obtiene triángulos isósceles en la figura mostrada.



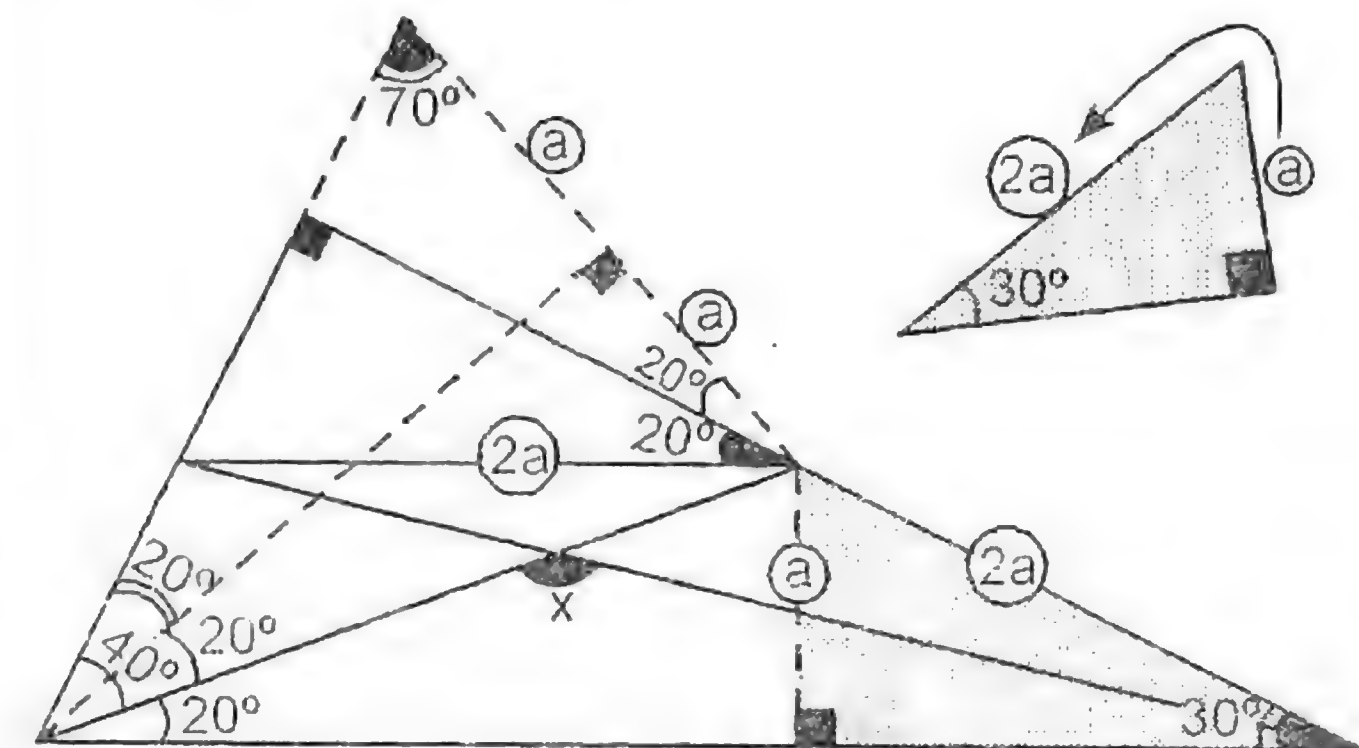
Paso N° 2: Luego se observa:



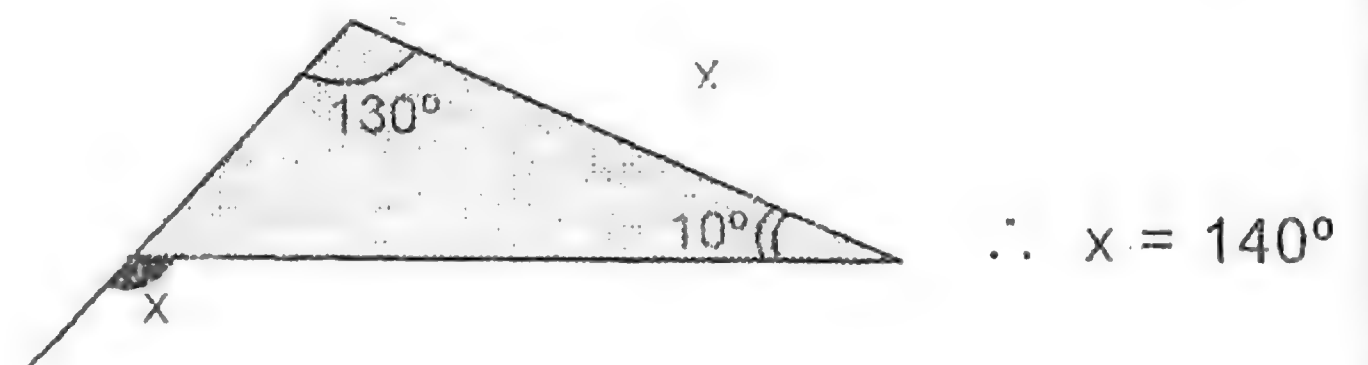
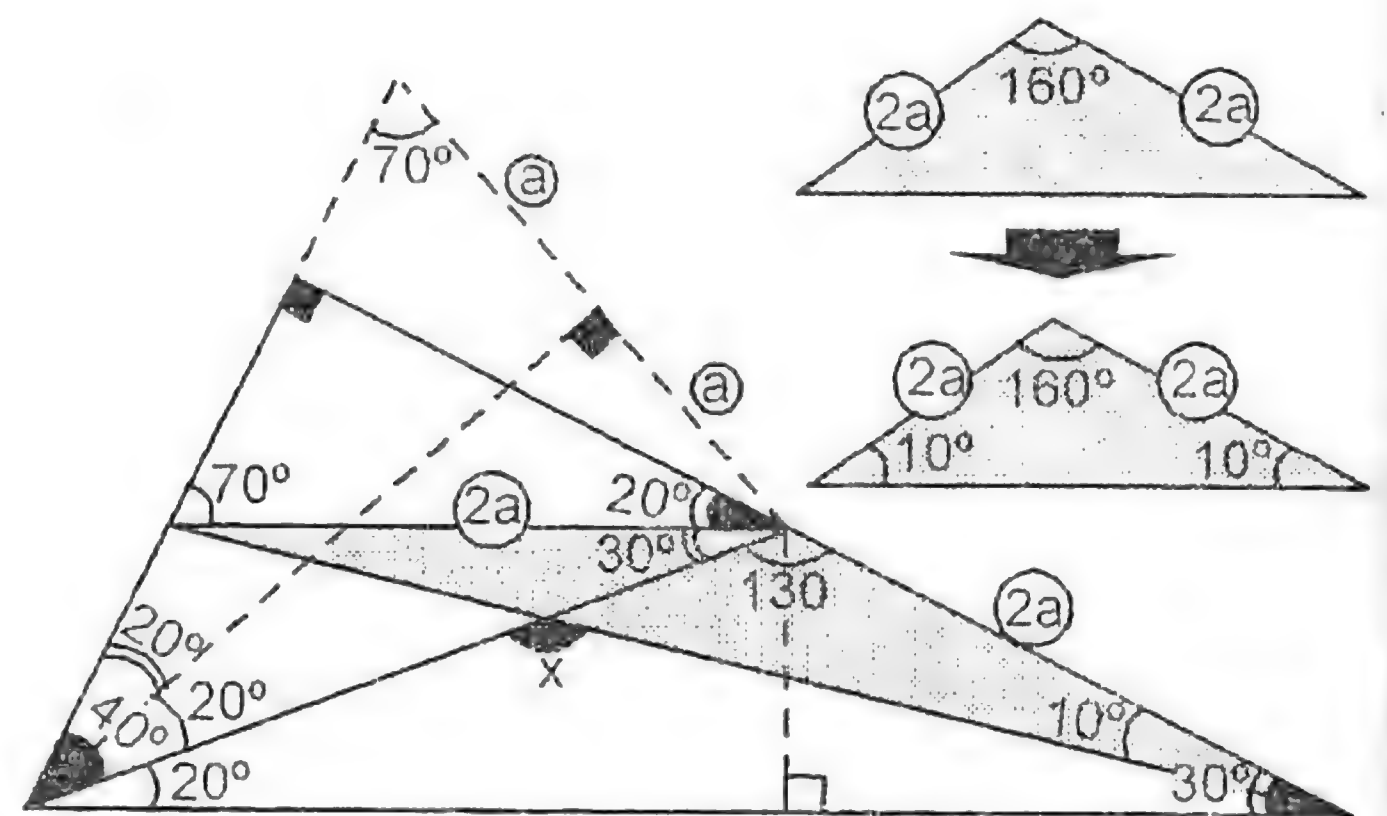
Paso N° 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.



Paso N° 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)

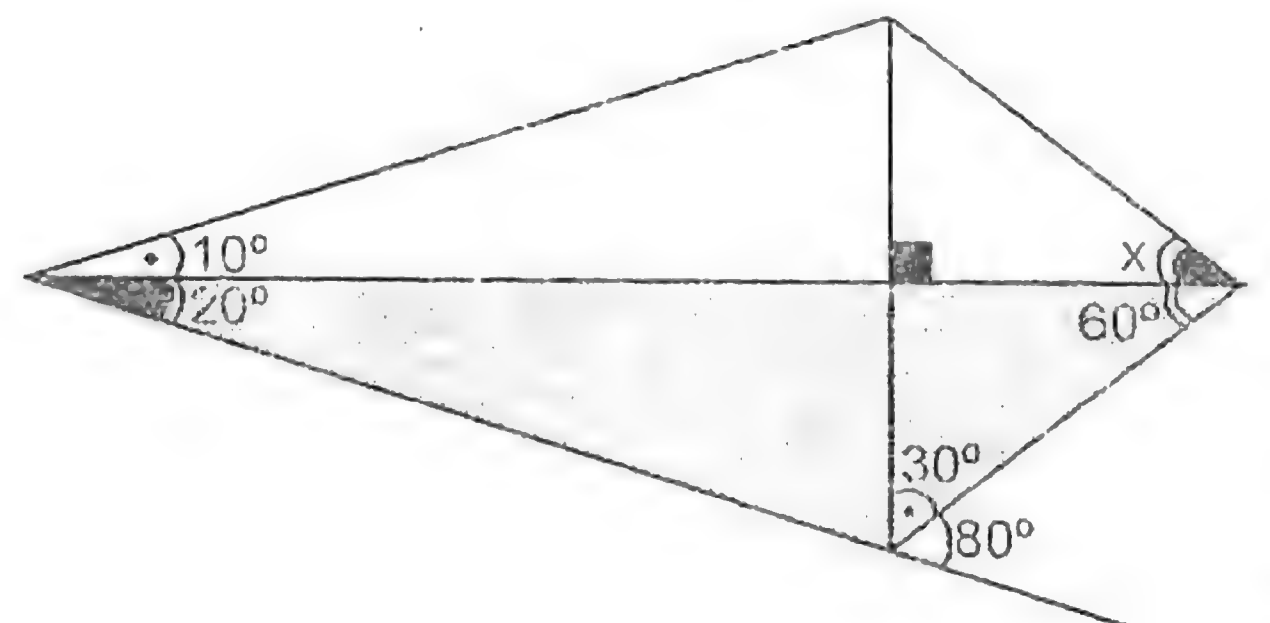


Paso N° 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles:

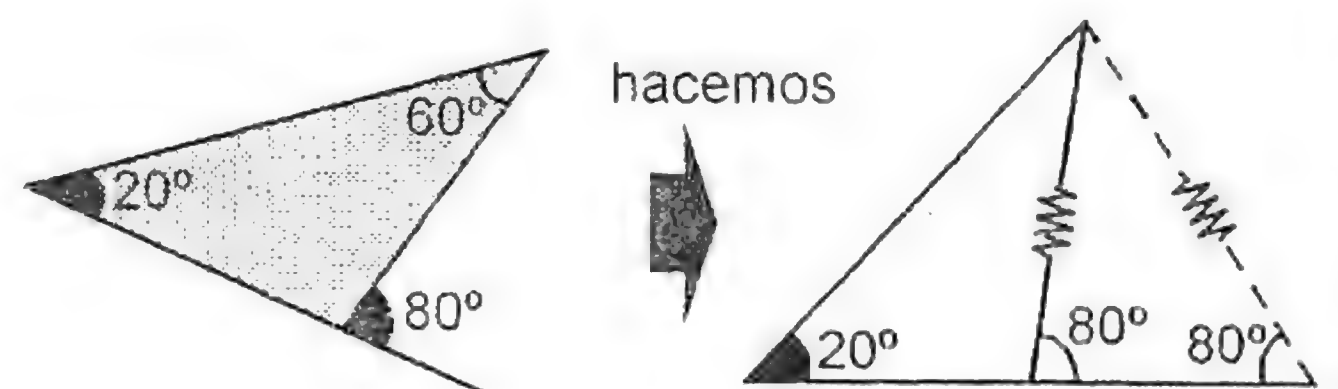


Solución N° 30

Paso N° 1:

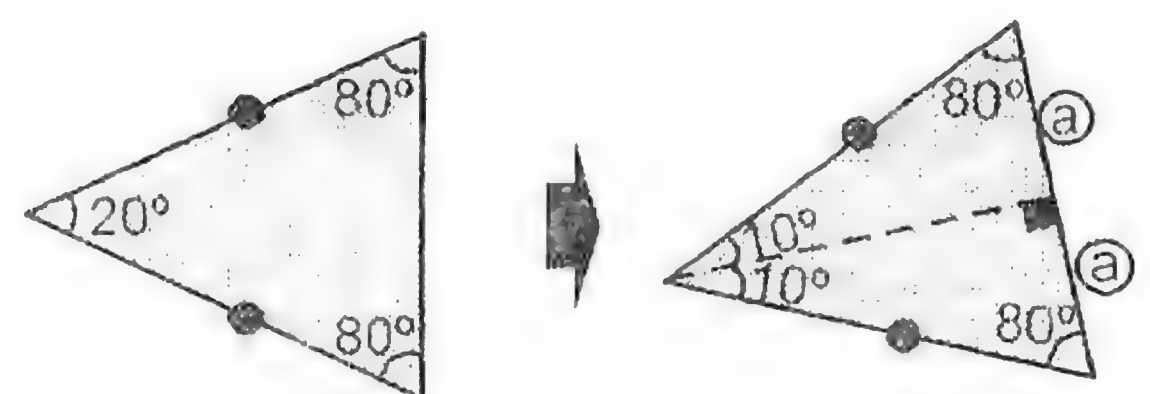


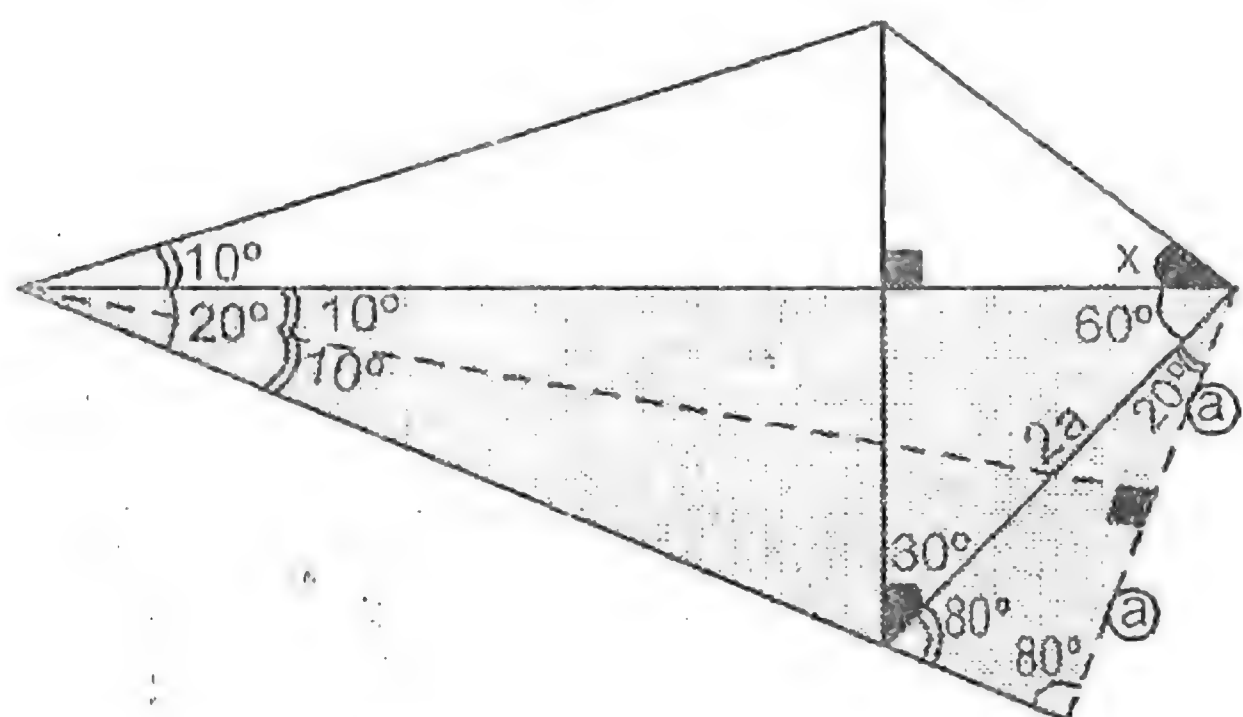
Realizamos el siguiente trazo:



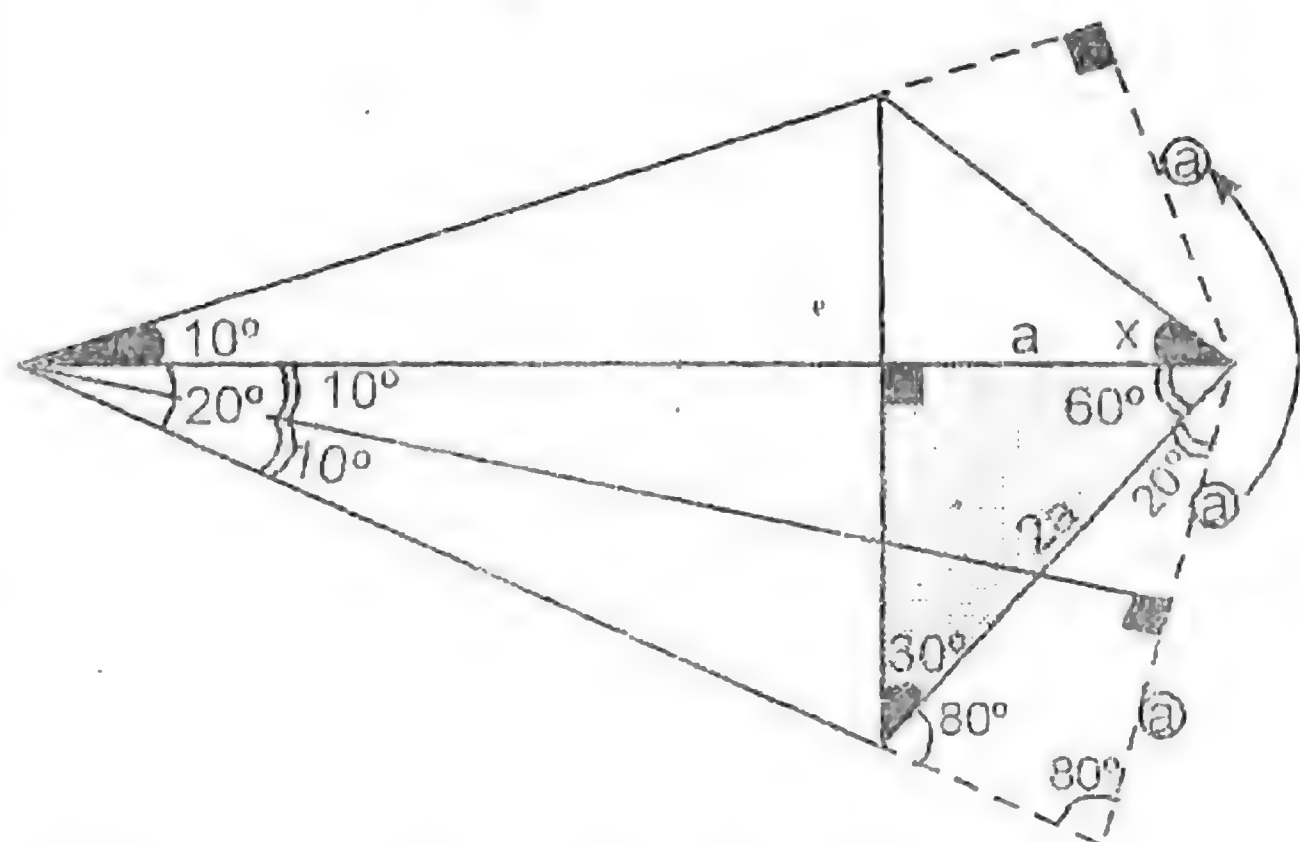
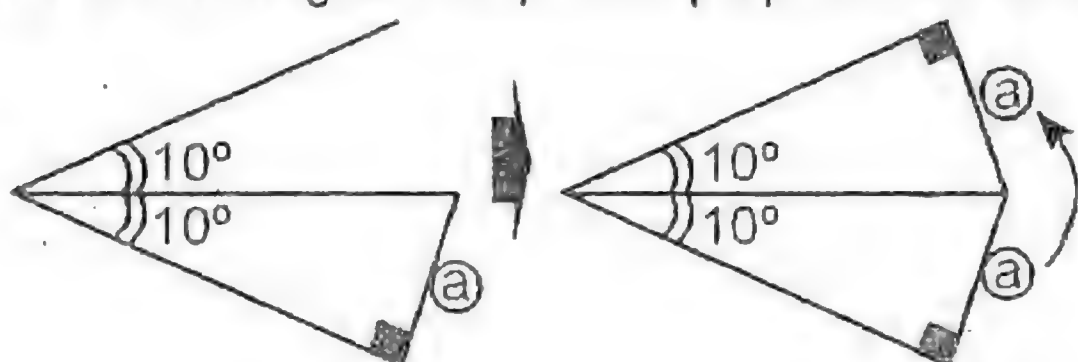
Paso N° 2:

Se obtiene un triángulo isósceles, donde se cumple:

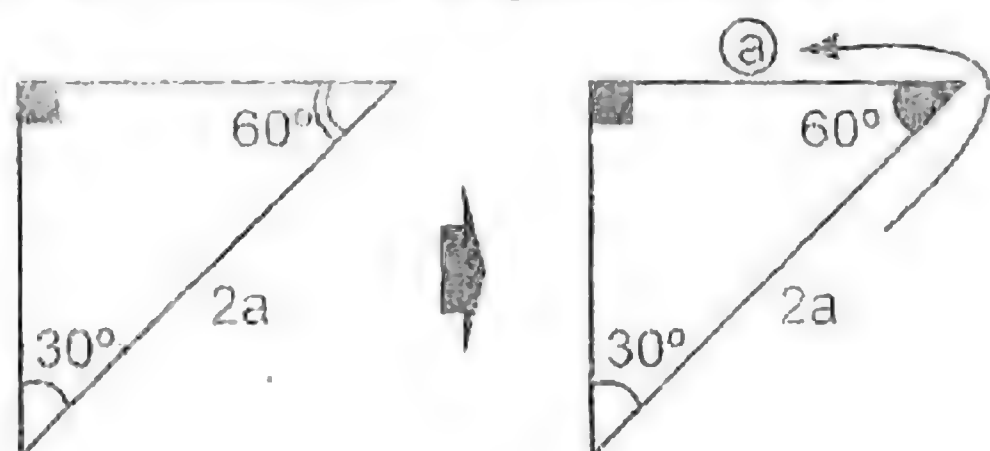




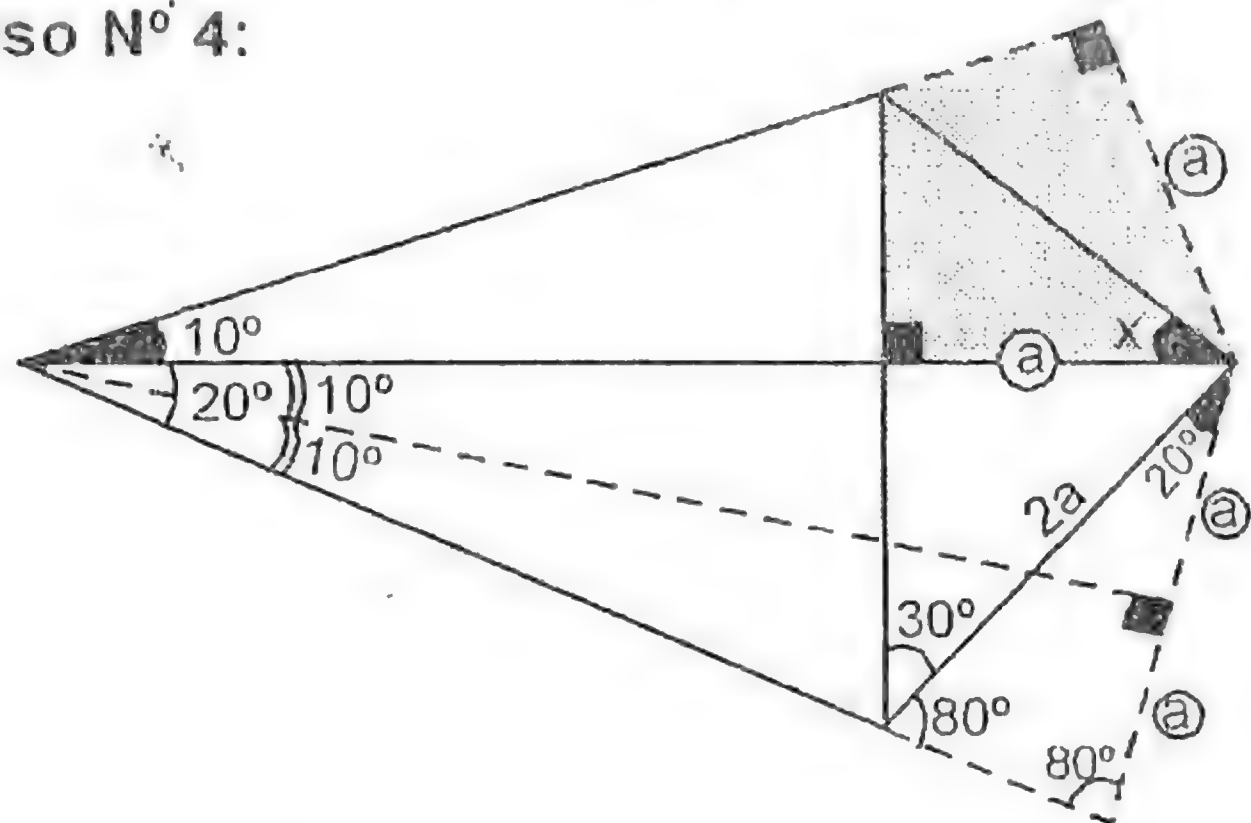
Paso N° 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.



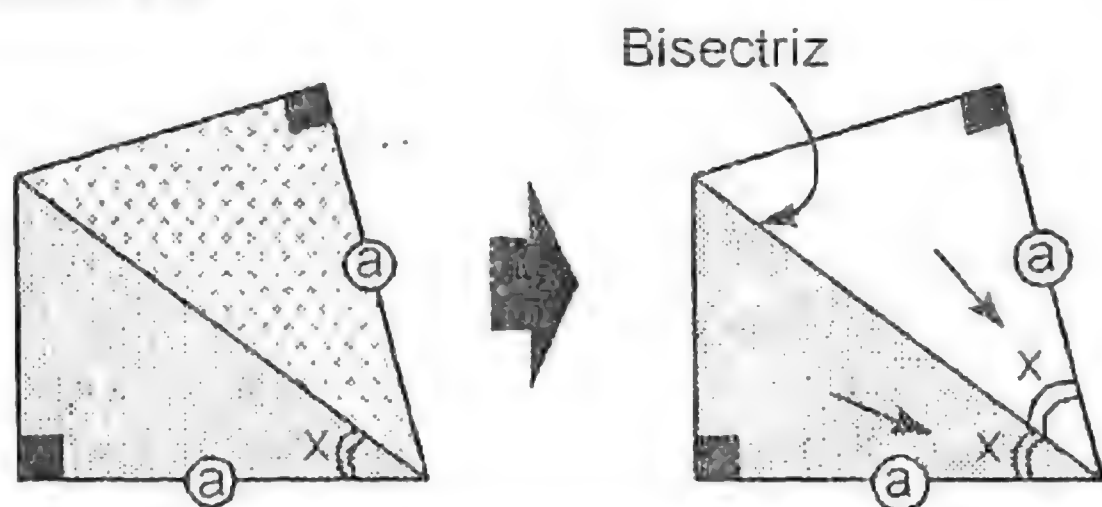
También se observa ángulo notable:



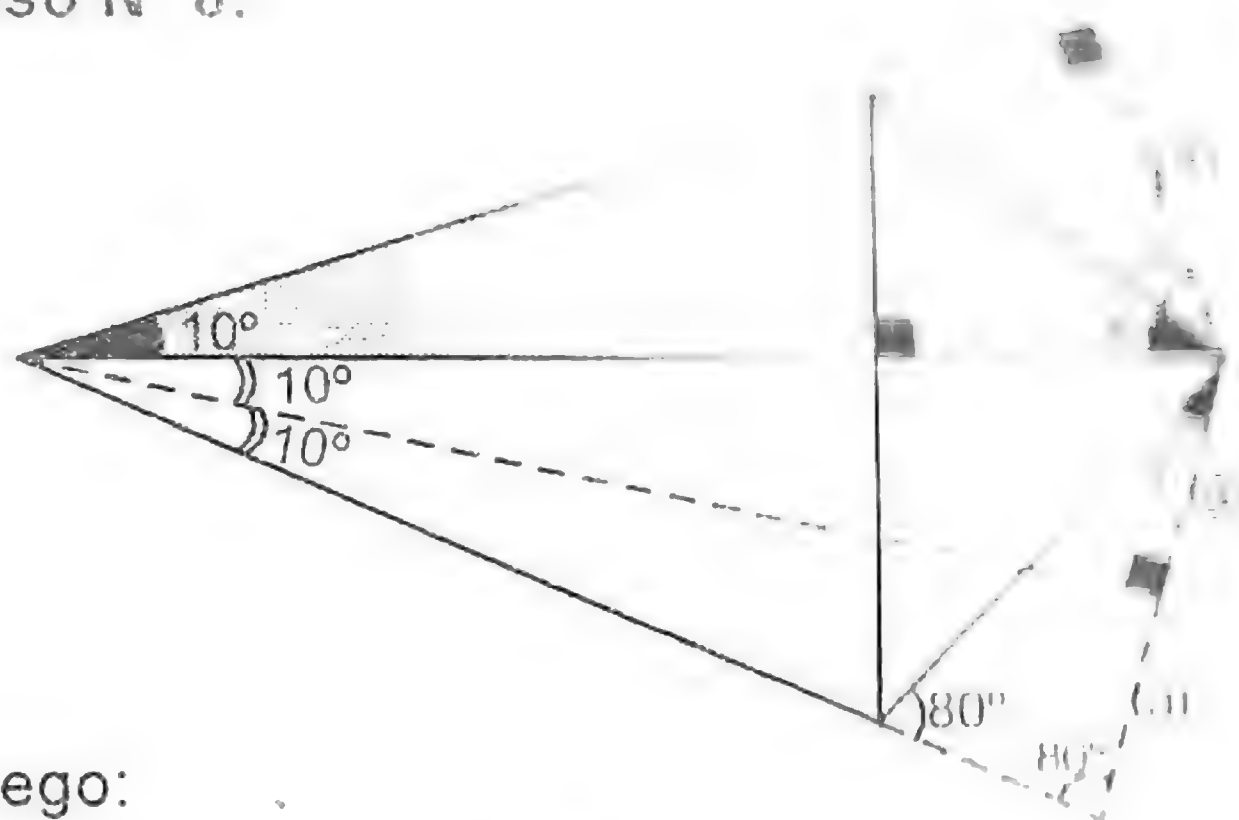
Paso N° 4:



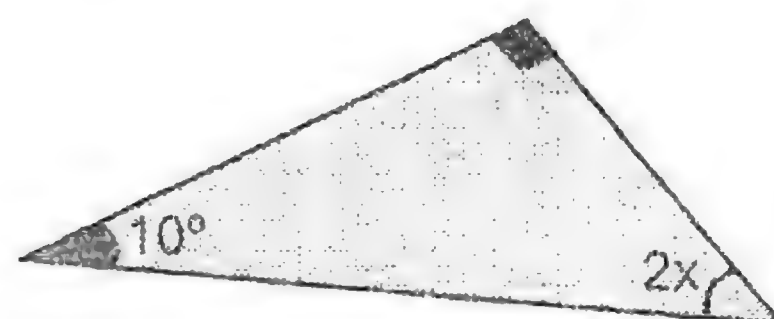
Se observa:



Paso N° 8:



Luego:

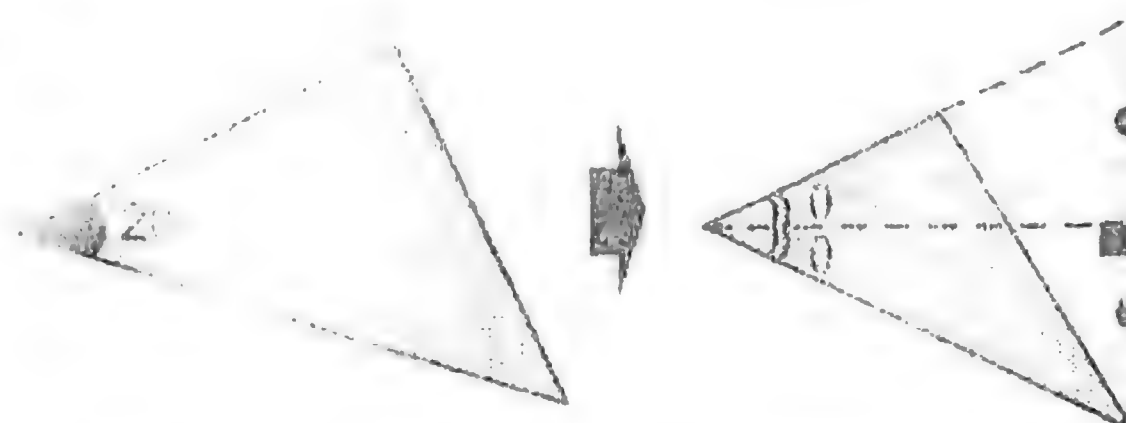
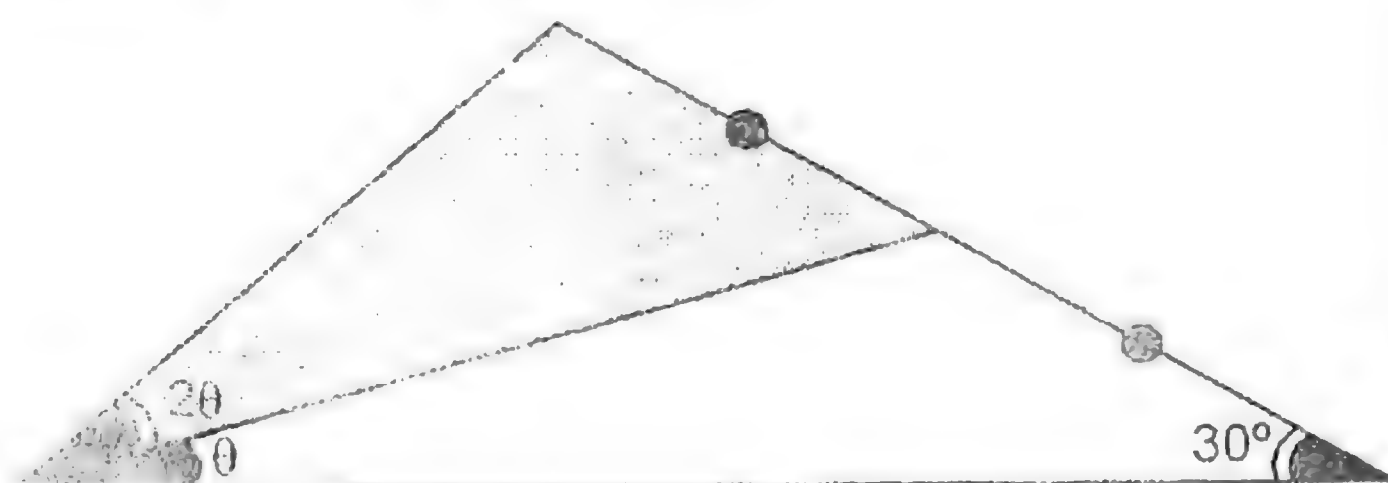


$$\therefore 2x = 80^\circ$$

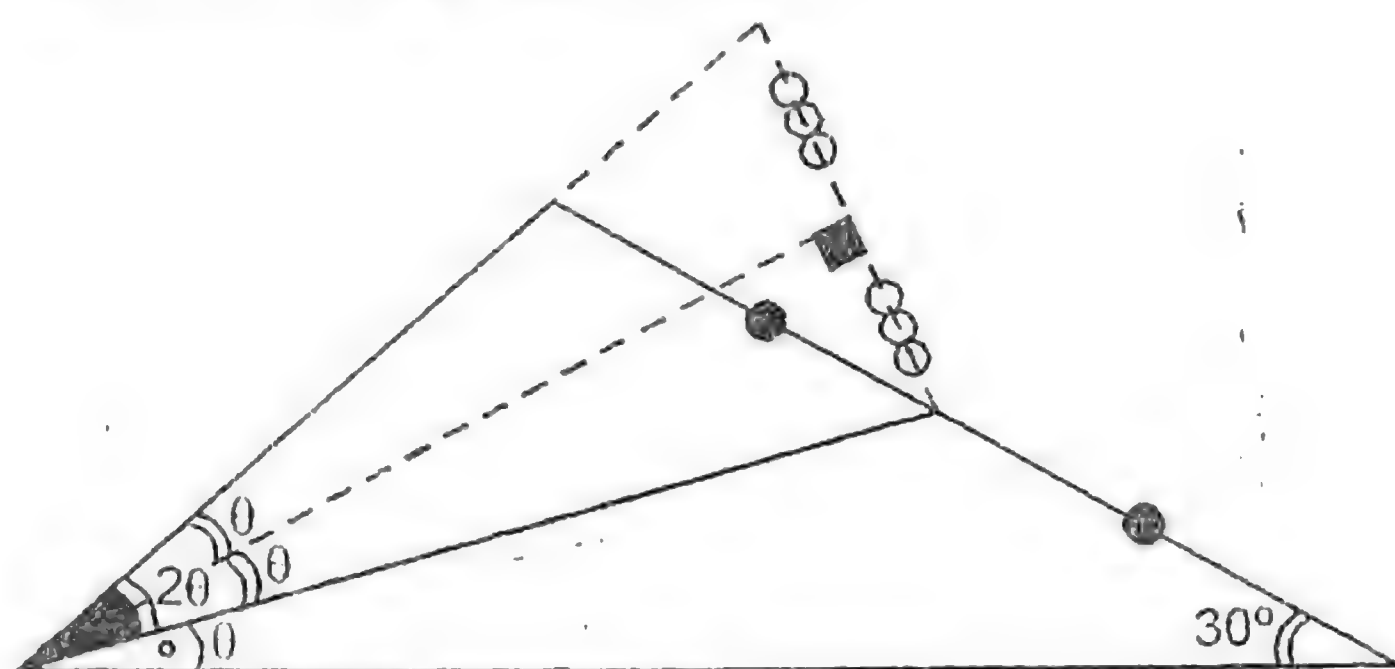
$$x = 40^\circ$$

Solución N° 31

Paso N° 1: Se observa:

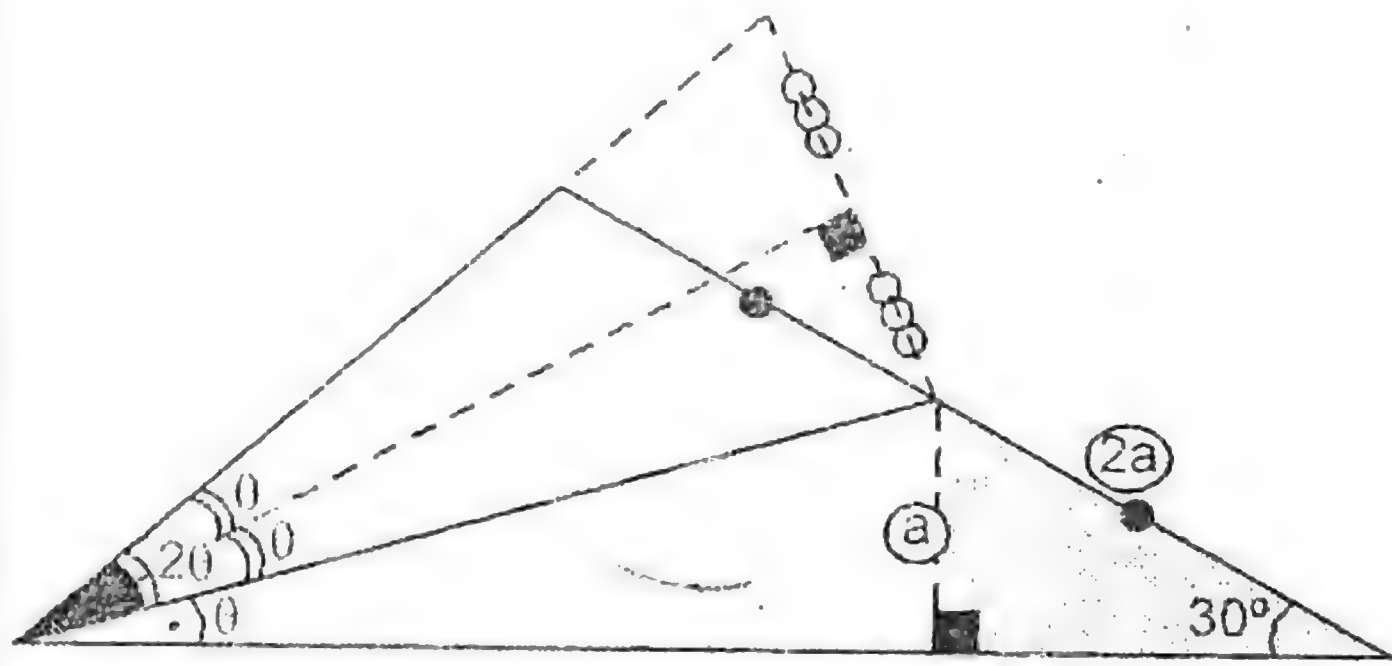


Paso N° 2: En la figura se forma un triángulo isósceles donde se cumple:

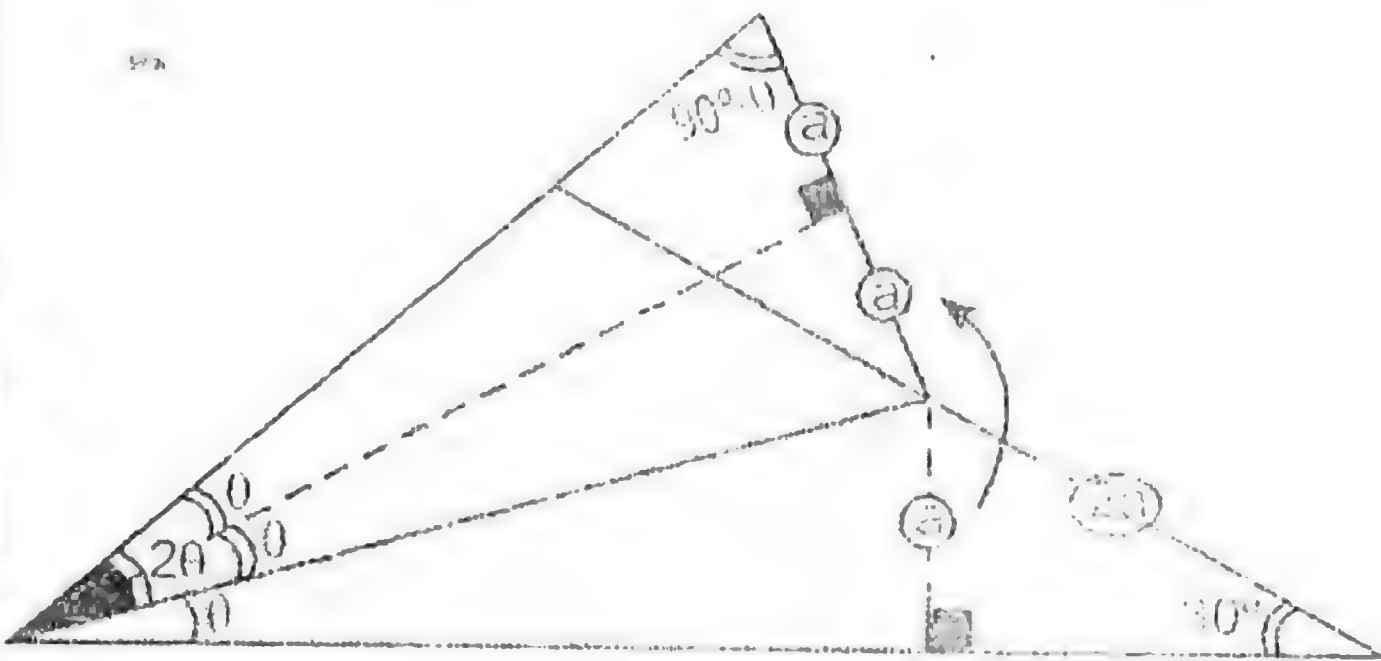
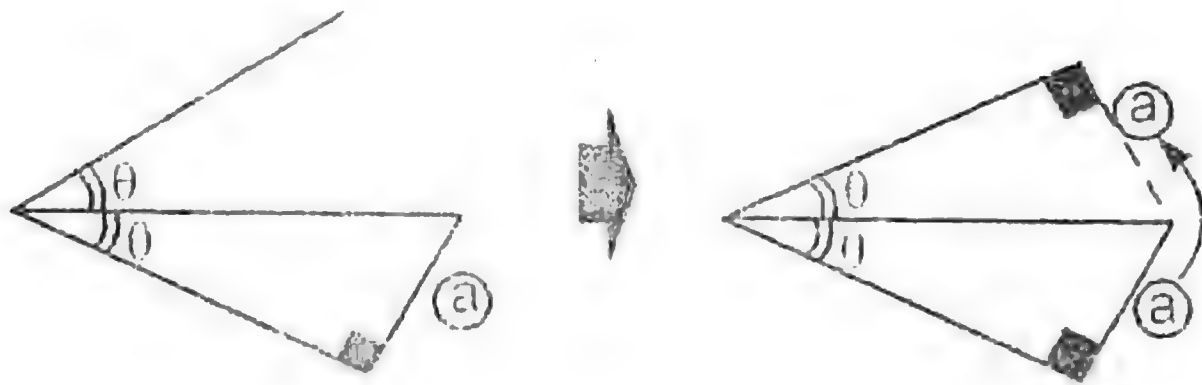


Paso N° 3: Luego se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°) donde se cumple:

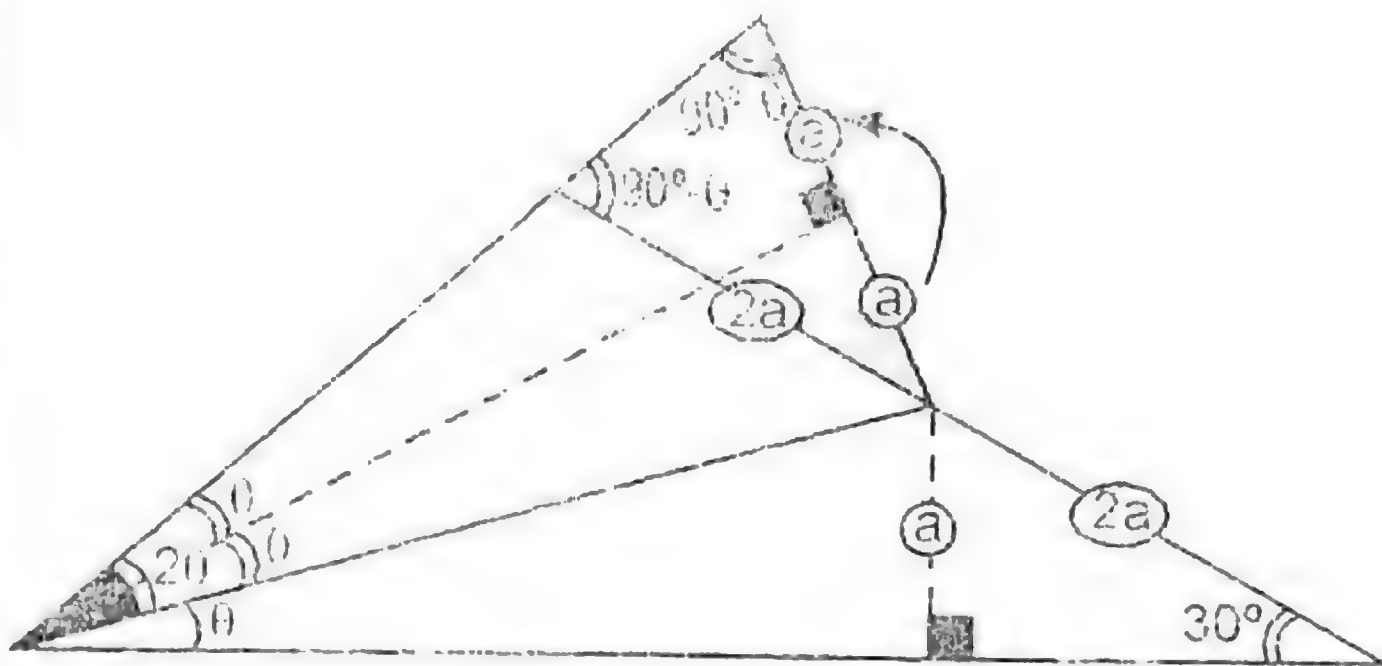
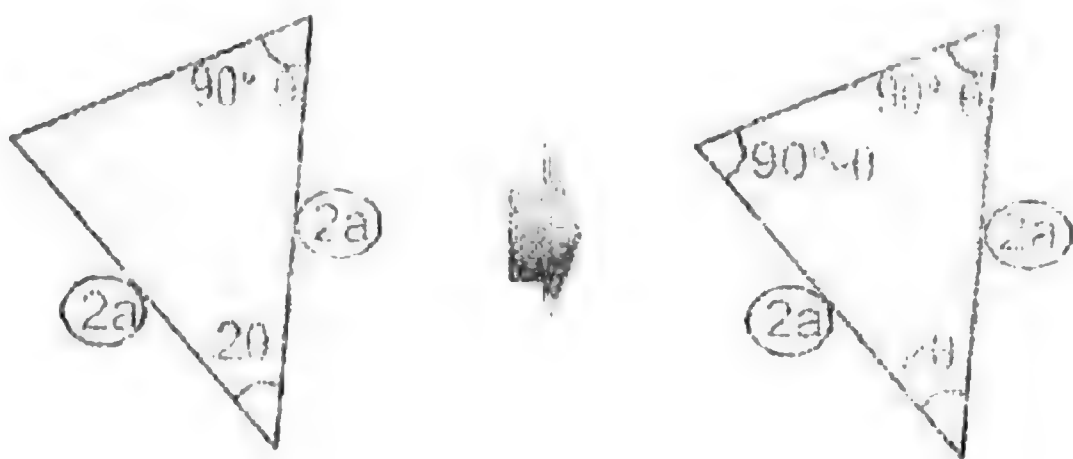




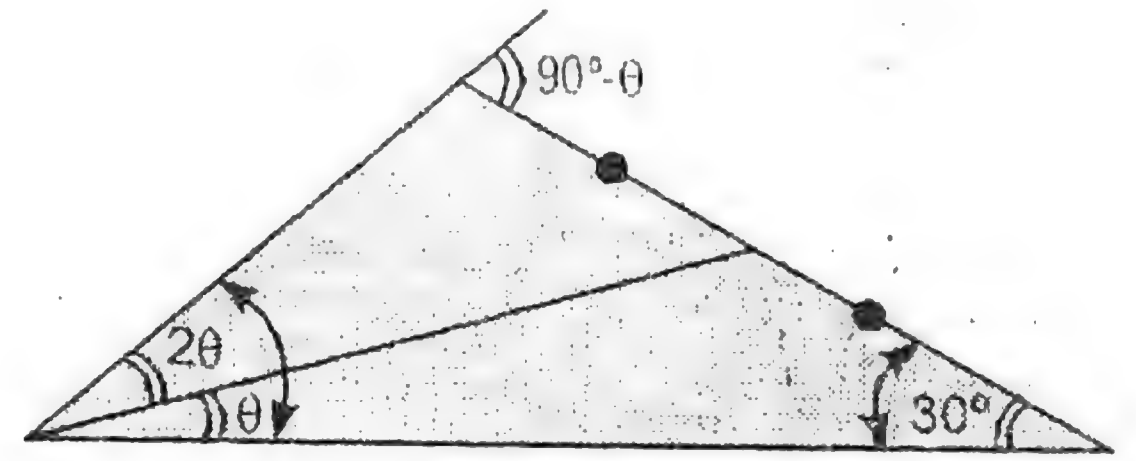
Paso N° 4: En la figura aplicamos la propiedad de la bisectriz.



Paso N° 5:
Se obtiene un triángulo isósceles.



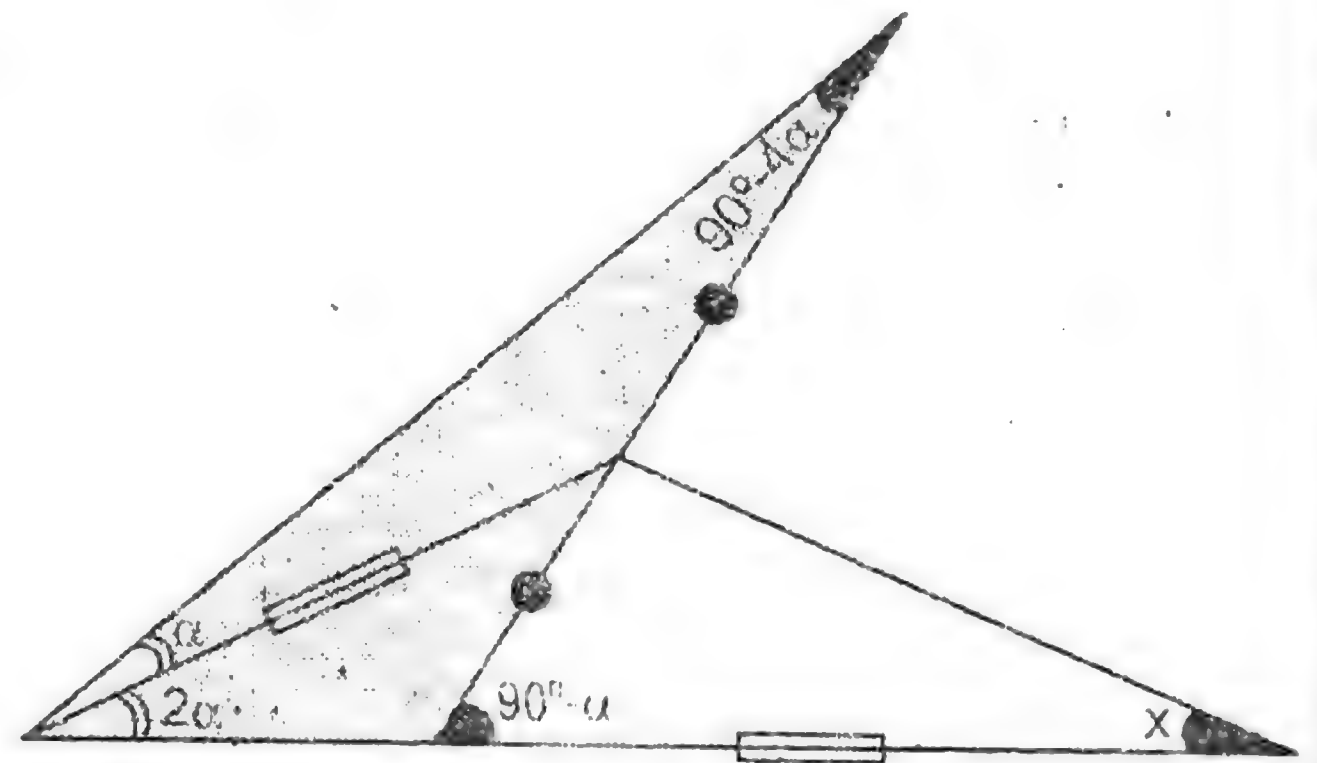
Paso N° 6:
Por ángulo externo:



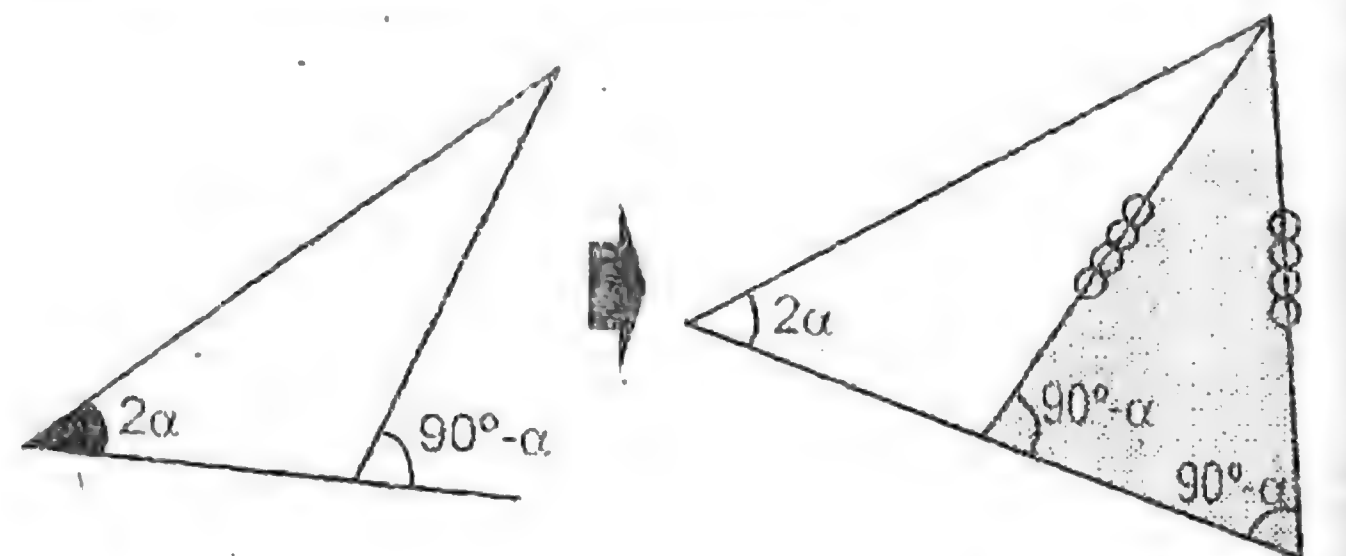
$$\begin{aligned} 90^\circ - \theta &= 30^\circ + 30^\circ \\ 60^\circ &= 4\theta \\ 15^\circ &= \theta \end{aligned}$$

Solución N° 32

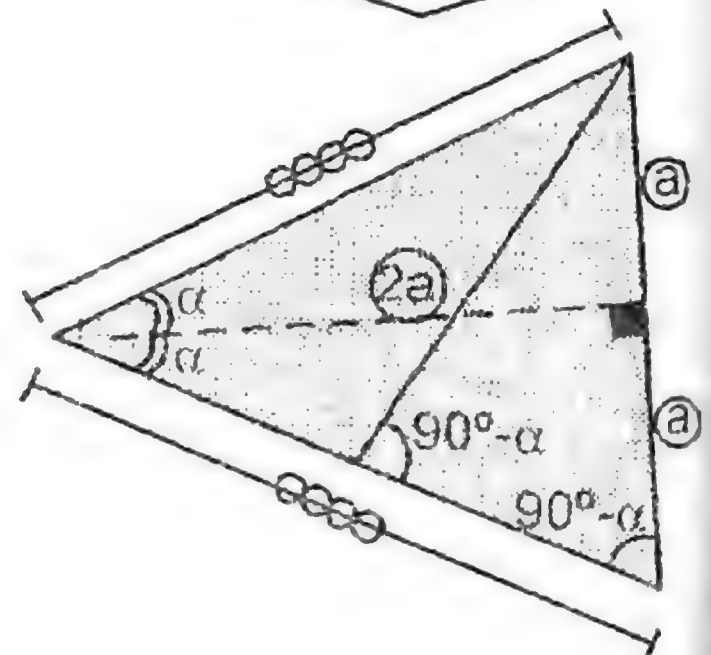
En la figura se observa:



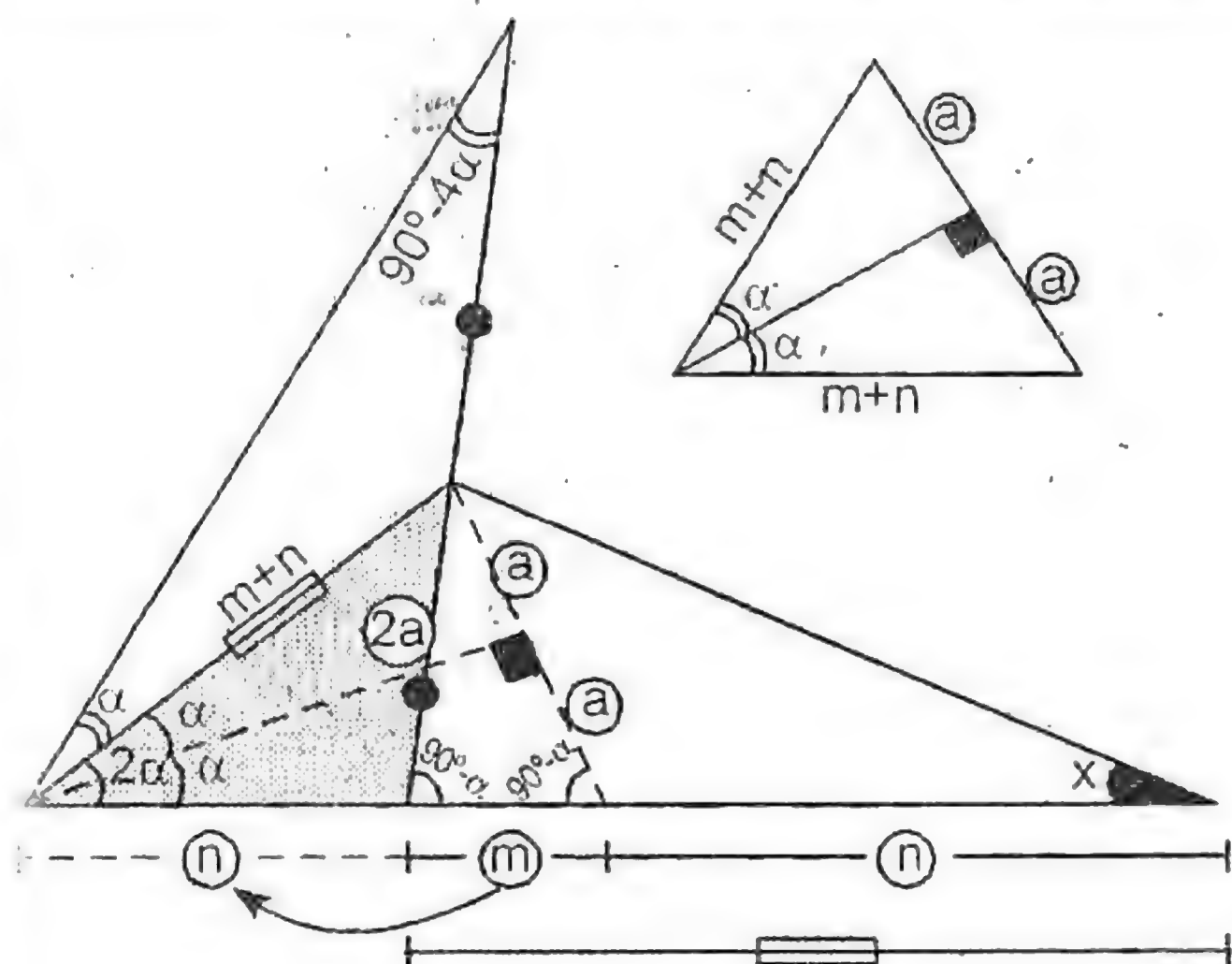
Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo, para obtener triángulos isósceles.



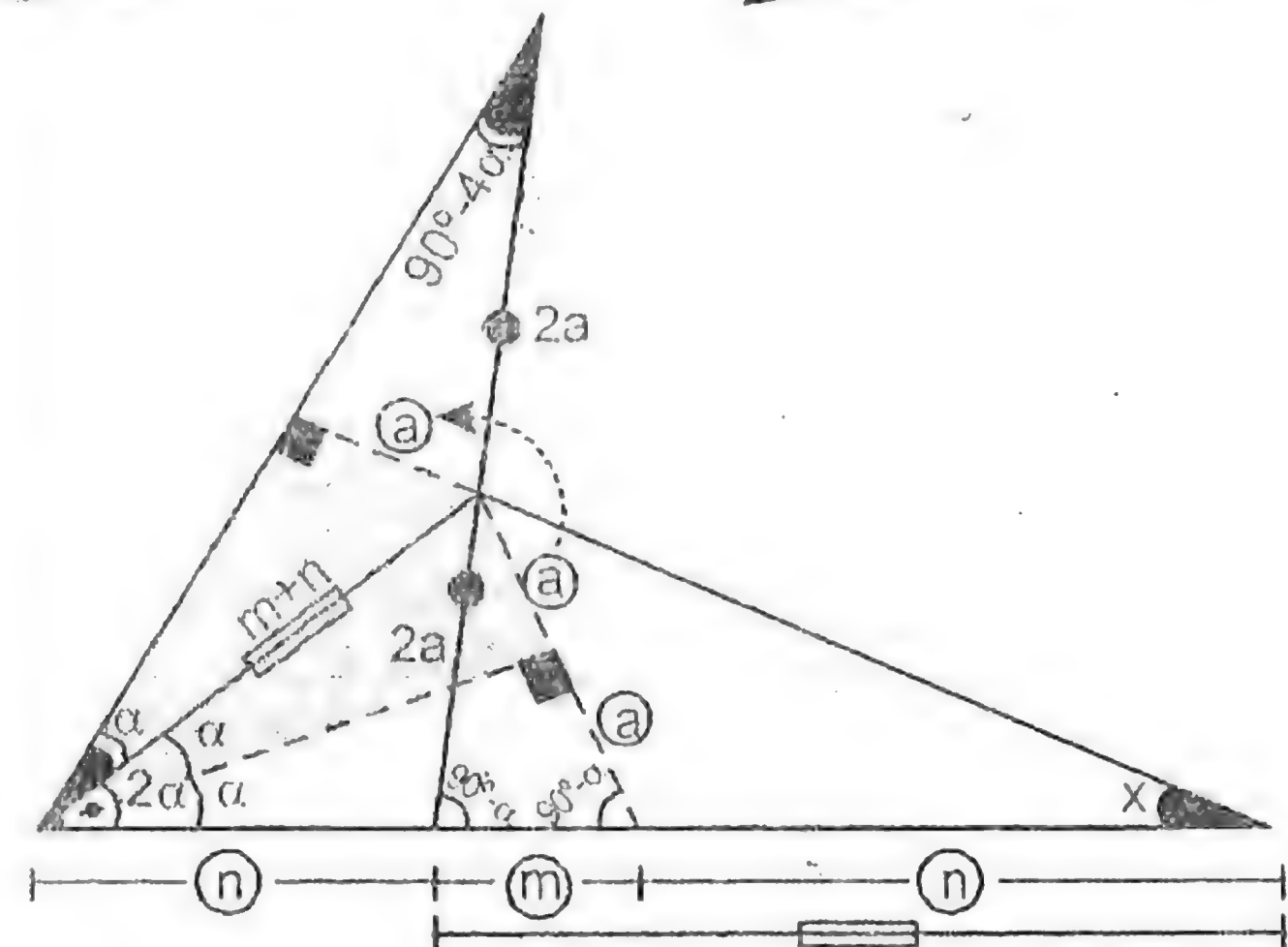
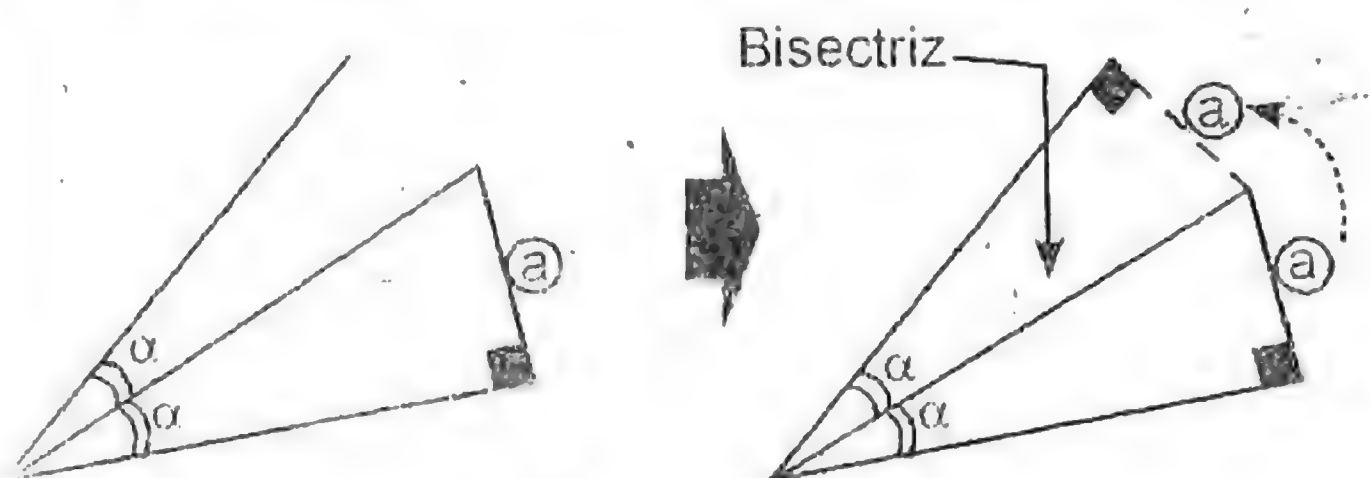
También



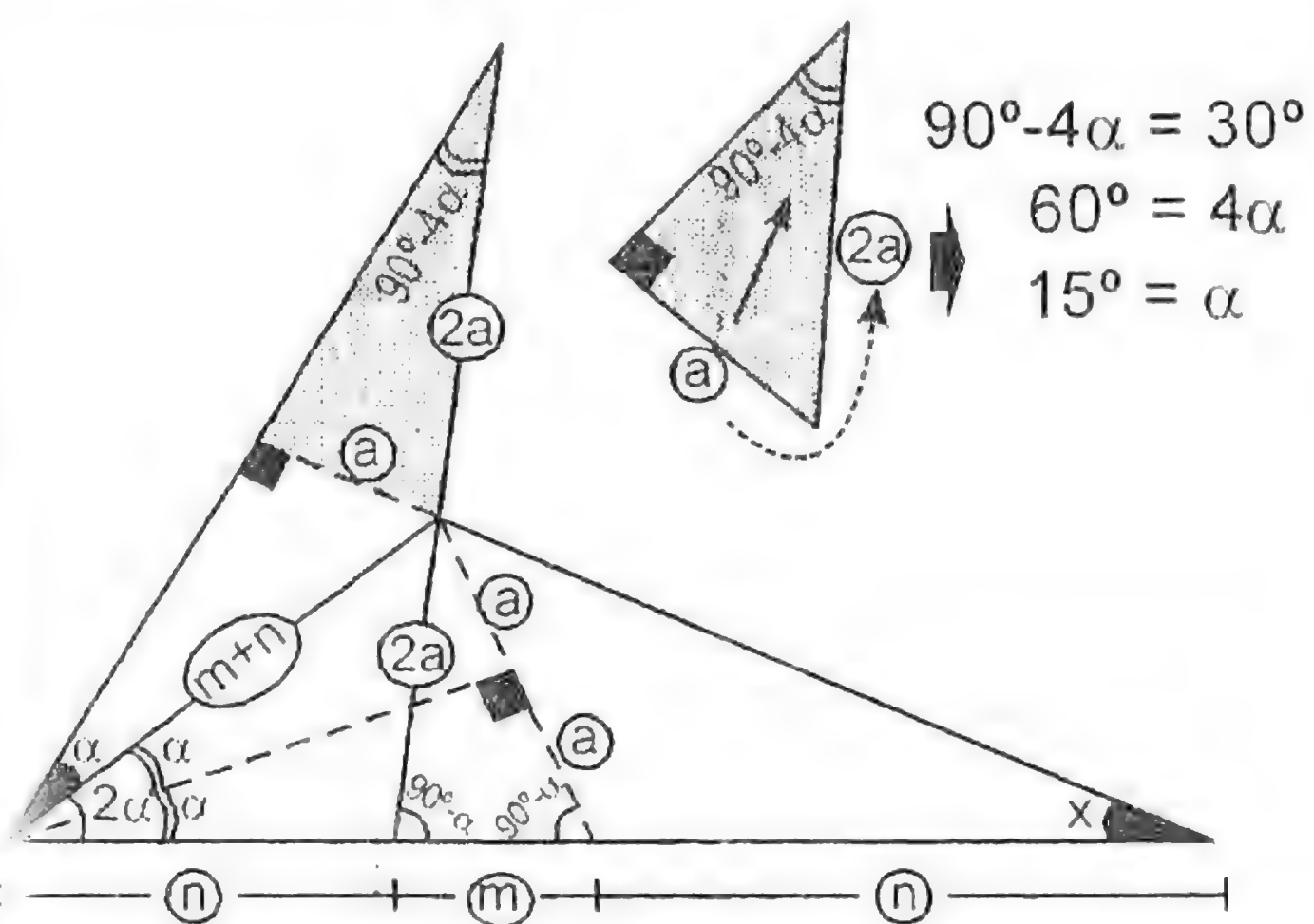
Entonces aplicamos en la figura el trazo mencionado.



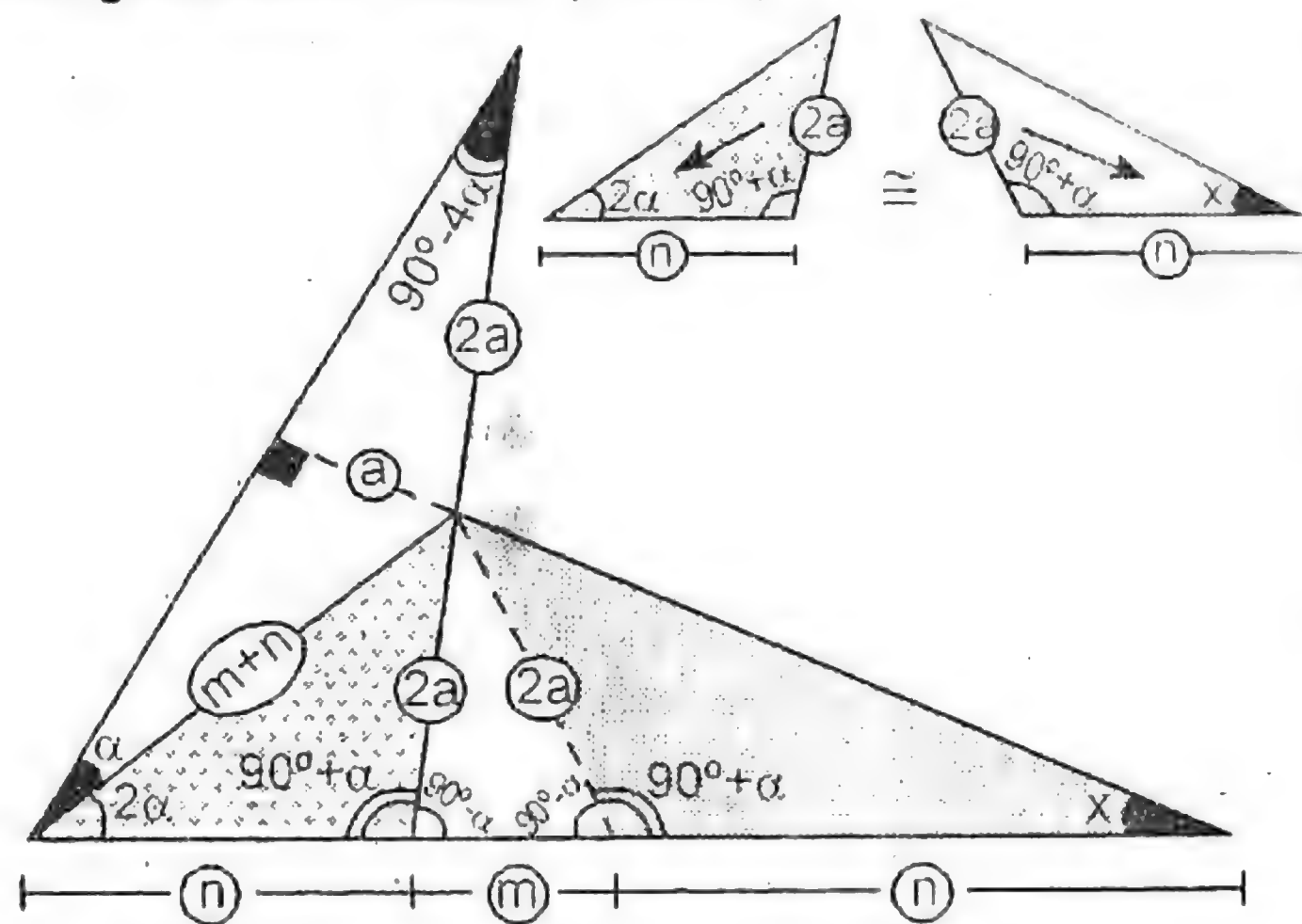
Paso N° 2: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz donde se cumple:



Paso N° 3: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°)



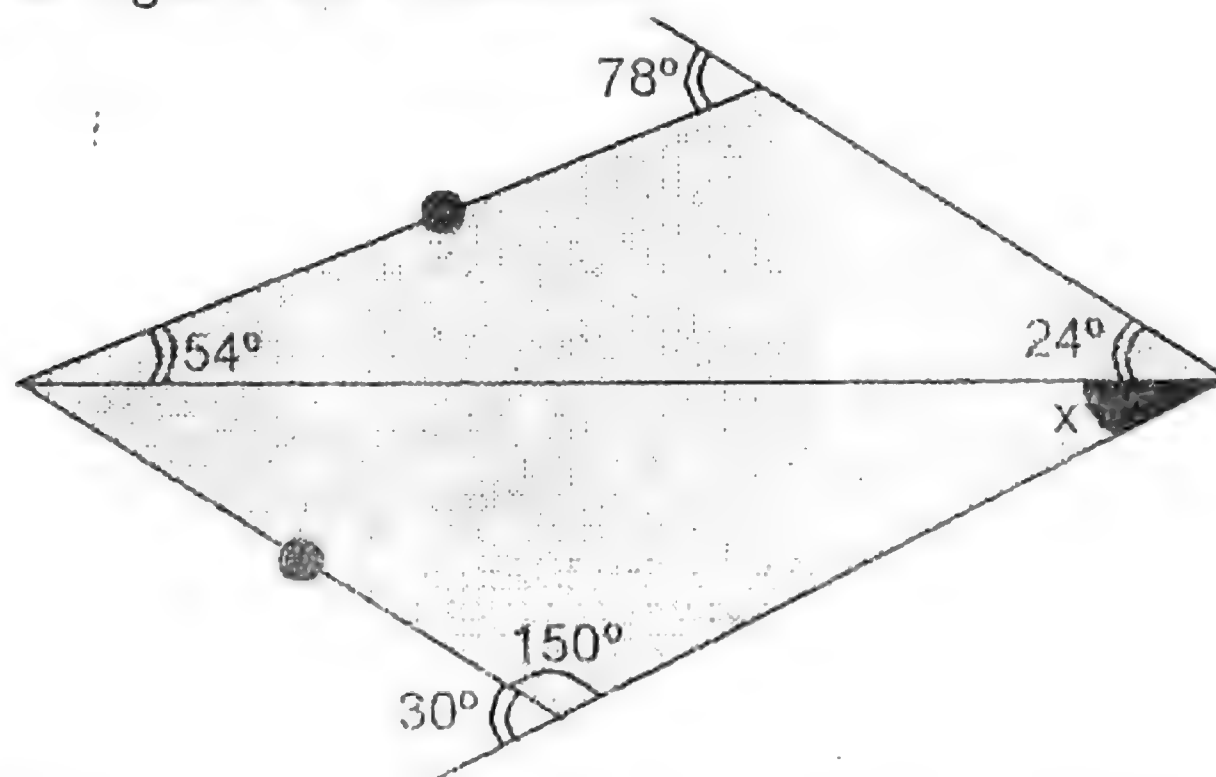
Paso N° 4: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



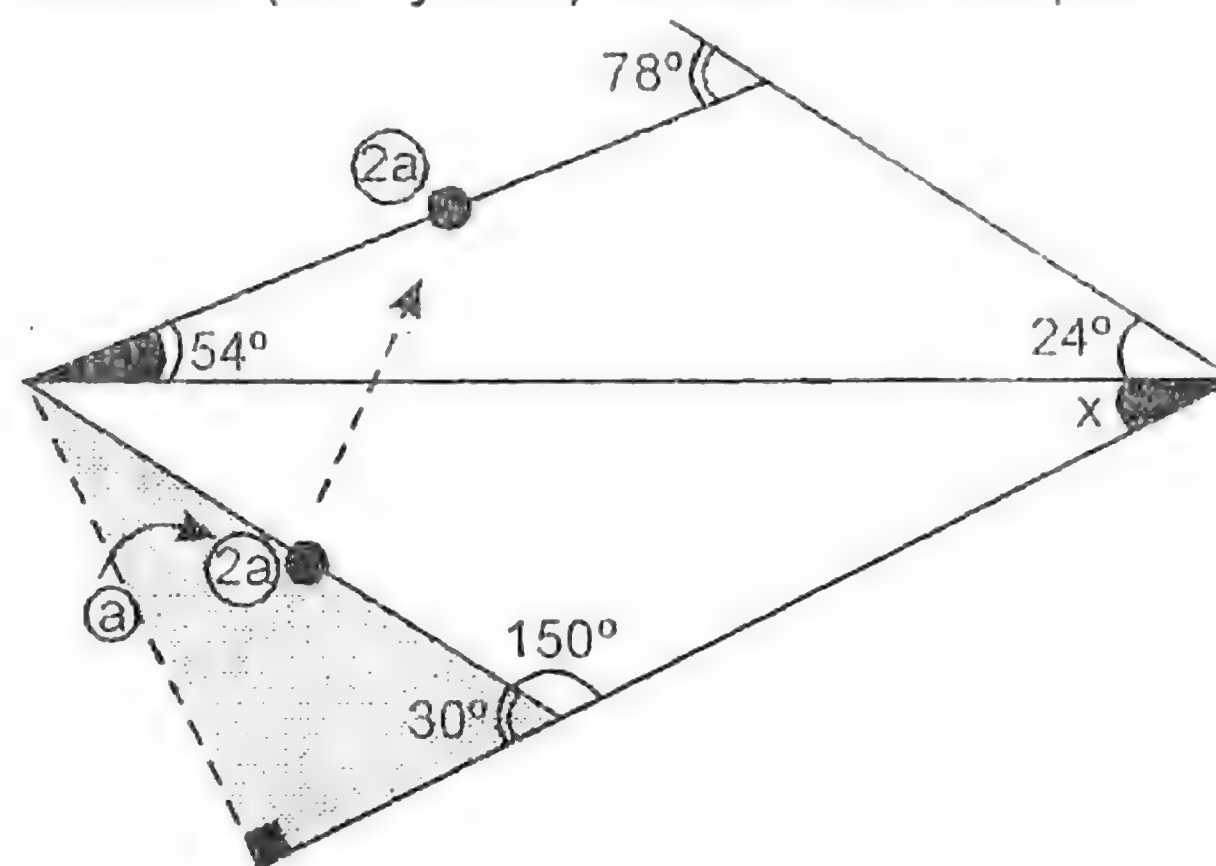
$$\Rightarrow \text{Se cumple } x = 2\alpha \Rightarrow x = 2(15^\circ) \\ x = 30^\circ$$

Solución N° 33

En la figura se observa:

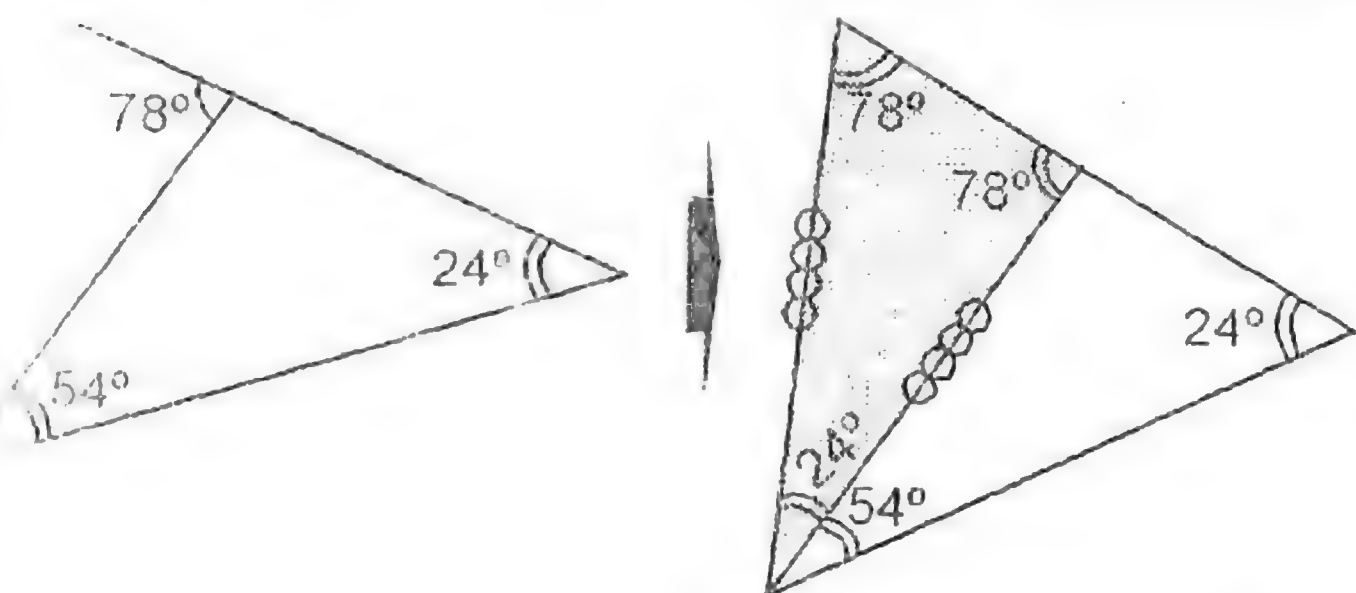


Paso N° 1: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°) donde se cumple:

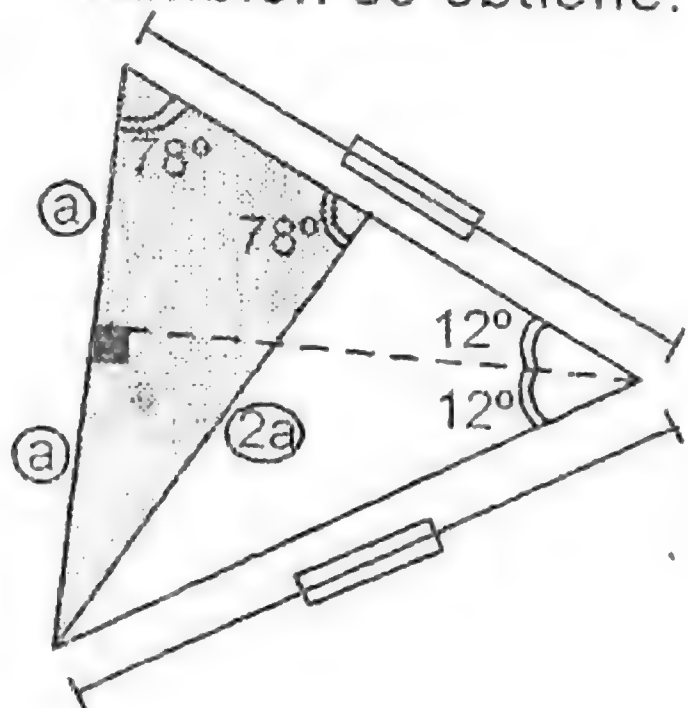


Paso N° 2: En la figura se observa que se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente manera:

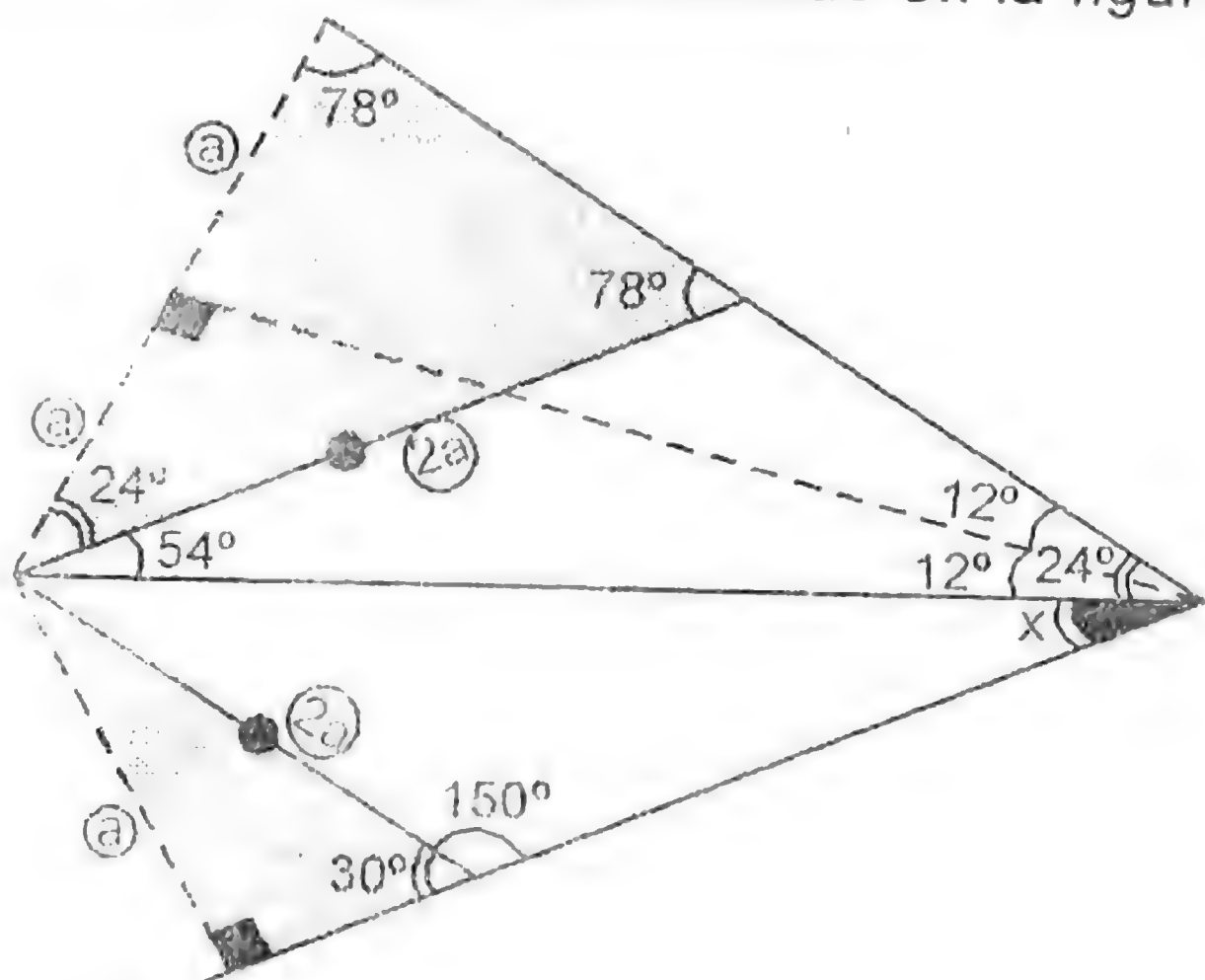




También se obtiene:



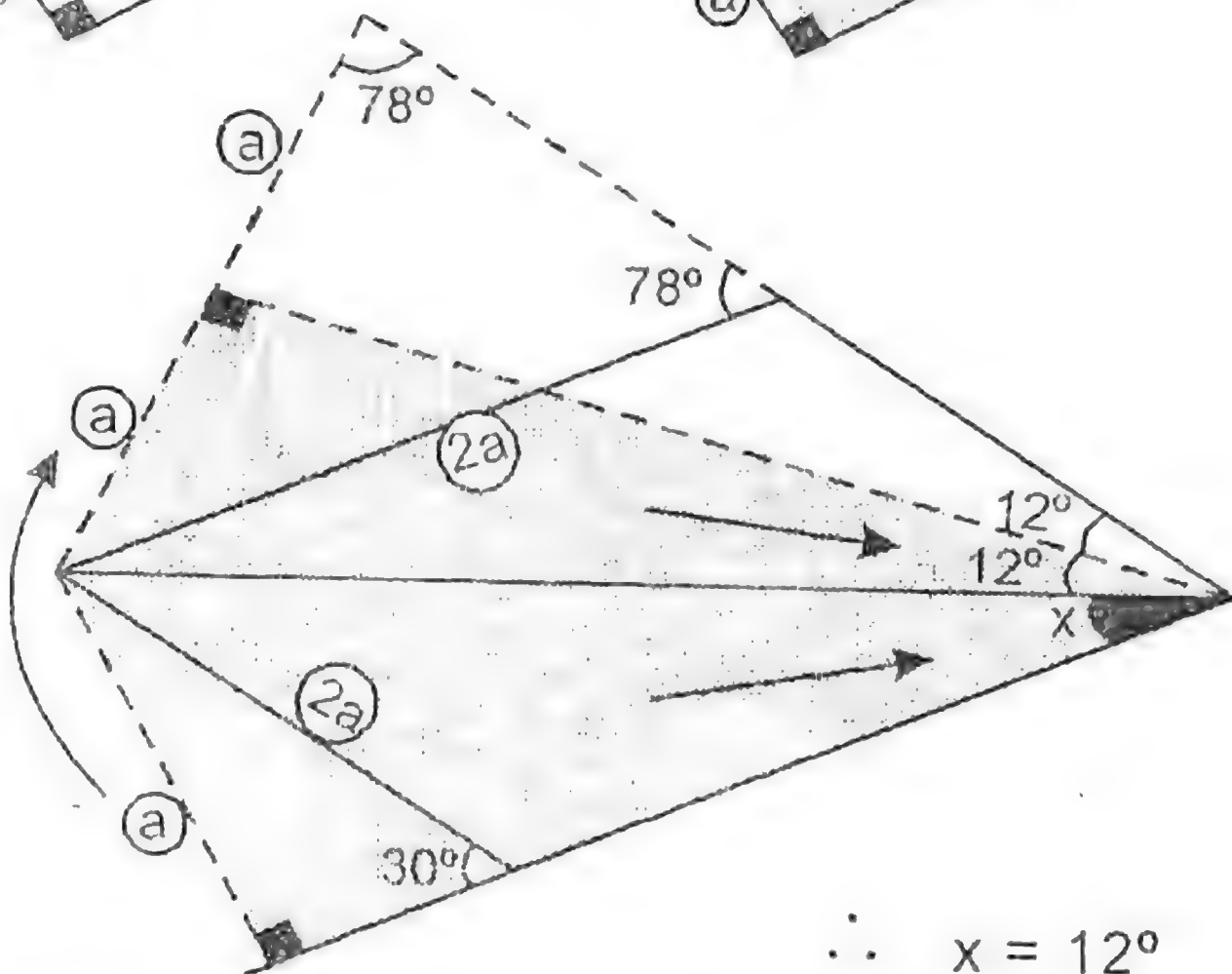
Realizando el trazo mencionado en la figura.



Paso N° 3: Aplicamos el teorema de la bisectriz. (cuarto criterio de construcción)



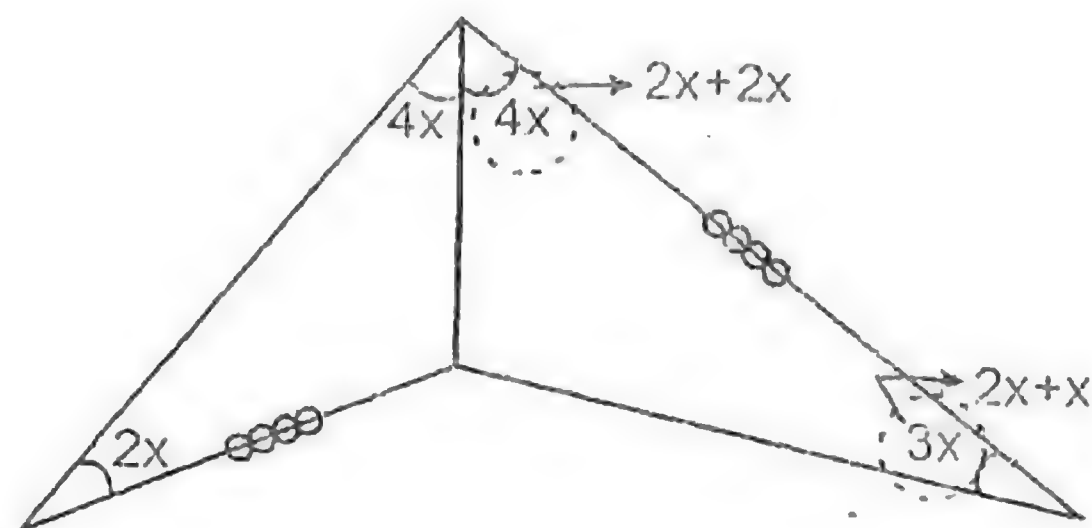
Se cumple:



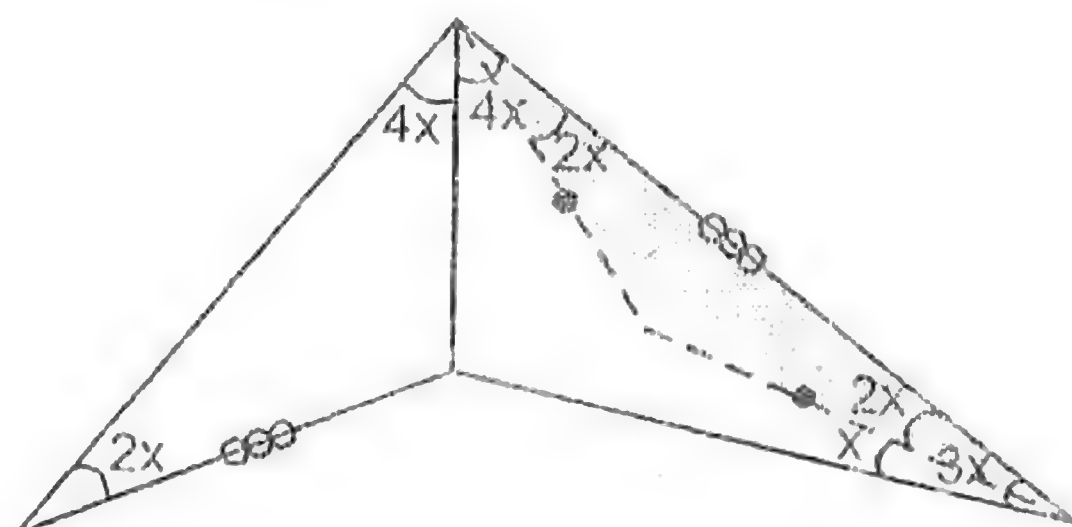
$$\therefore x = 12^\circ$$

Solución N° 34

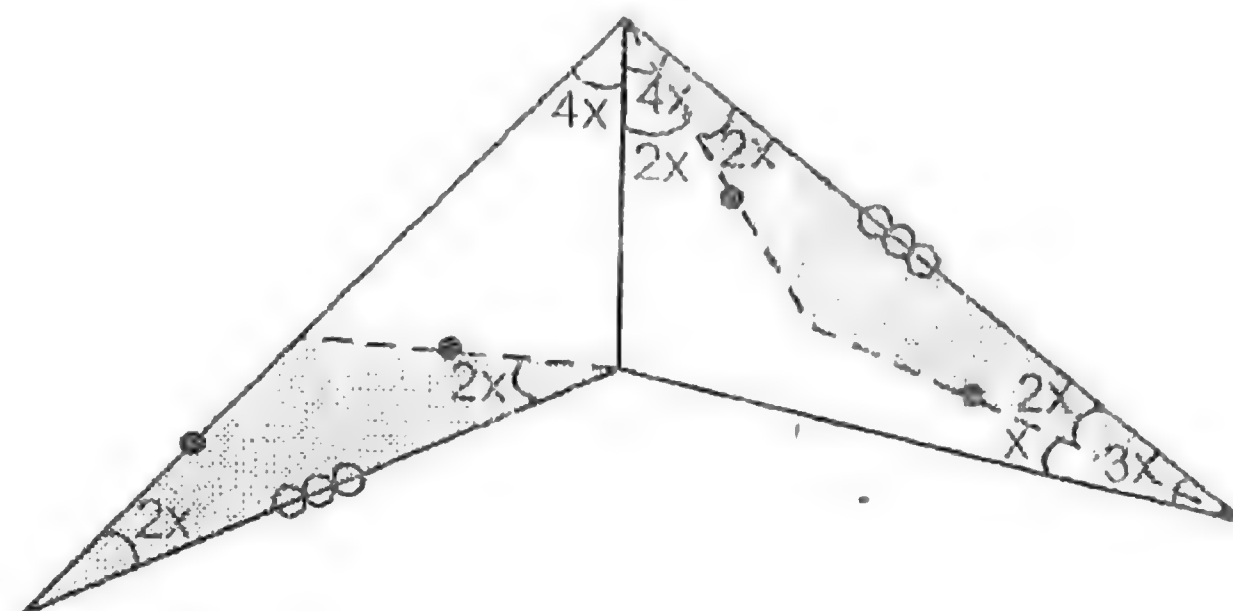
En la figura se observa los siguientes ángulos:



Paso N° 1: Observando los ángulos, construimos interiormente un triángulo isósceles de la siguiente manera:

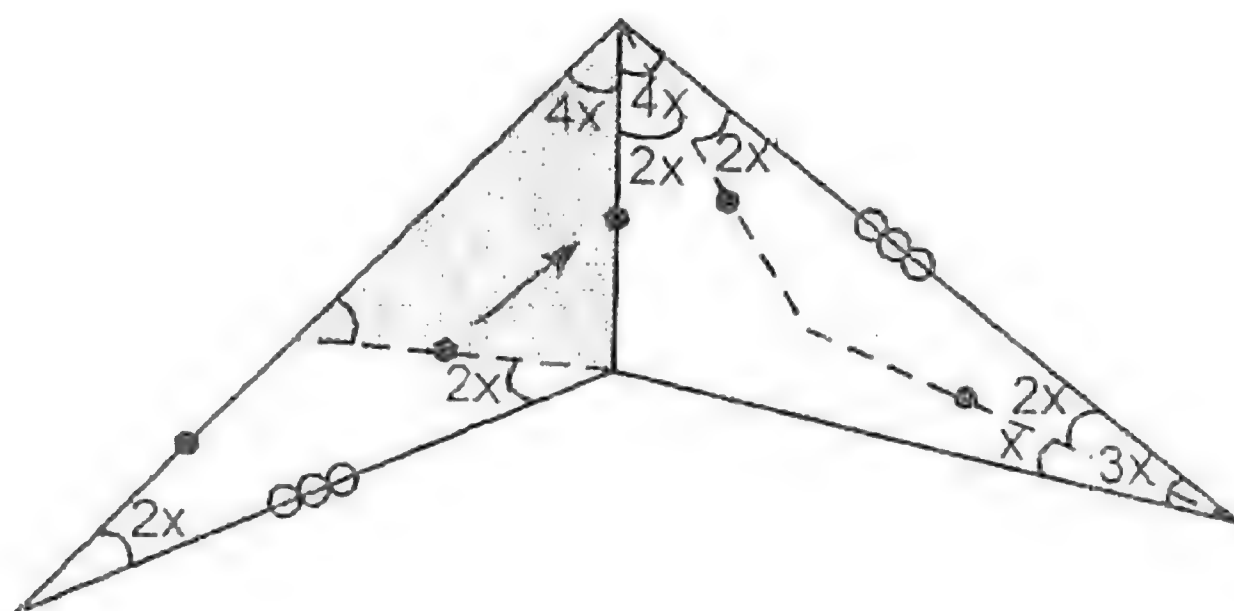


Paso N° 2: Ahora en la figura, realizamos el siguiente trazo para obtener en la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)

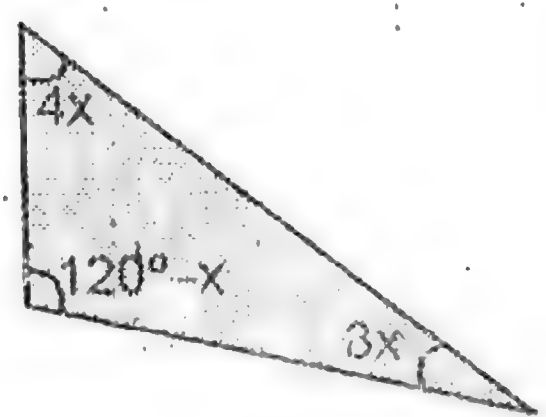
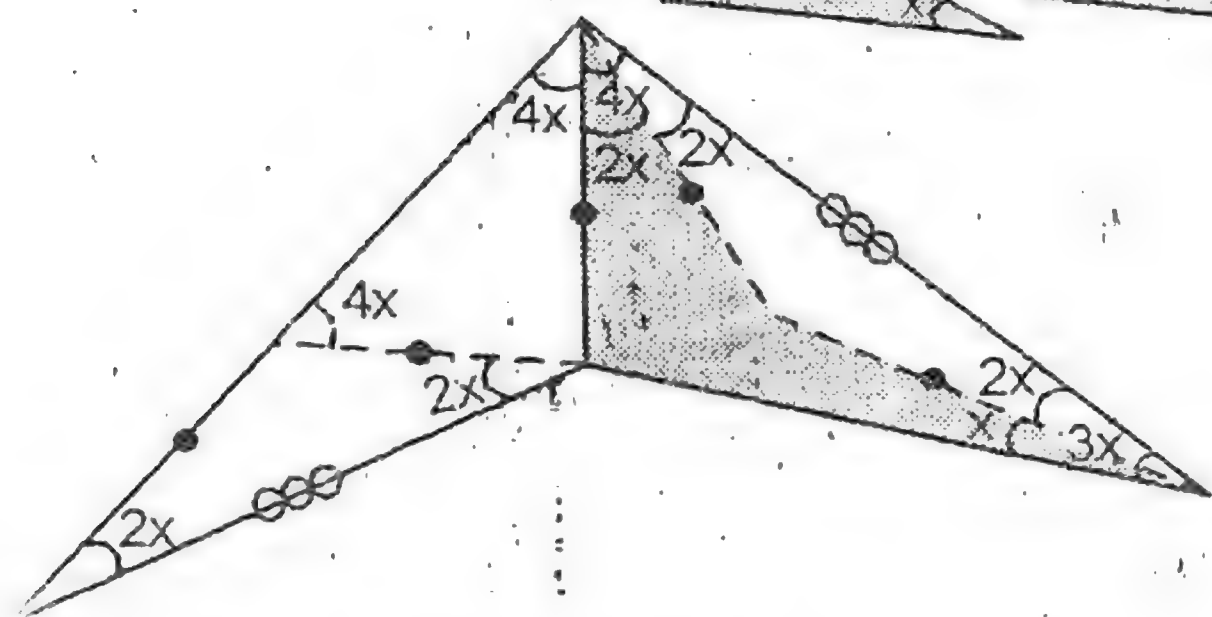


Paso N° 3:

También se obtiene interiormente en la figura un nuevo triángulo isósceles.



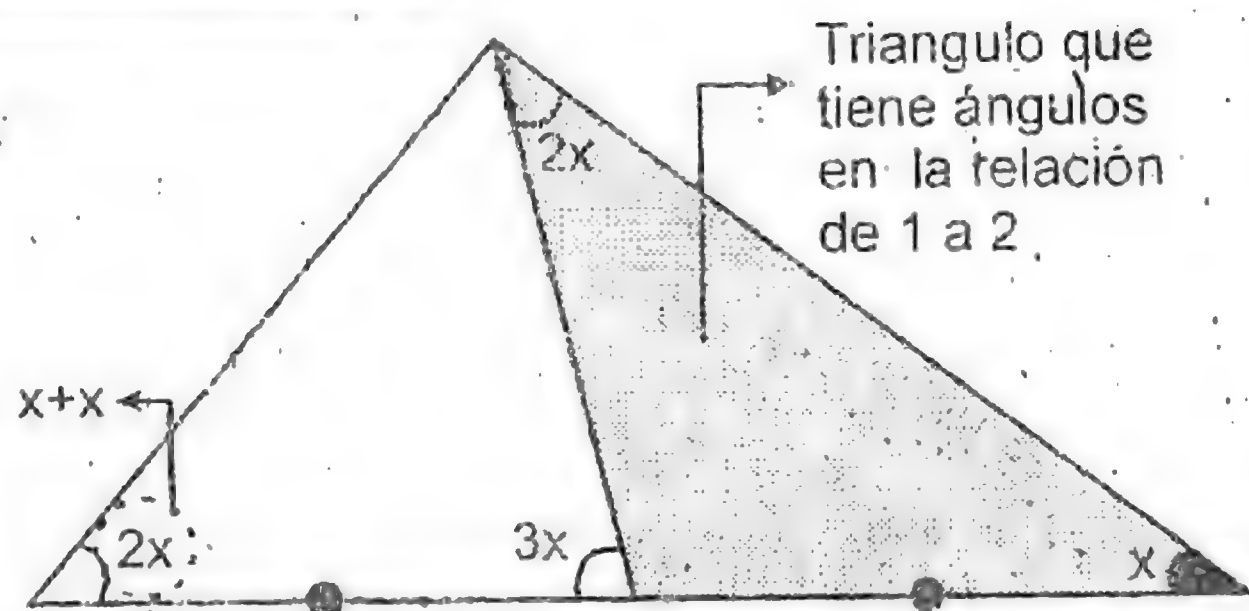
The diagram illustrates the transformation of a triangle. On the left, a triangle has angles labeled $2x$, x , and x . An arrow points to the right, where the same triangle is shown with angles labeled $2x$, $120^\circ - x$, and x .



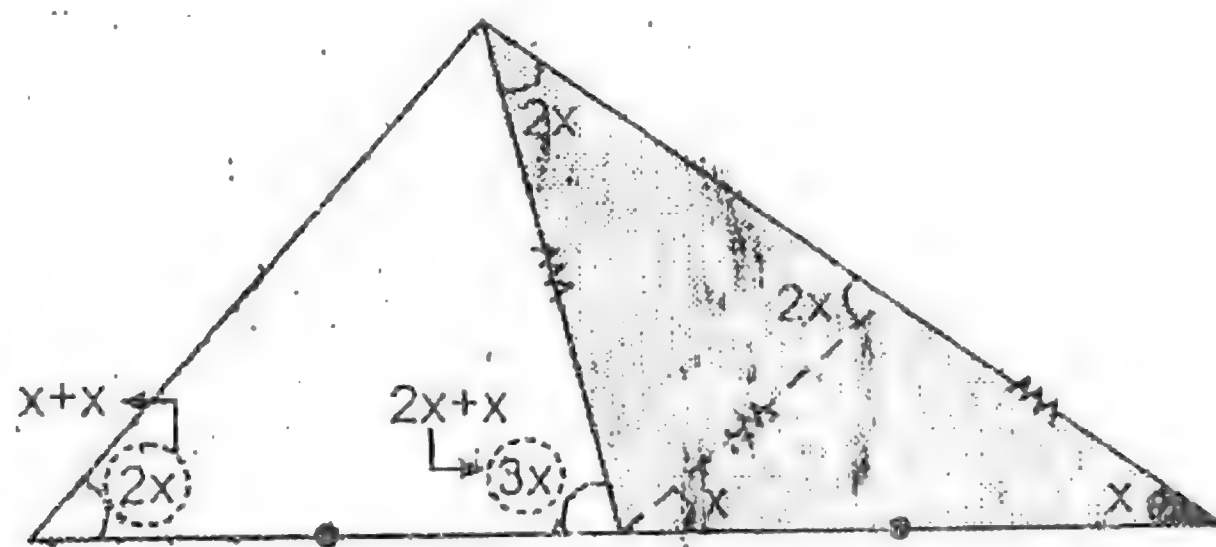
$$6x = 60^\circ$$

$$x = 10^0$$

Solution №35

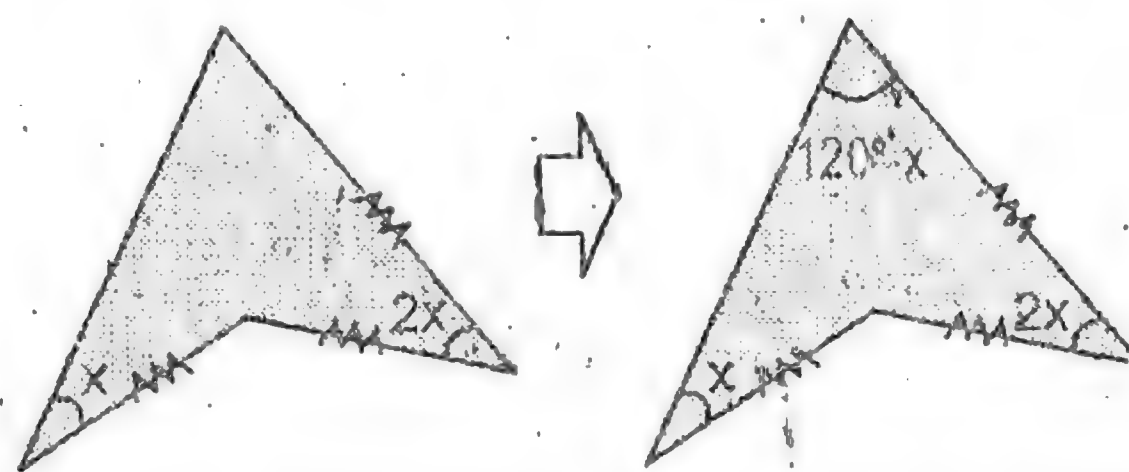
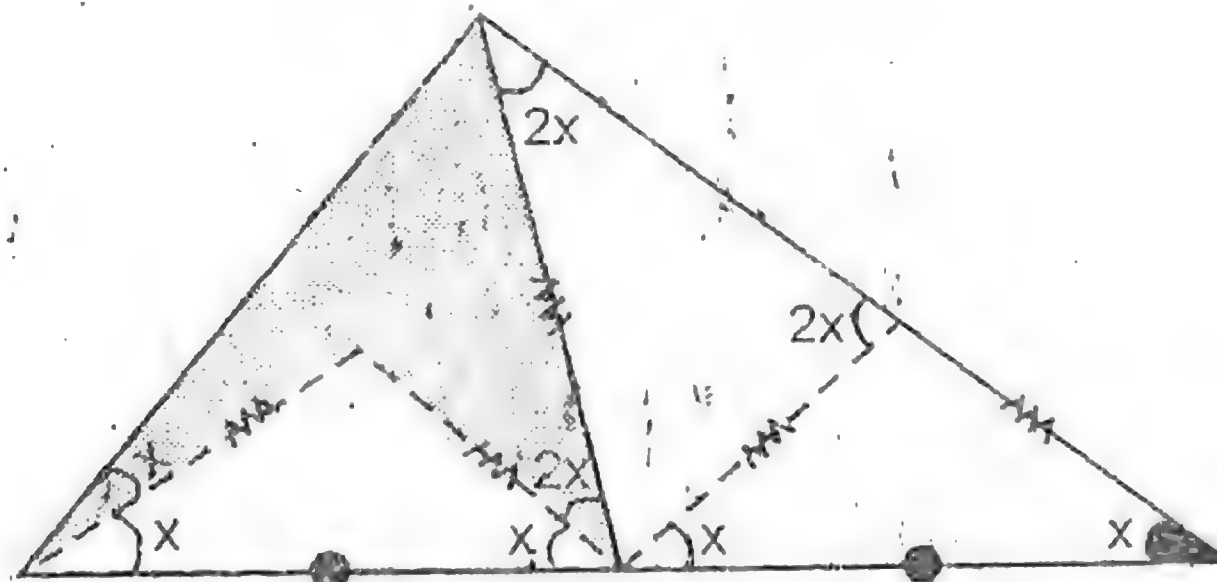


Triángulo que
tiene ángulos
en la relación
de 1 a 2.



The diagram shows two triangles sharing a common vertex. The top triangle has angles labeled $2x$ and x . The bottom triangle has angles labeled x and $2x$. A dashed line connects the two vertices, forming a quadrilateral with angles x , $2x$, x , and $2x$.

Ahora se obtiene un cuadrilátero concavo cumpliendo la siguiente propiedad:

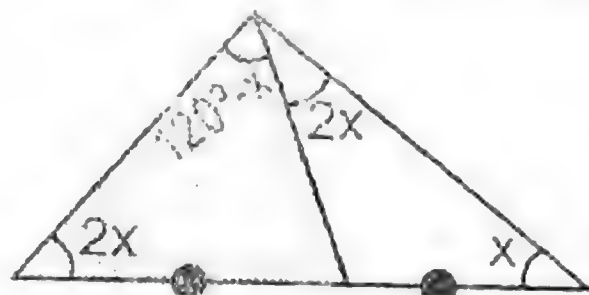


Donde se cumple:

$$120^\circ - x + 2x + 2x + x = 180^\circ$$

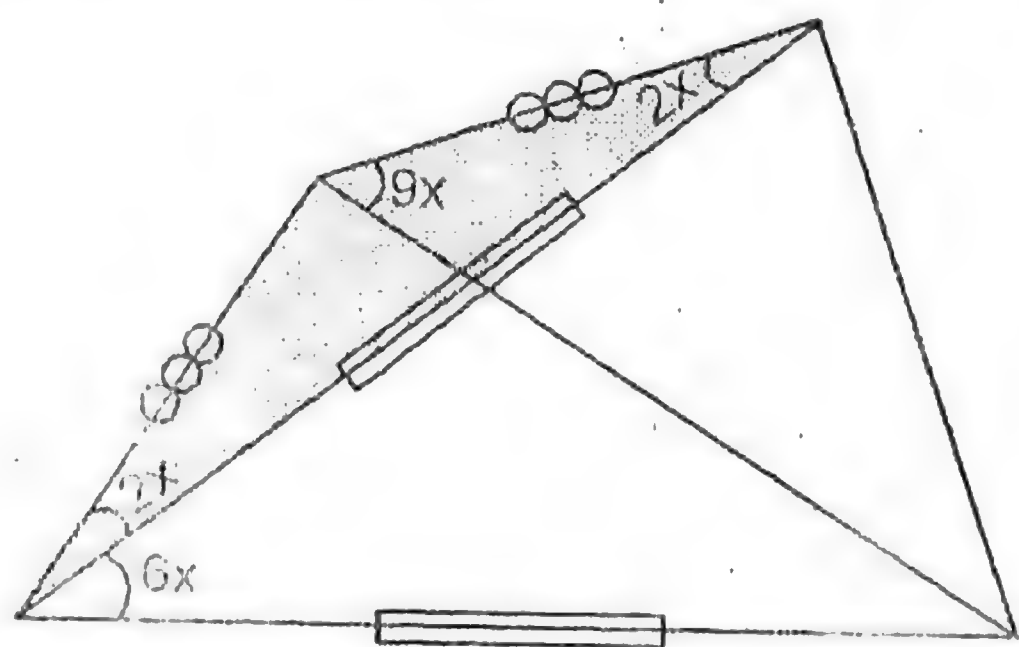
$$4x = 60^\circ$$

$$x = 15^\circ$$



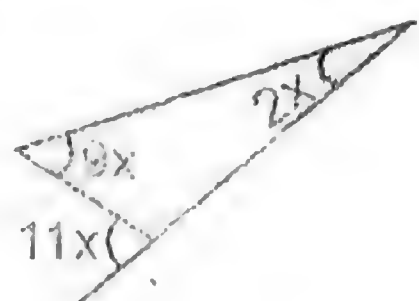
Solución N° 36

En la figura se observa:

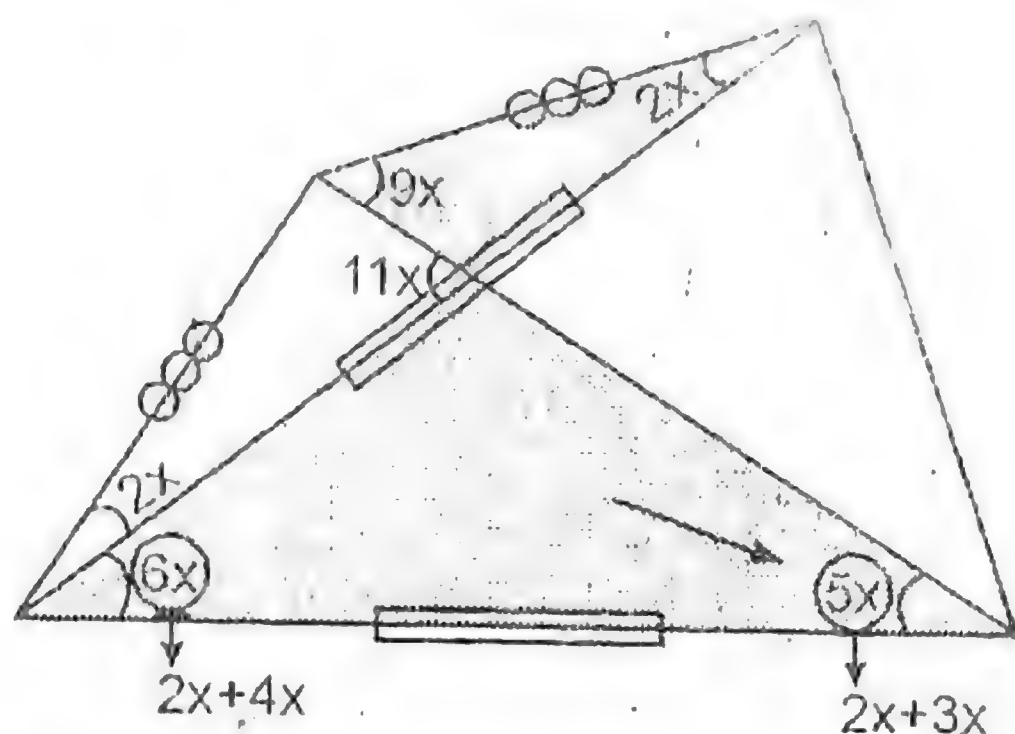


Paso N° 1:

Se aplica la propiedad del ángulo externo en un triángulo:

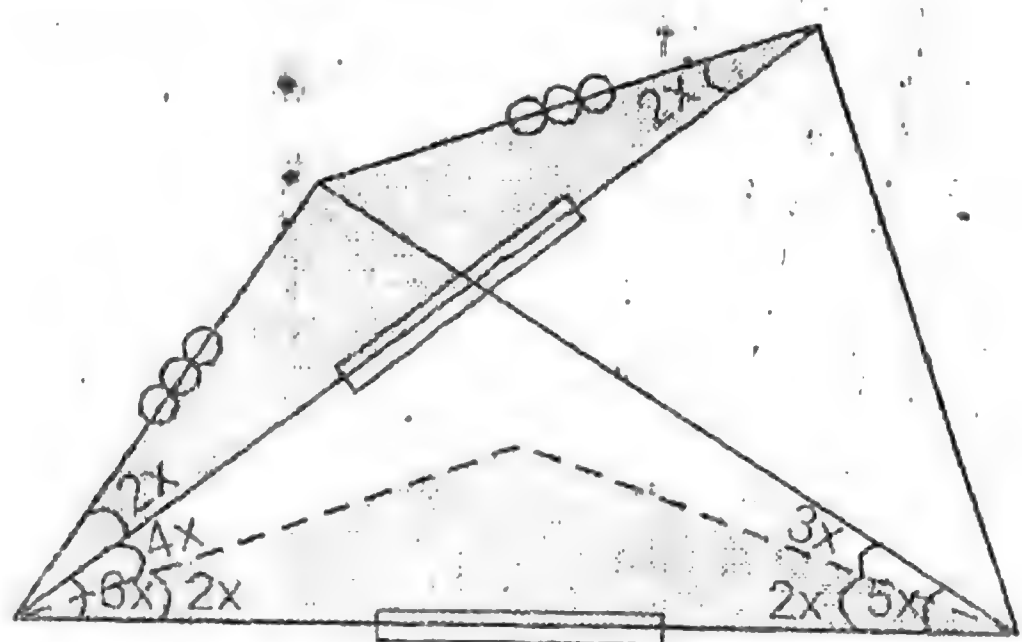


también

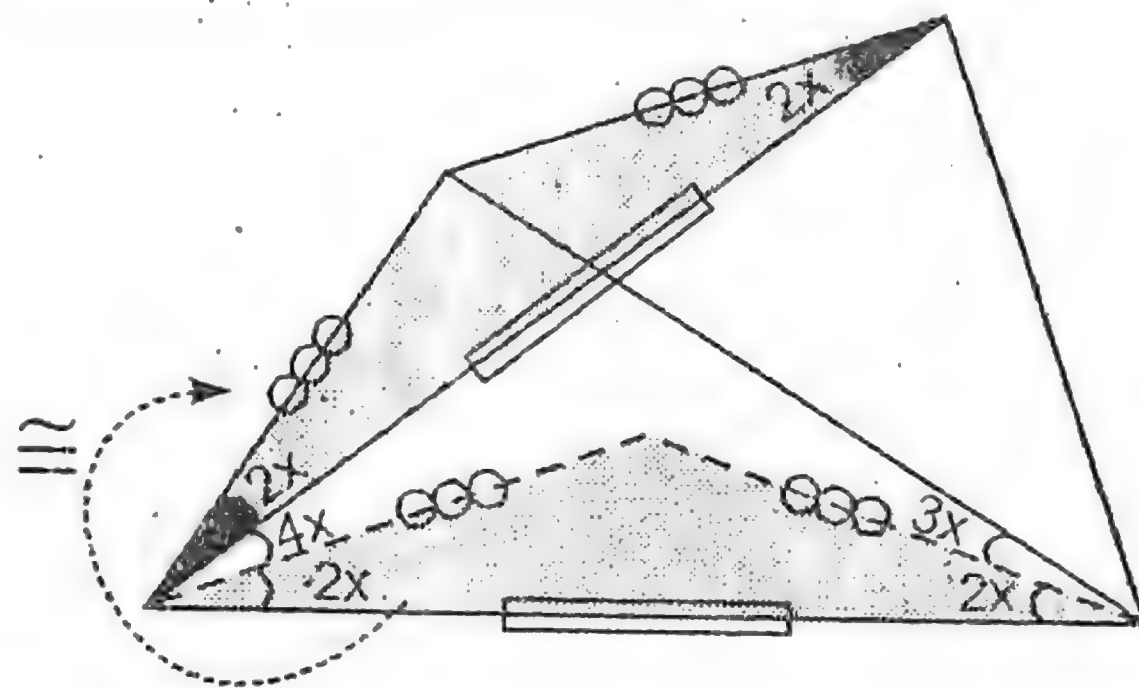


Paso N° 2:

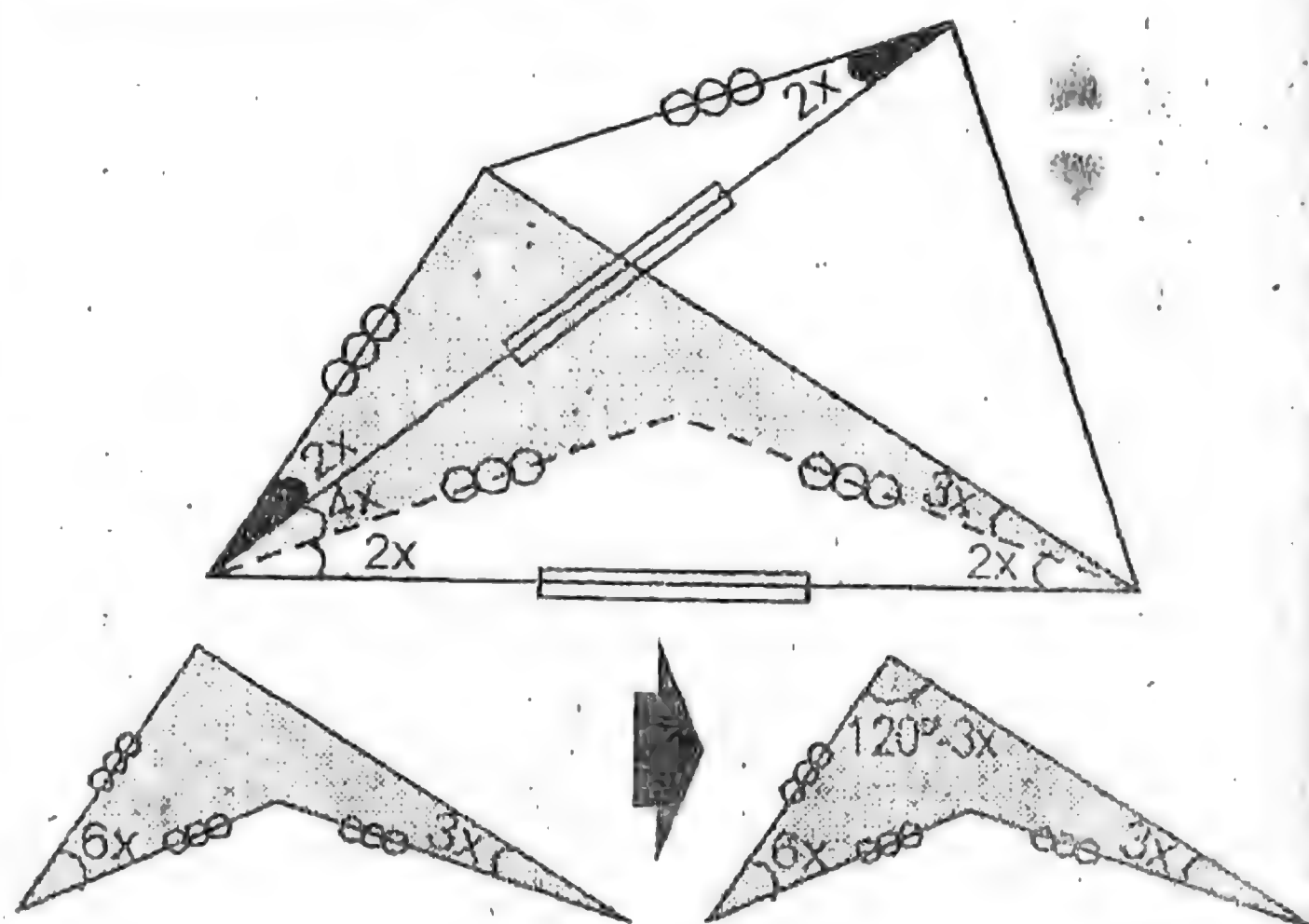
Realizamos el siguiente trazo, para obtener dos triángulos congruentes.



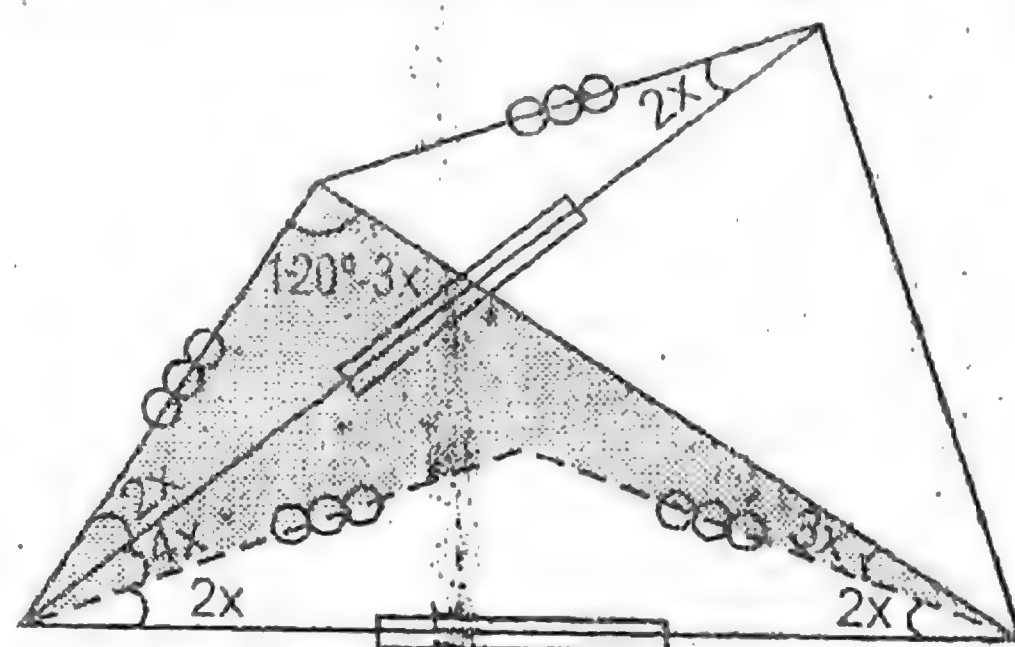
Paso N° 3: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (A.L.A.)



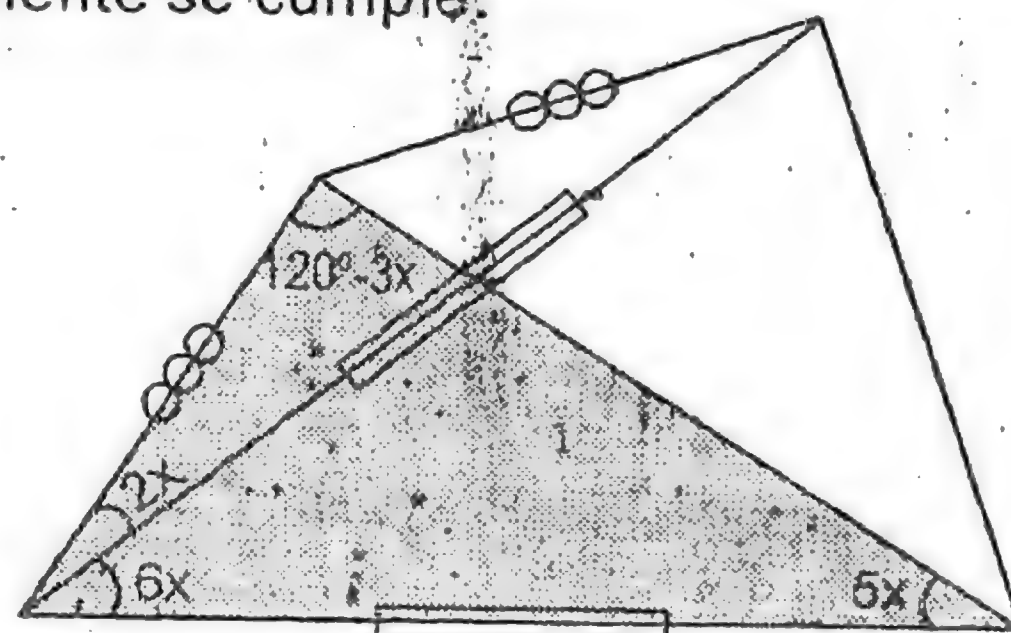
Paso N° 4: Se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se cumple el séptimo criterio de construcción.



Paso N° 5: Entonces se obtiene en la figura:



Finalmente se cumple:



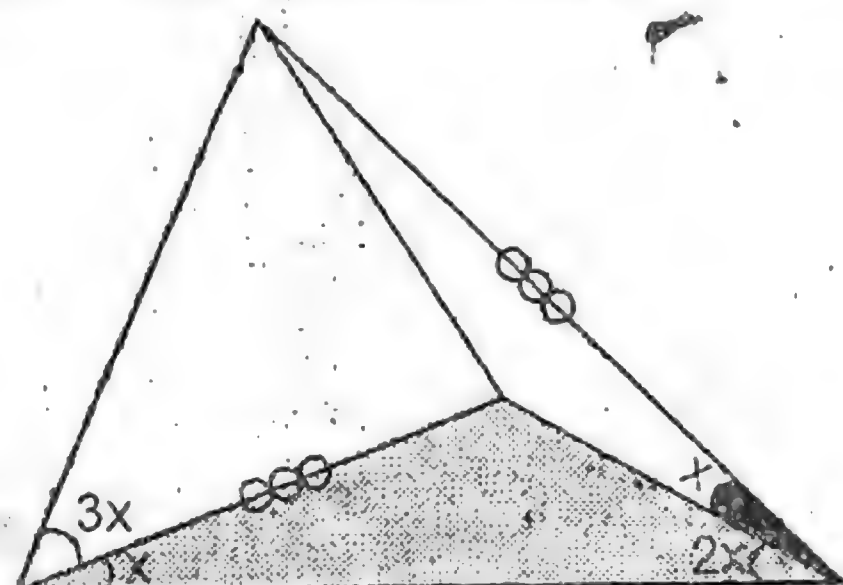
$$\Rightarrow 120^\circ - 3x + 8x + 5x = 180^\circ$$

$$10x = 60^\circ$$

$$x = 6^\circ$$

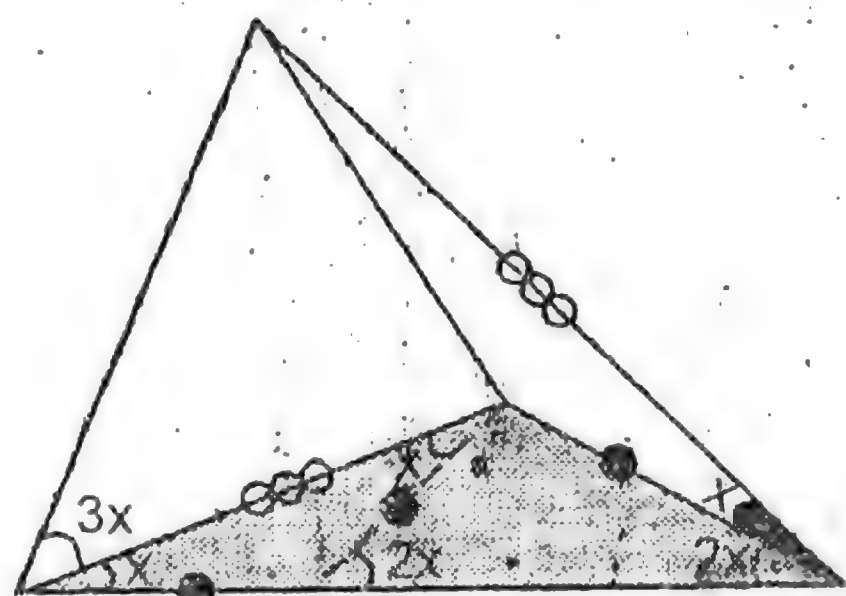
Solución N° 37

En la figura se observa: un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2



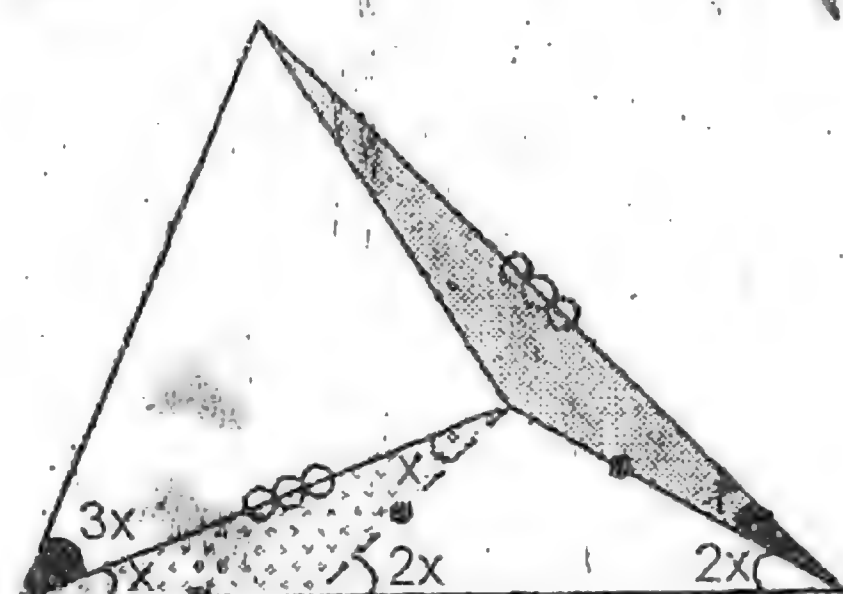
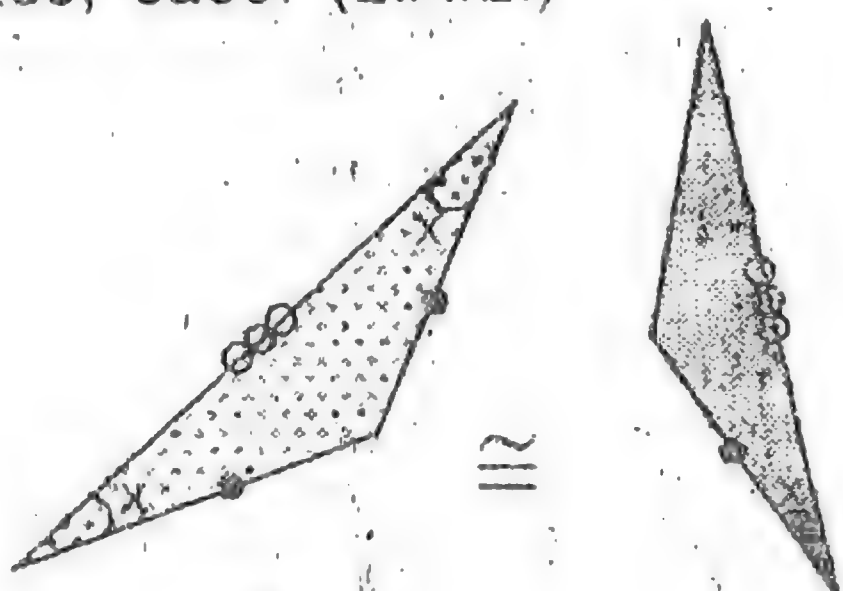
Paso N° 1:

Aplicamos el primer criterio de construcción:

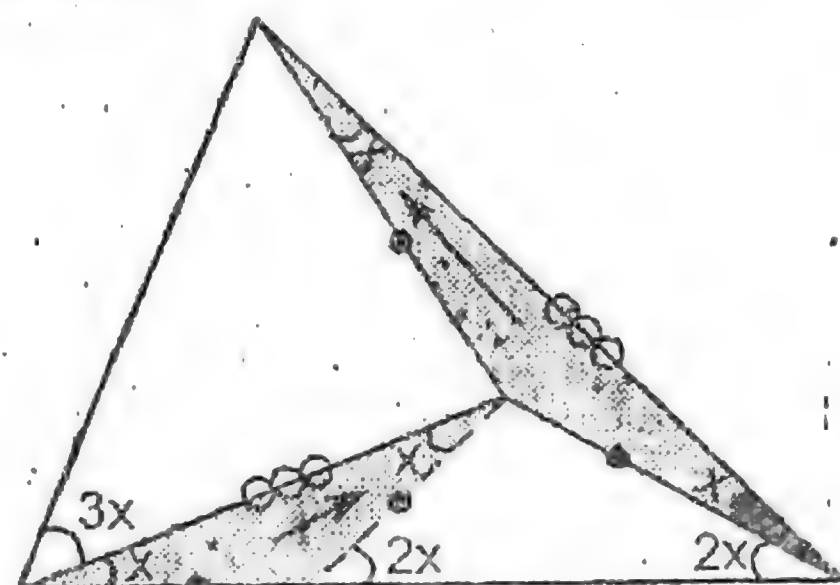


Paso N° 2:

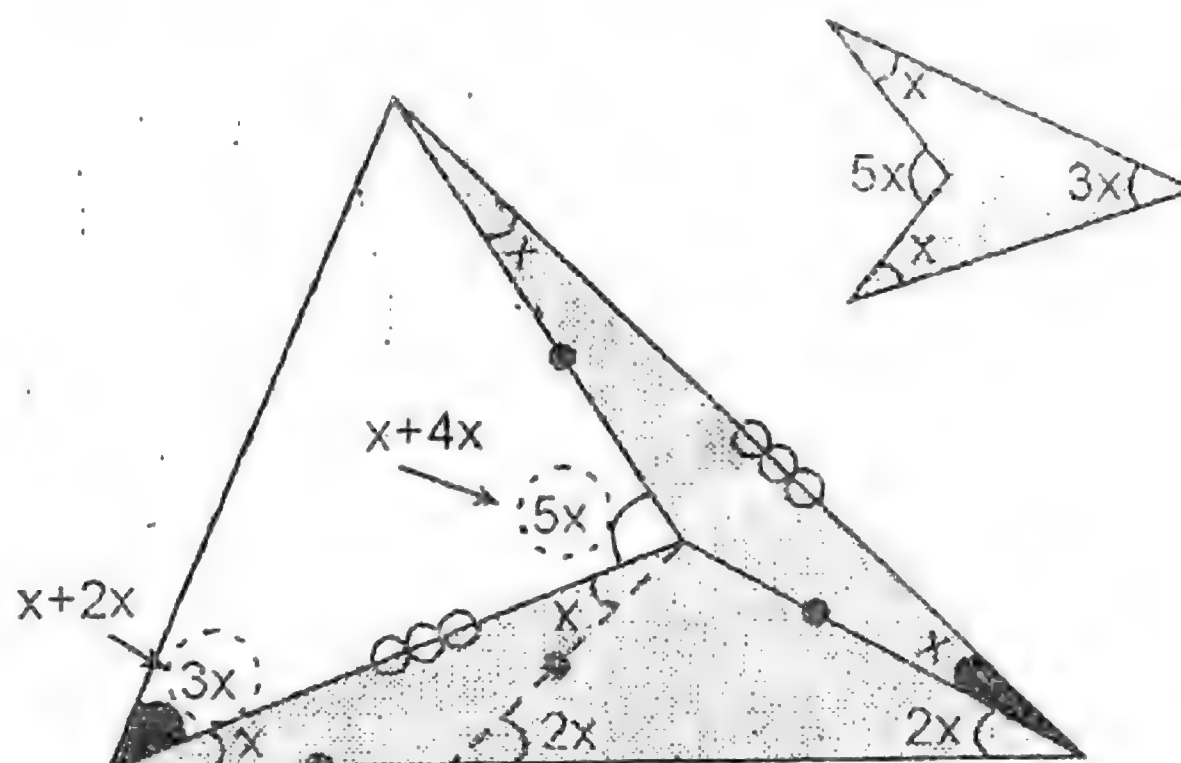
Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)



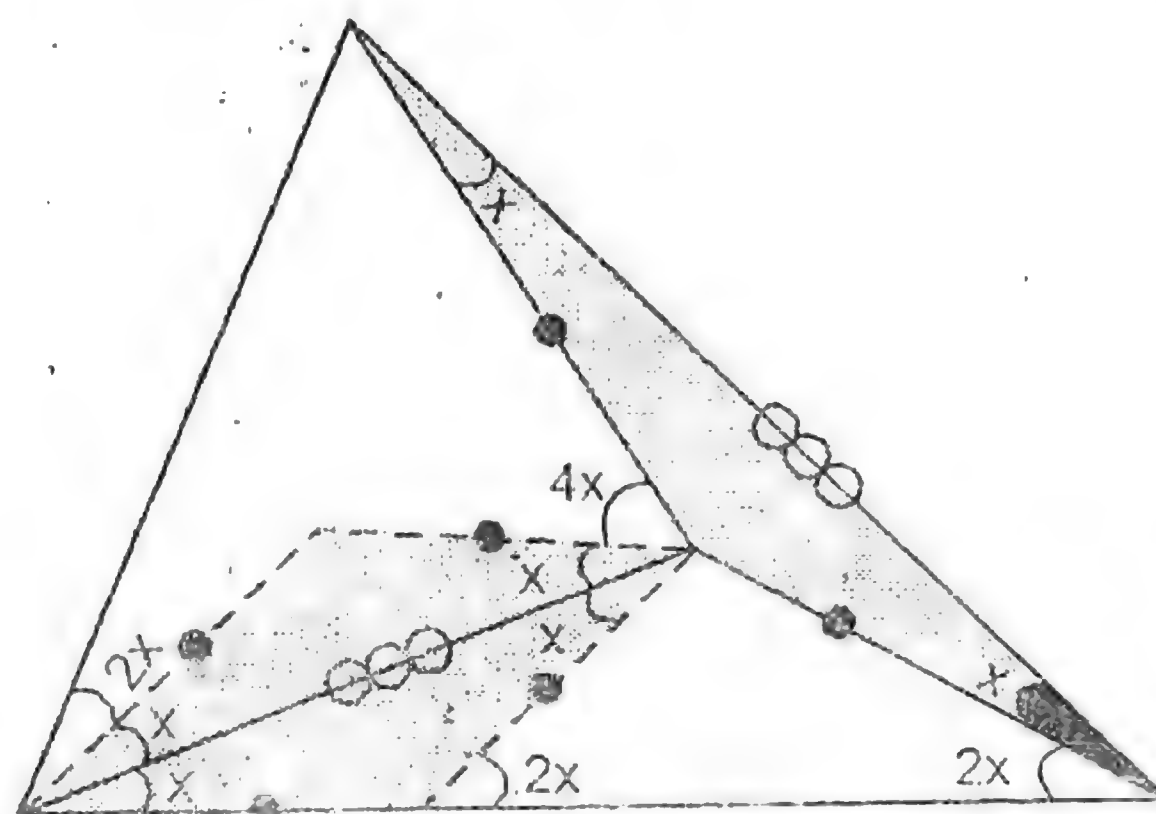
En donde cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso N° 3: Aplicando la siguiente propiedad

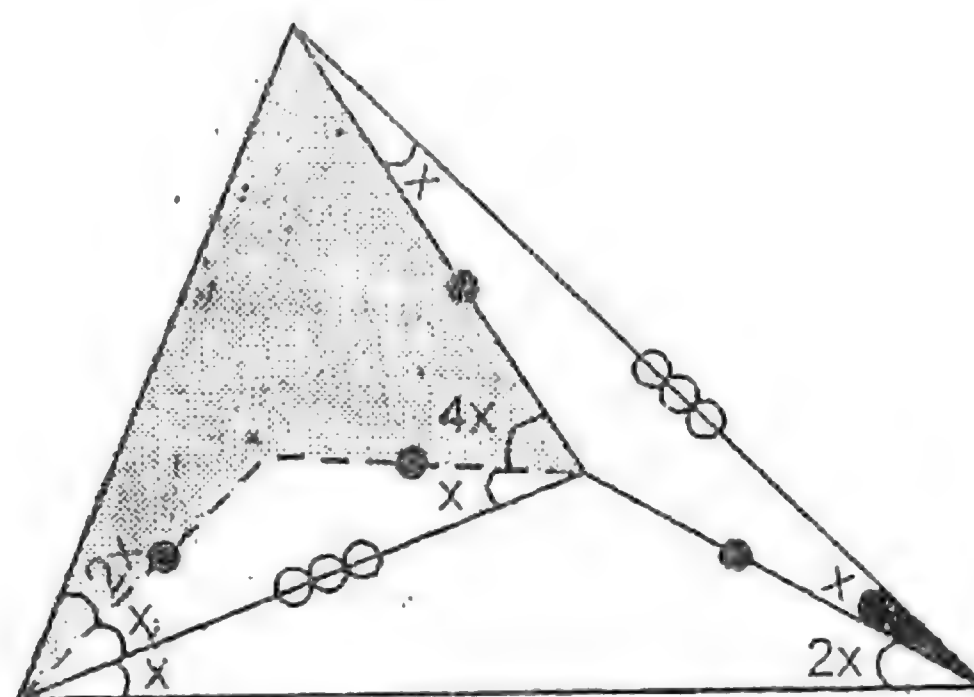


Paso N° 4: Realizando el siguiente trazo para obtener nuevamente dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)

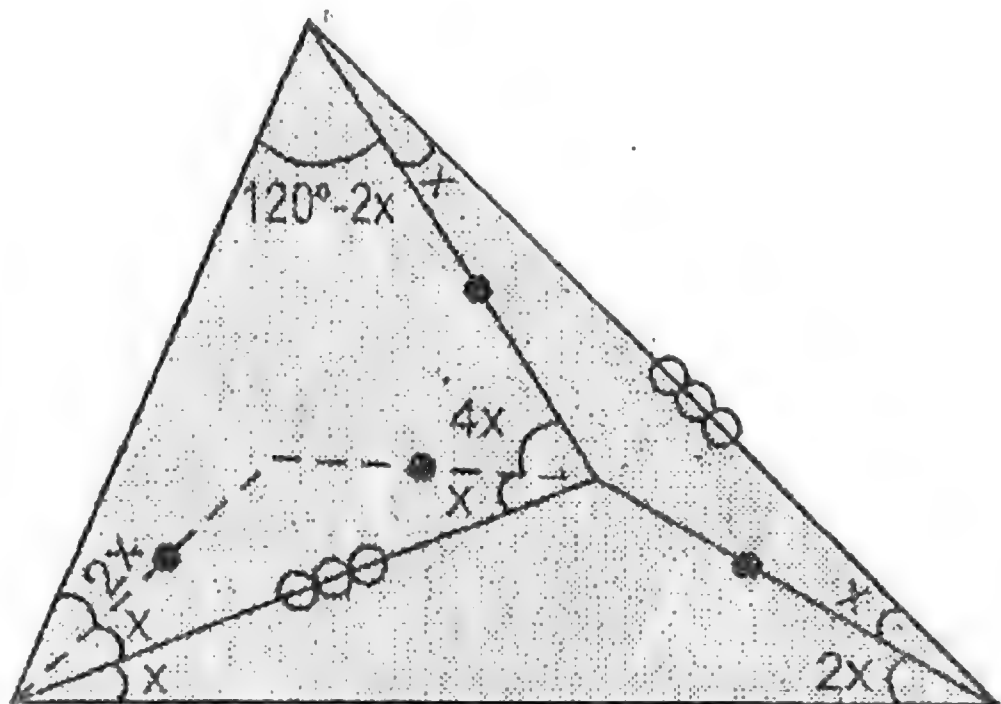


Paso N° 5:

Ahora se observa un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.



Paso N° 6:



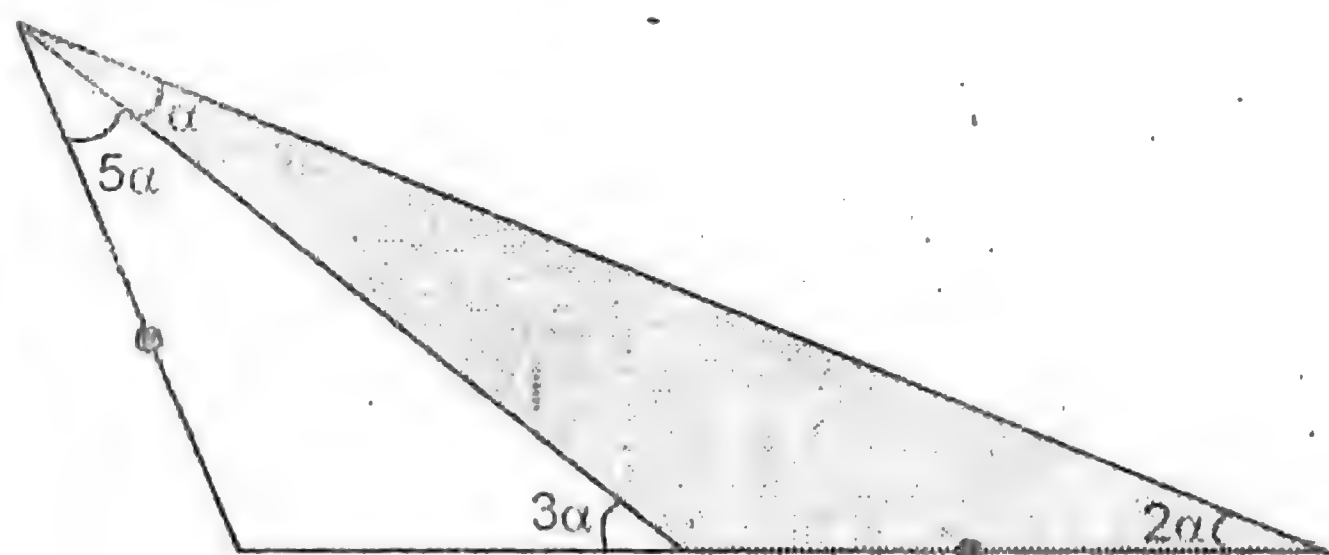
Finalmente en la figura se cumple:

$$4x + 120^\circ - 2x + x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 60^\circ$$

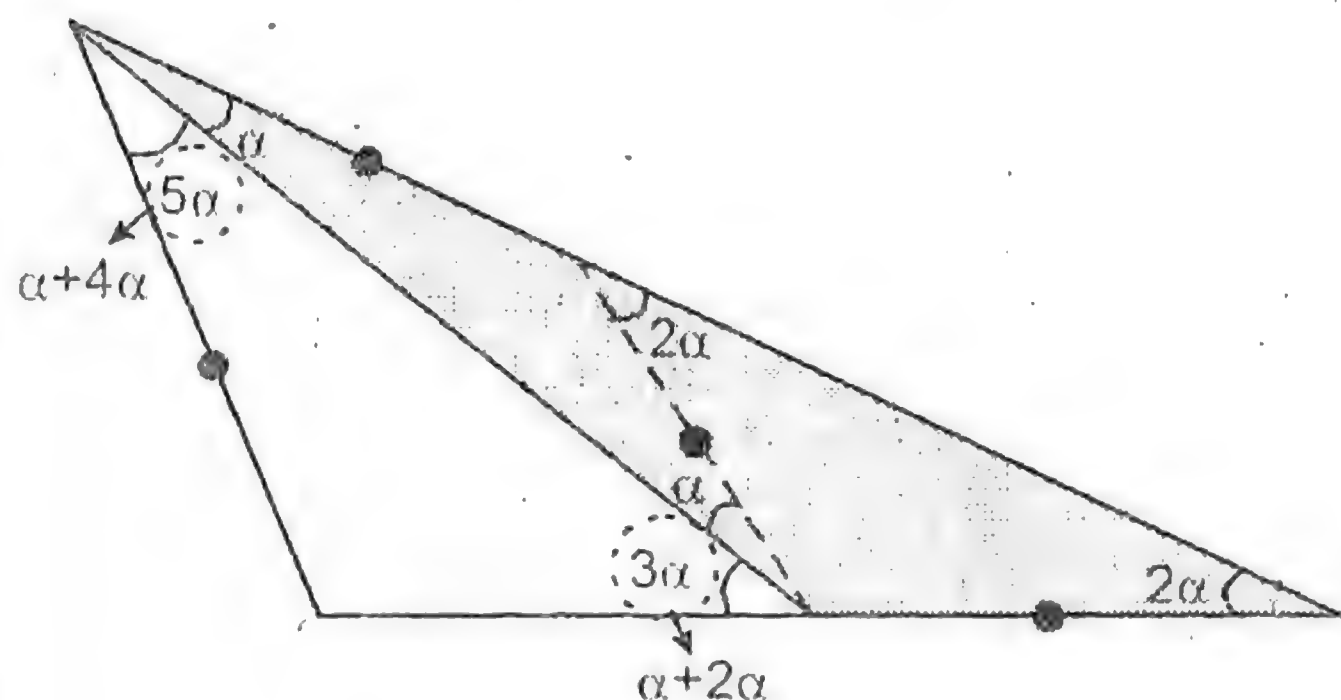
$$x = 10^\circ$$

Solución N° 38



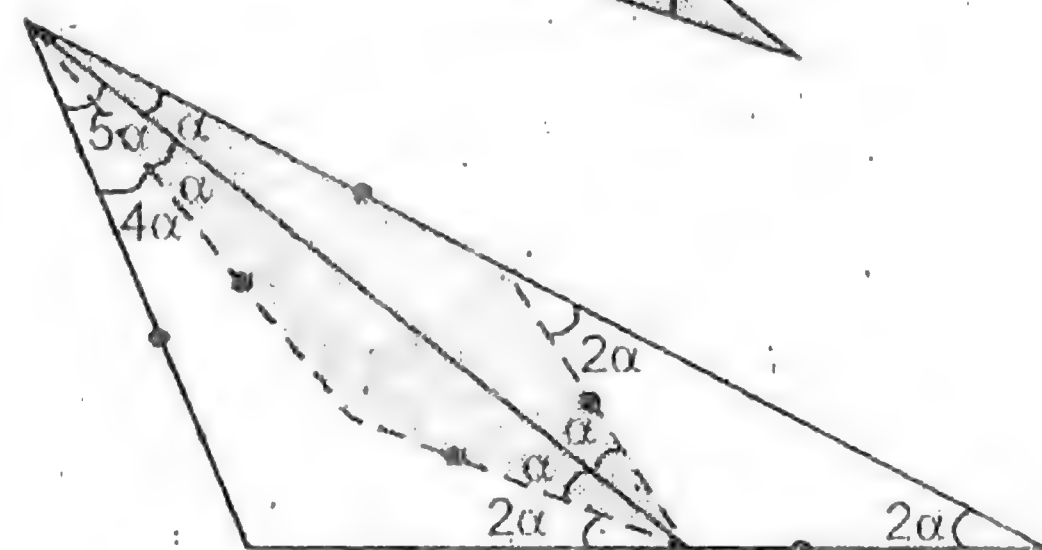
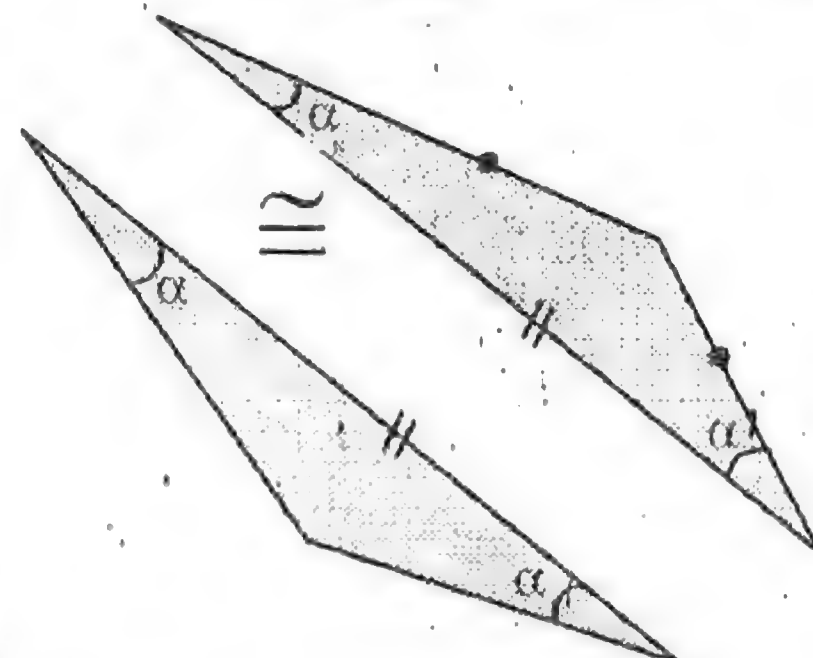
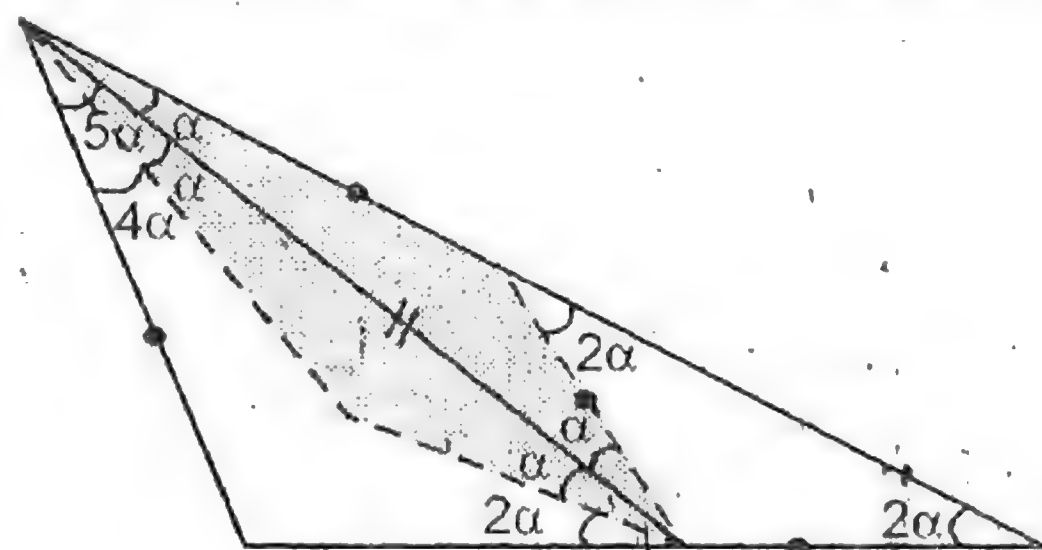
Paso N° 1:

Se observa un triángulo que posee ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer criterio de construcción:



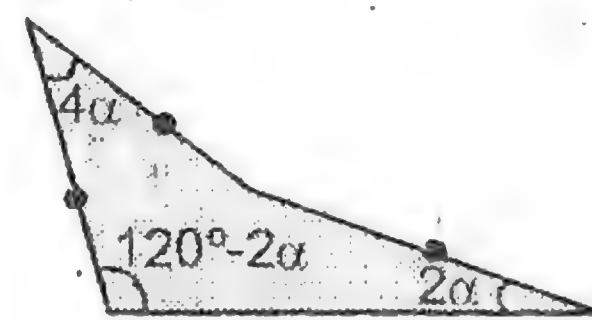
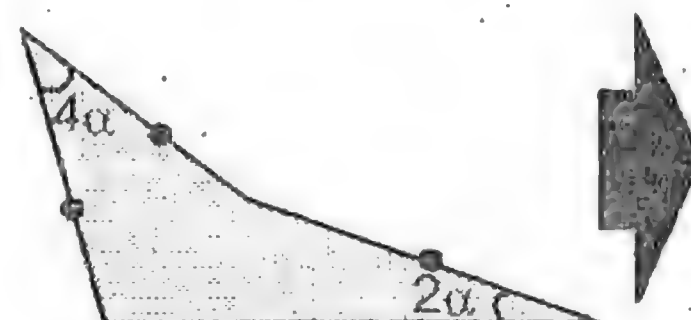
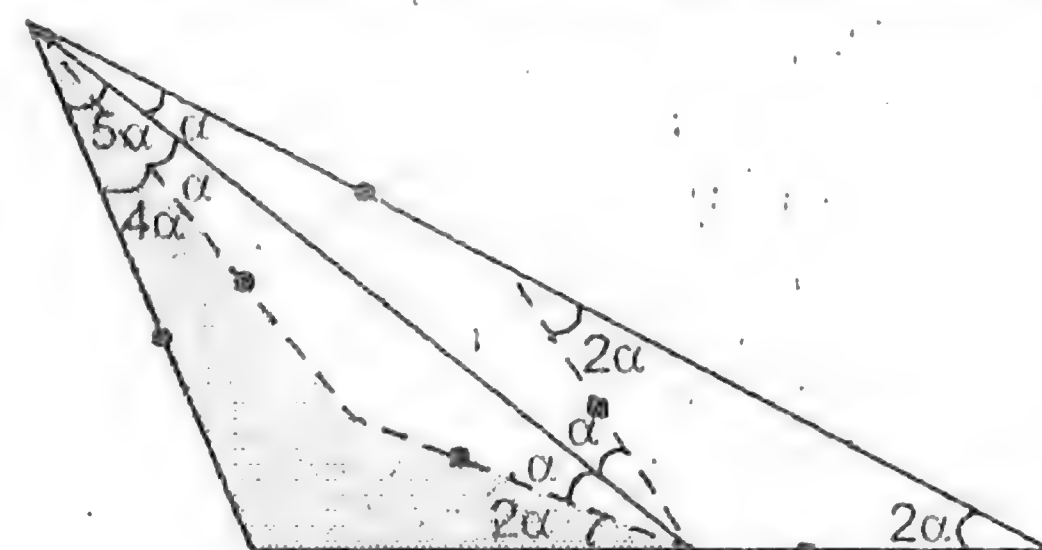
Paso N° 2:

En la figura se obtienen dos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo, caso: (A.L.A.)



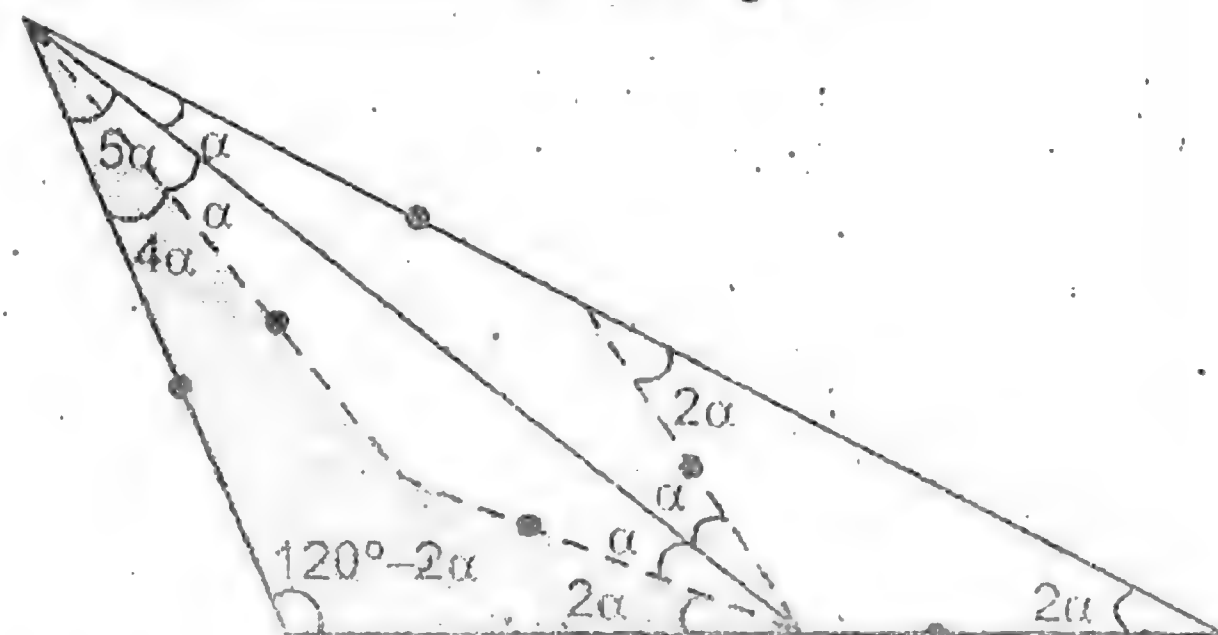
Paso N° 3:

Se observa un cuadrilátero concavo donde se aplicará el séptimo criterio de construcción.



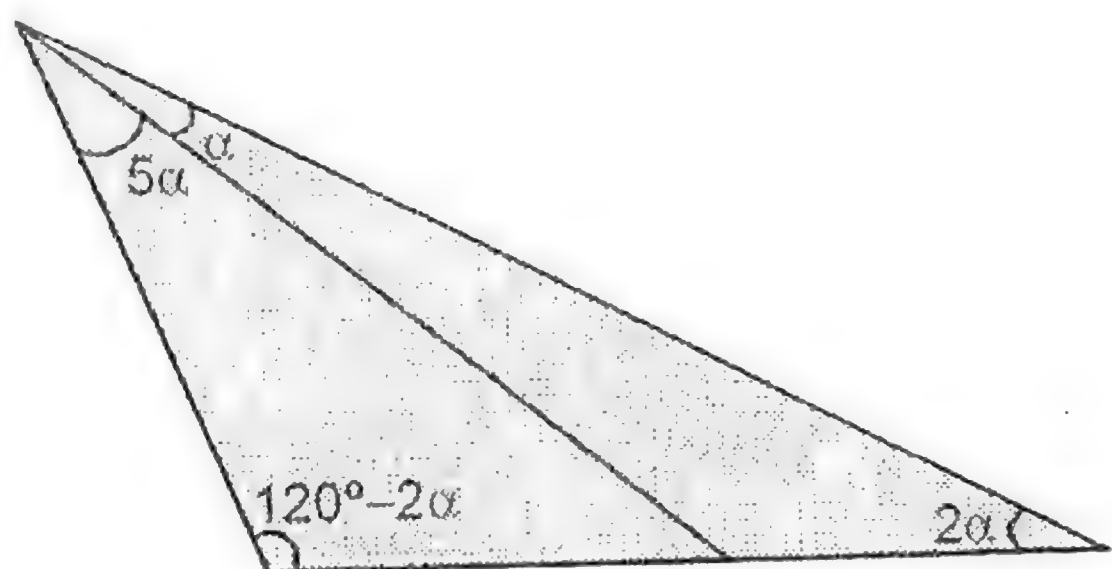
Paso N° 4:

Ahora observamos en la figura:



Paso N° 5:

Finalmente en el triángulo total se cumple:



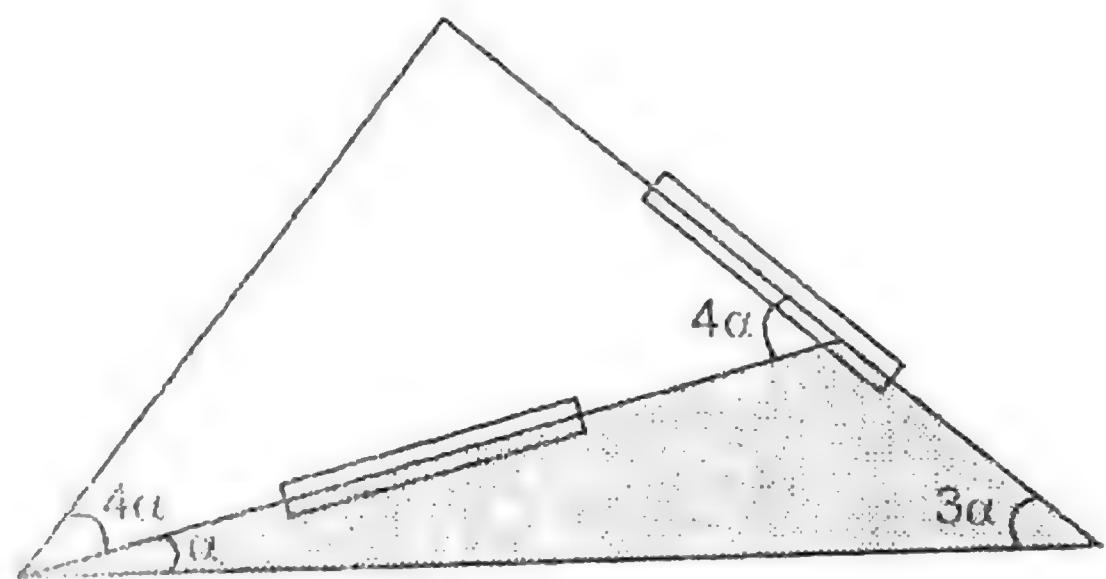
$$120^\circ - 2\alpha + 5\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

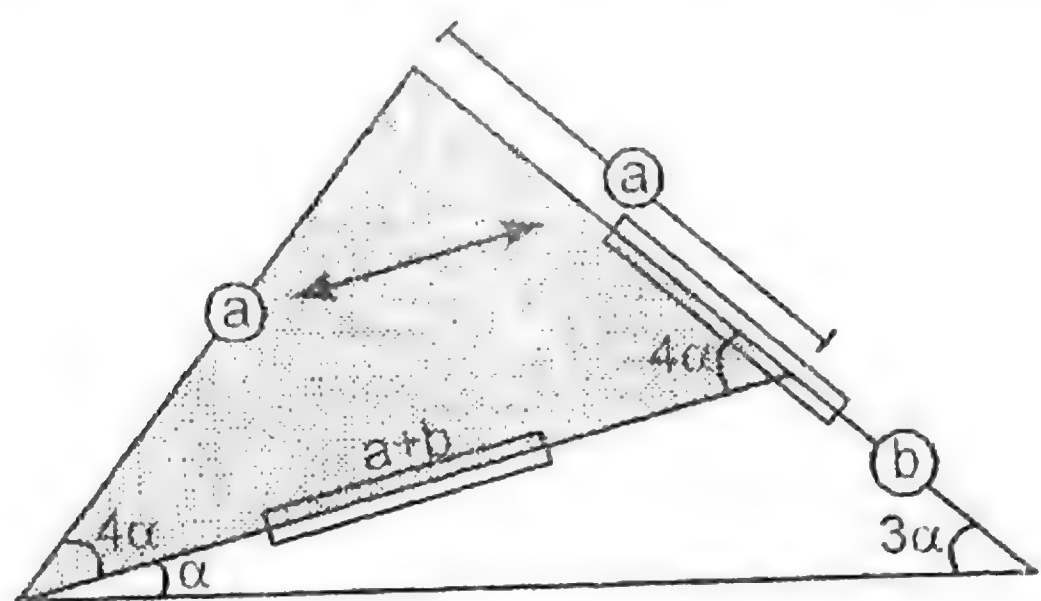
Solución N° 39

En la figura se observa:



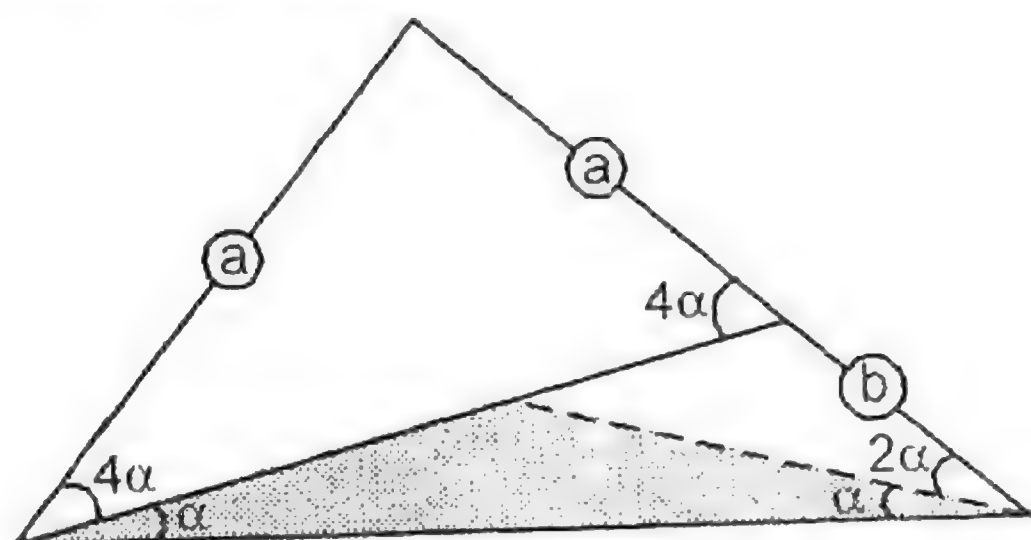
Paso N° 1:

Se observa de la figura un triángulo isósceles.

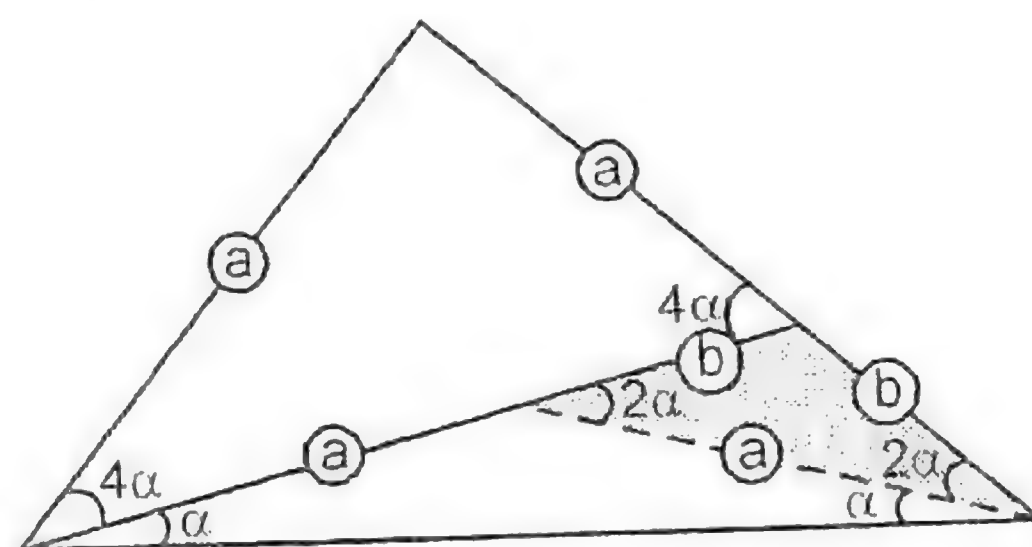


Paso N° 2:

Ahora realizamos el siguiente trazo para obtener lados iguales y así generar triángulos isósceles de la siguiente manera.

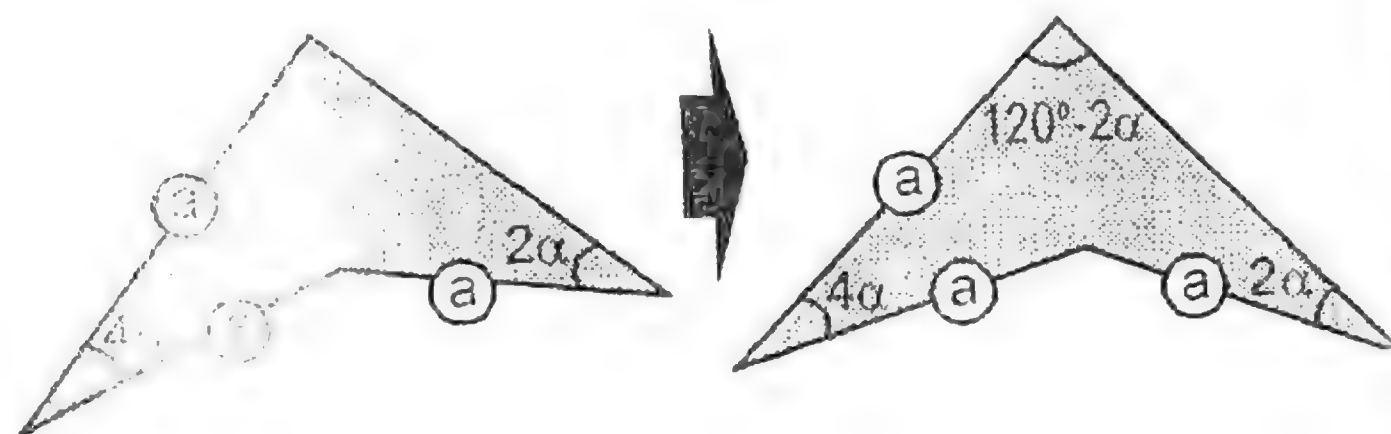
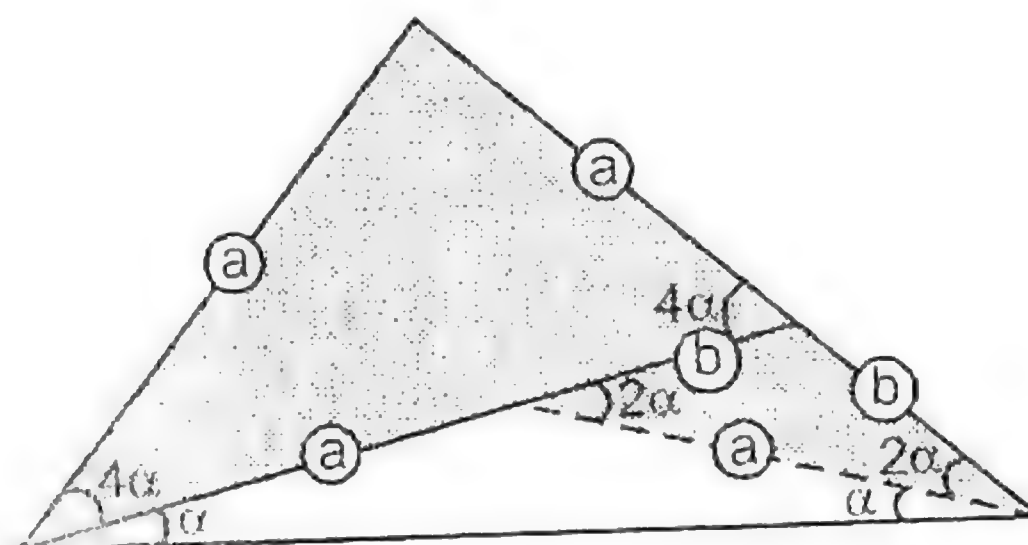


Luego se obtiene:

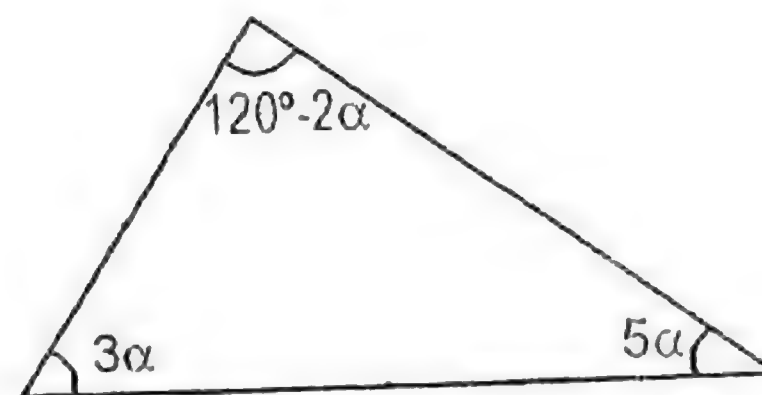
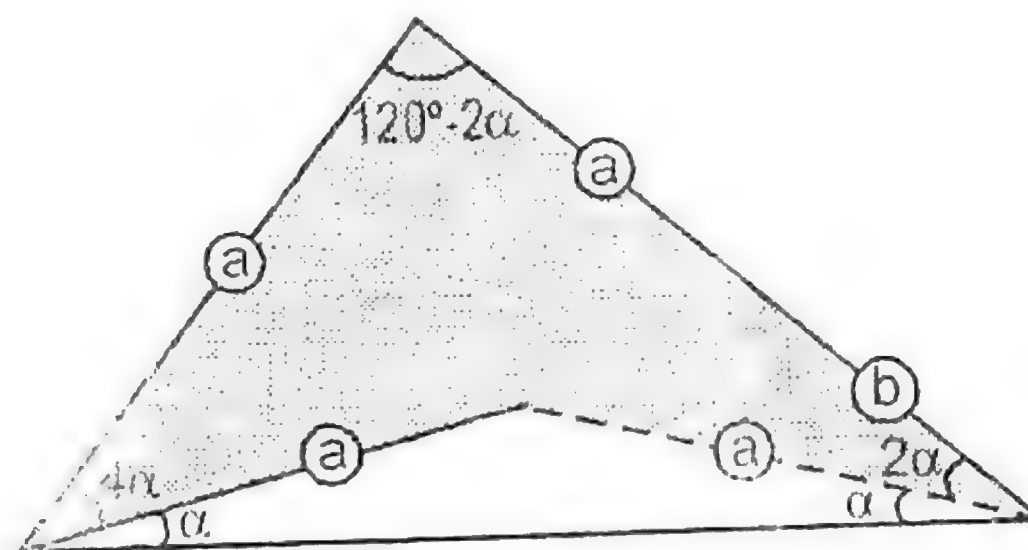


Paso N° 3:

Ahora se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.



Paso 1:



Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:

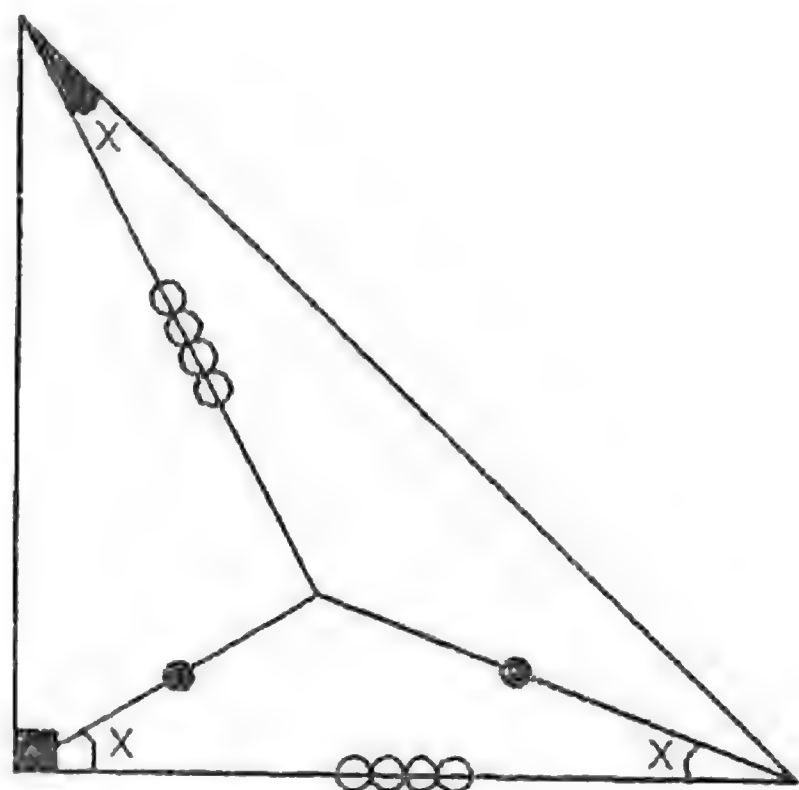
$$3\alpha + 120^\circ - 2\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

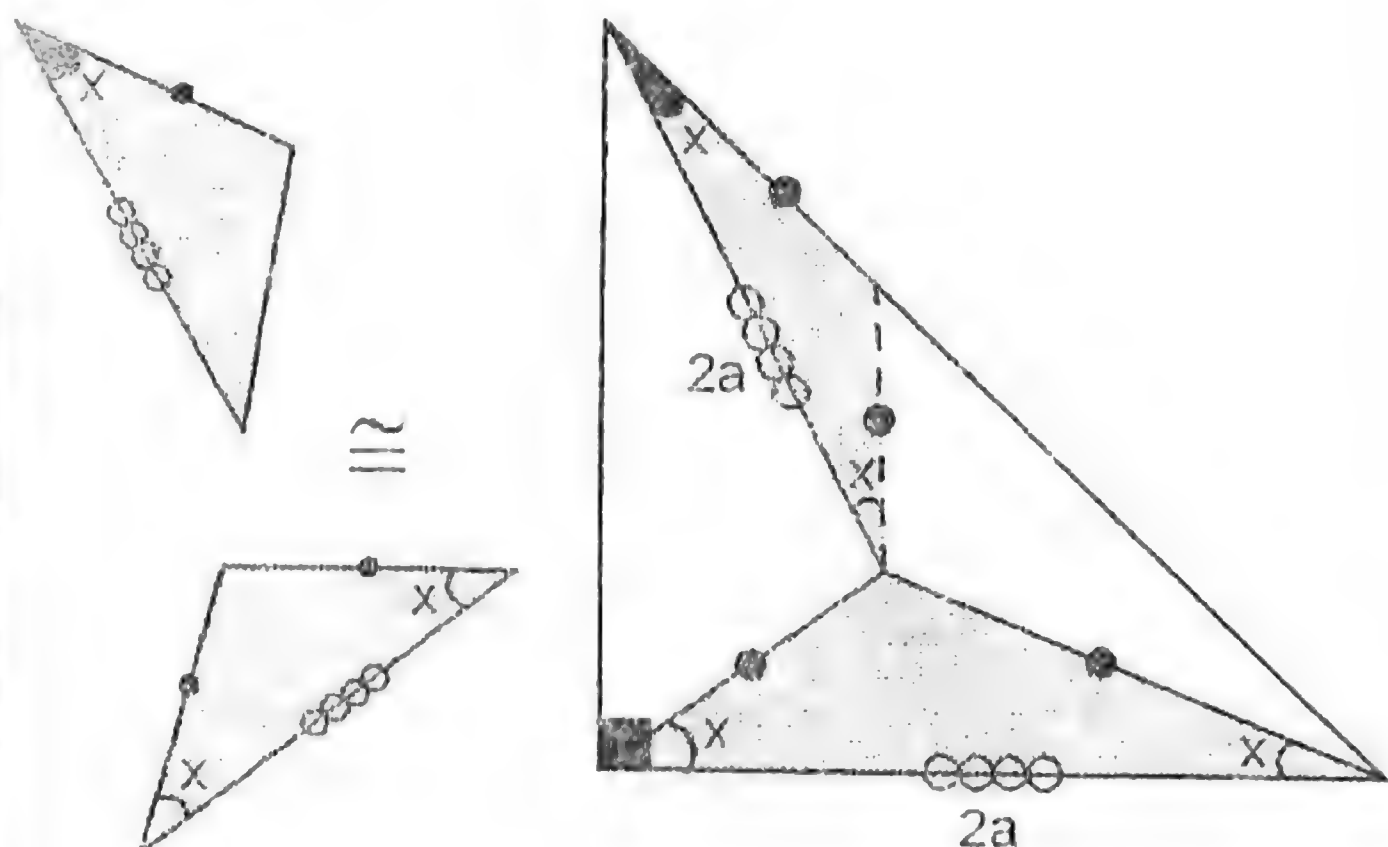
Solución N° 40

De la figura se observa:



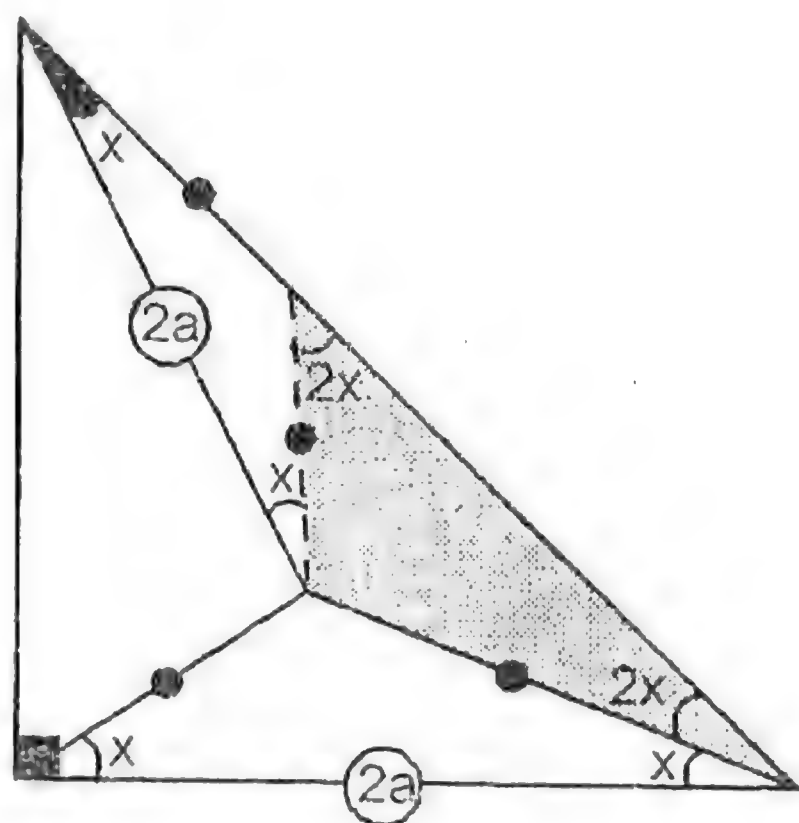
Paso N° 1:

Realizando el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente manera. Caso (L.A.L.)



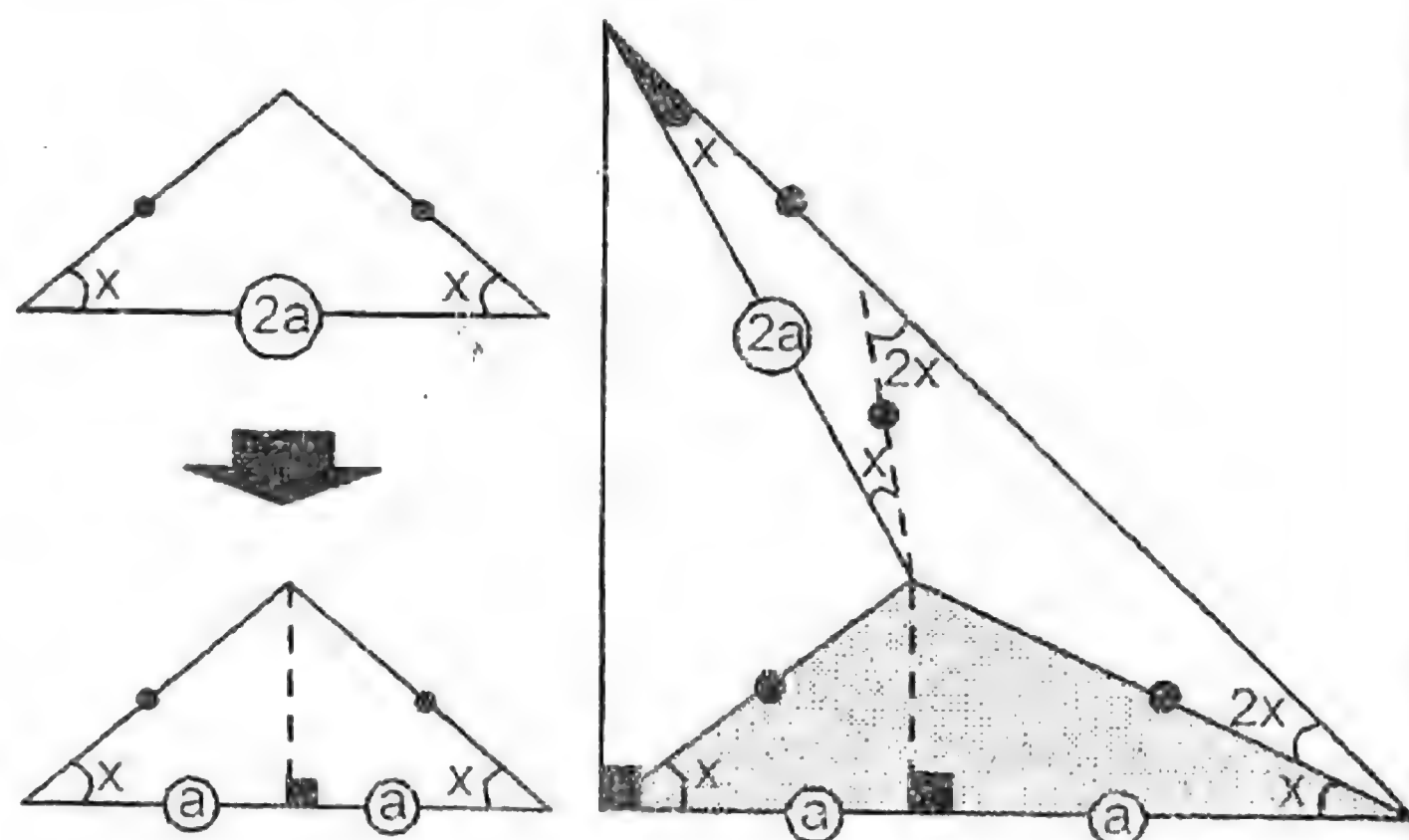
Paso N° 2:

Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



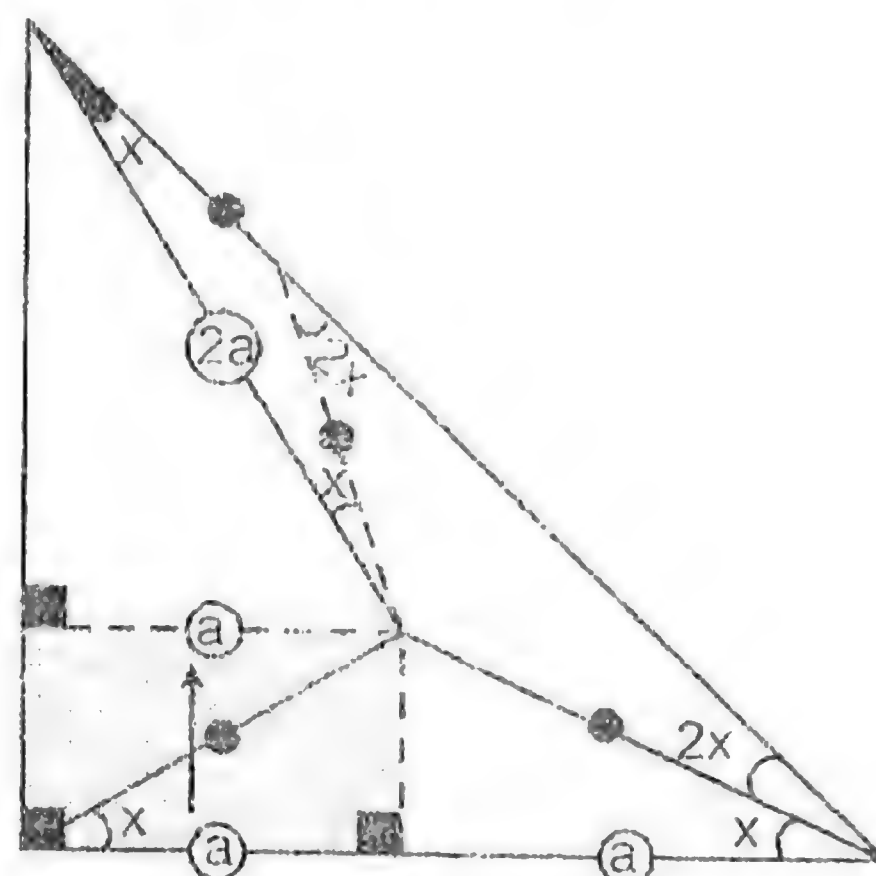
Paso N° 3:

Se observa en el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



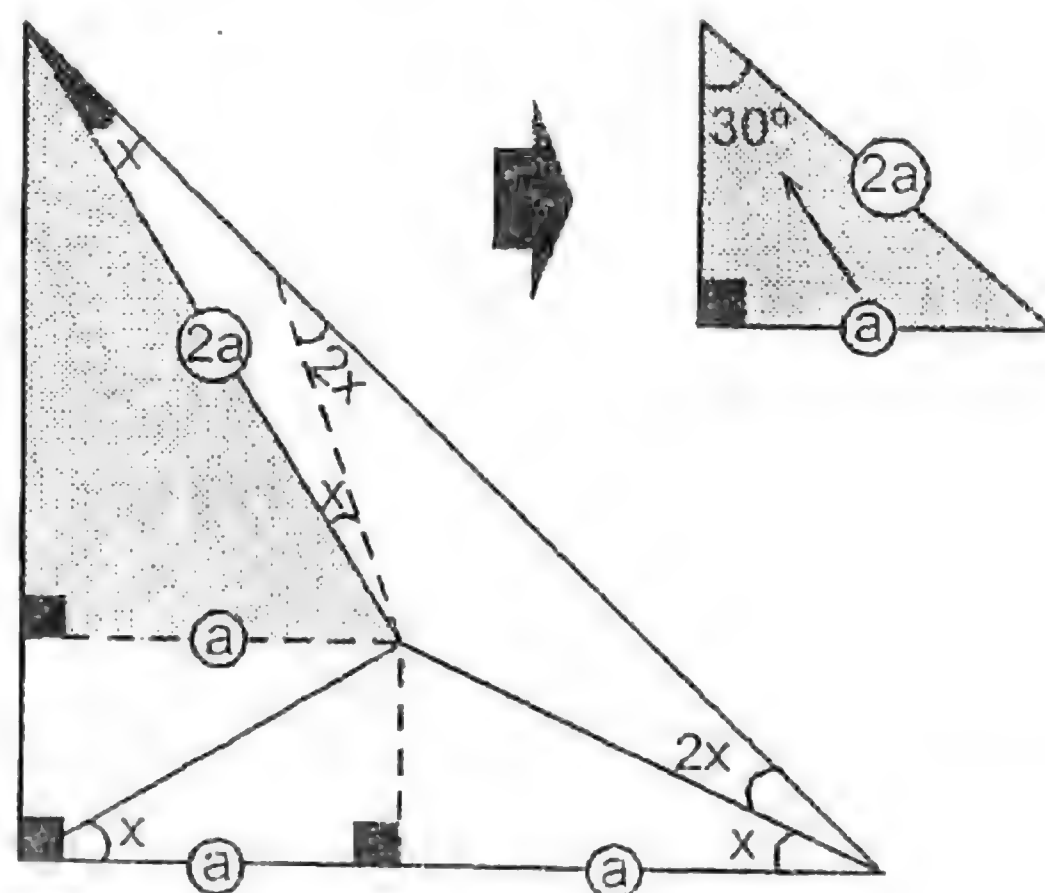
Paso N° 4:

Ahora hacemos el siguiente trazo.

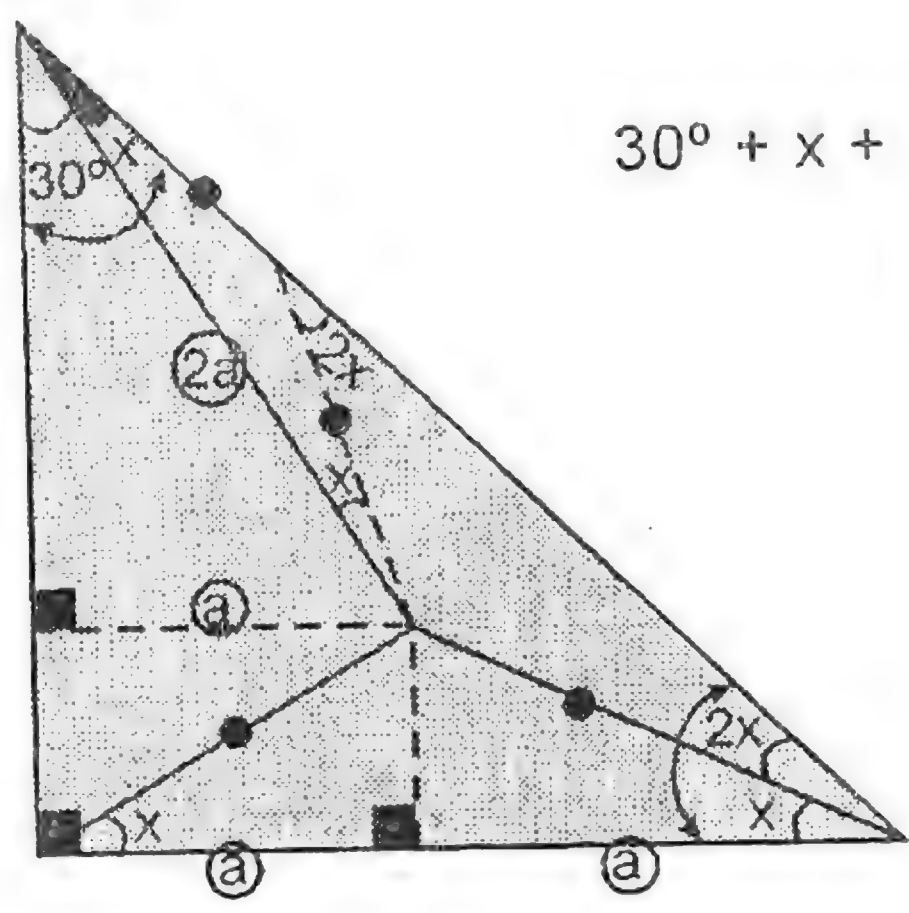


Paso N° 5:

Con el trazo anterior se obtiene un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)



De la figura total se obtiene:



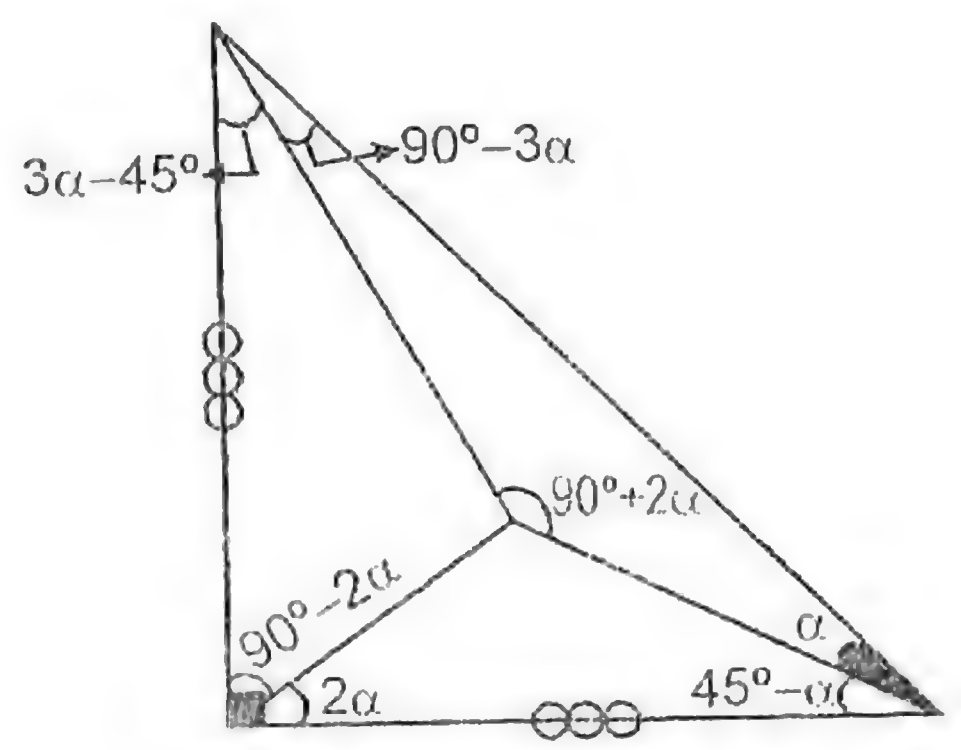
$$30^\circ + x + 3x = 90^\circ$$

$$4x = 60^\circ$$

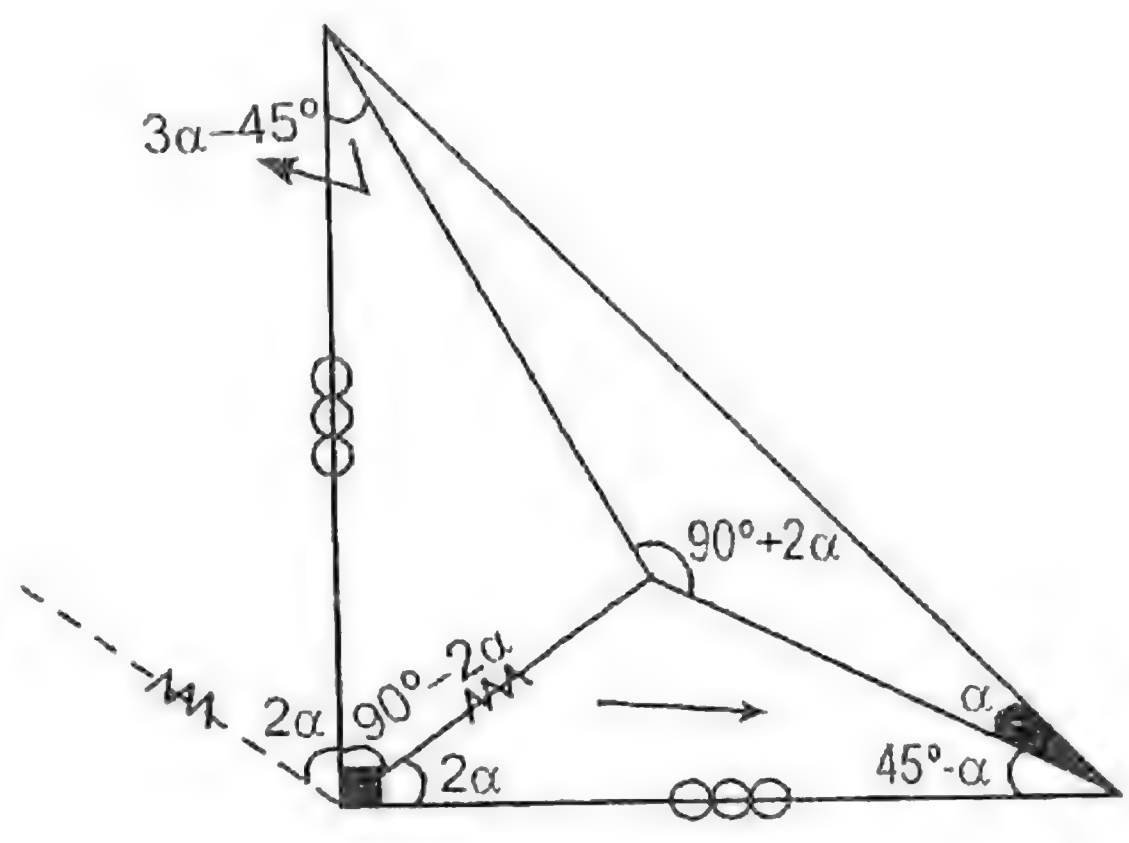
$$x = 15^\circ$$

Solución N° 41

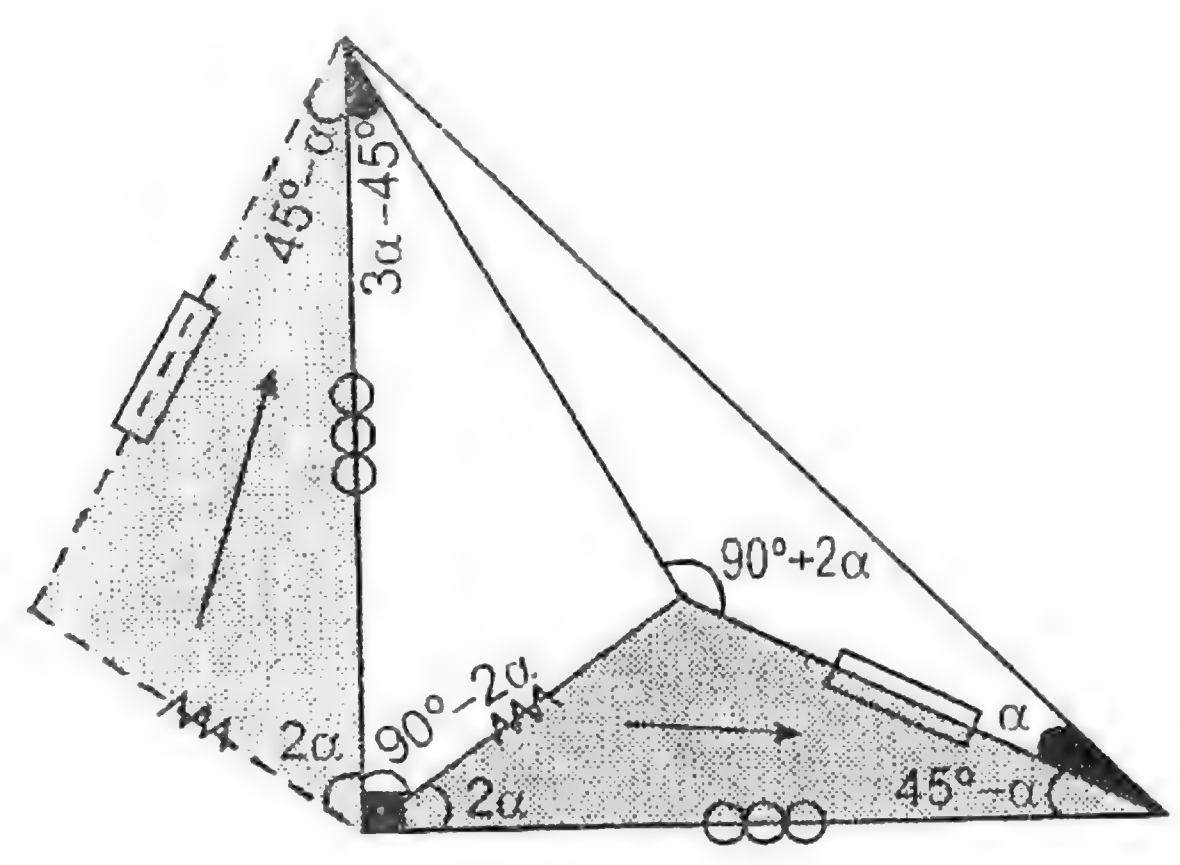
En la figura completamos los ángulos internos.



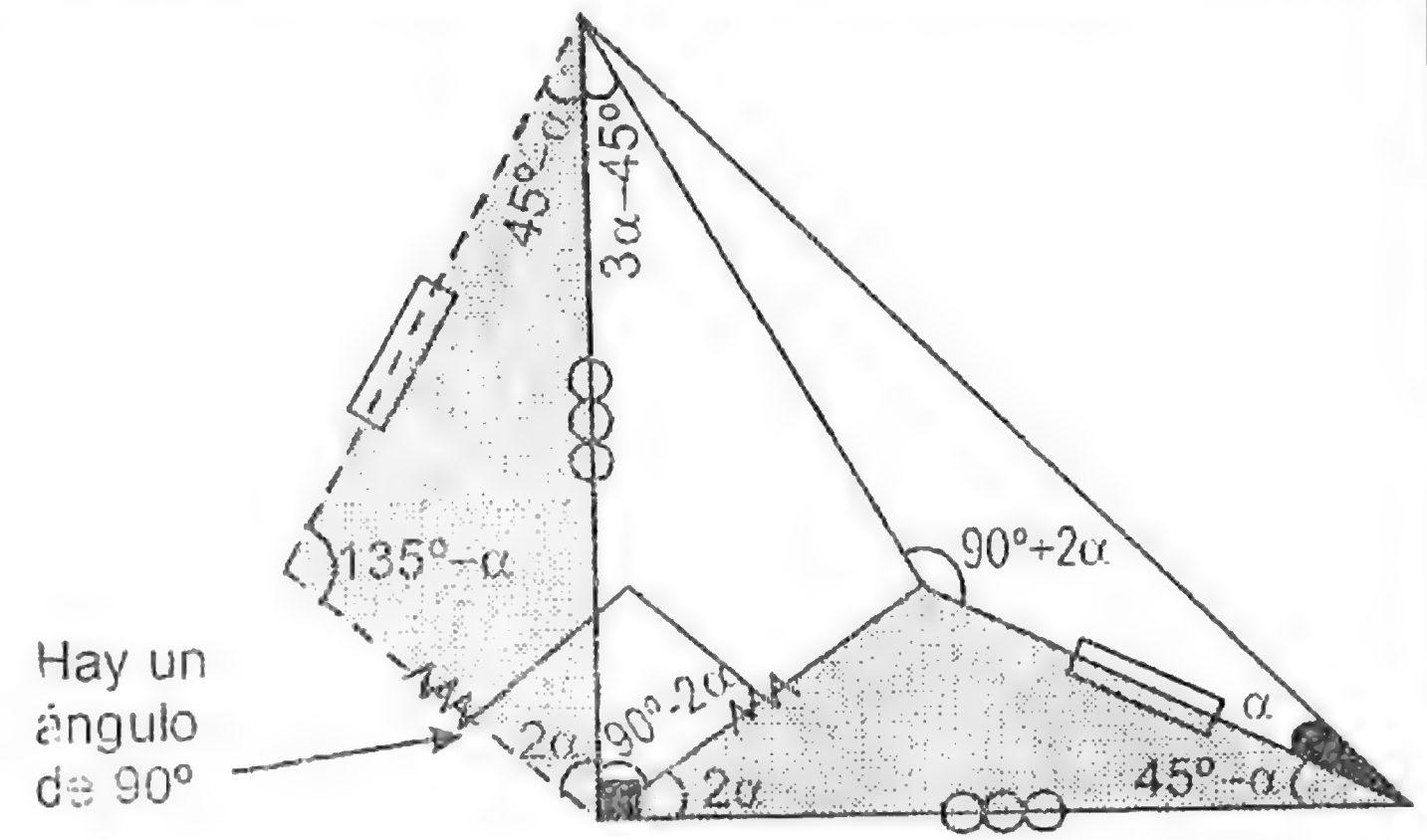
Paso N° 1: Observamos que tenemos dos lados iguales, entonces tratemos de buscar triángulos congruentes, aplicando el quinto criterio de construcción.



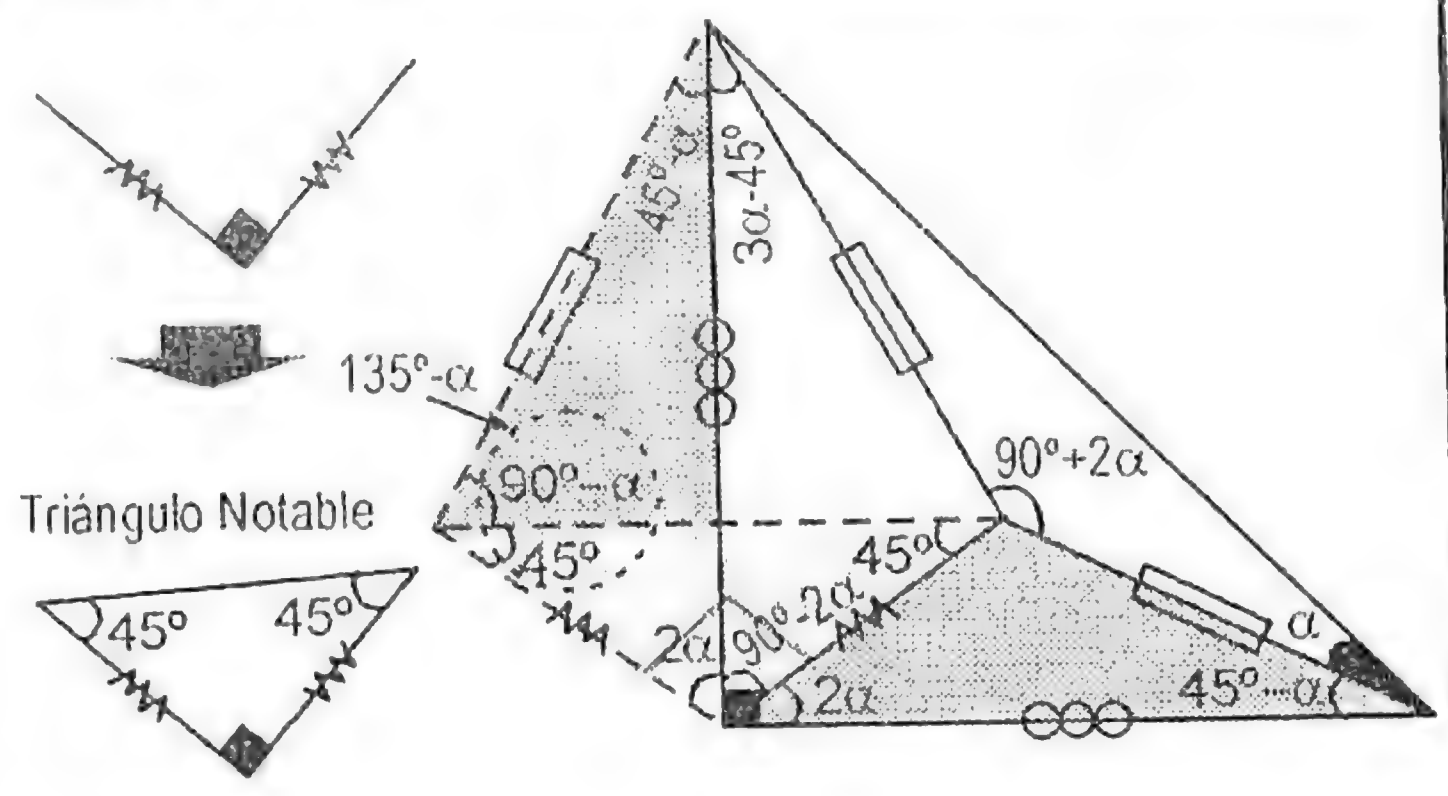
Paso N° 2: Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



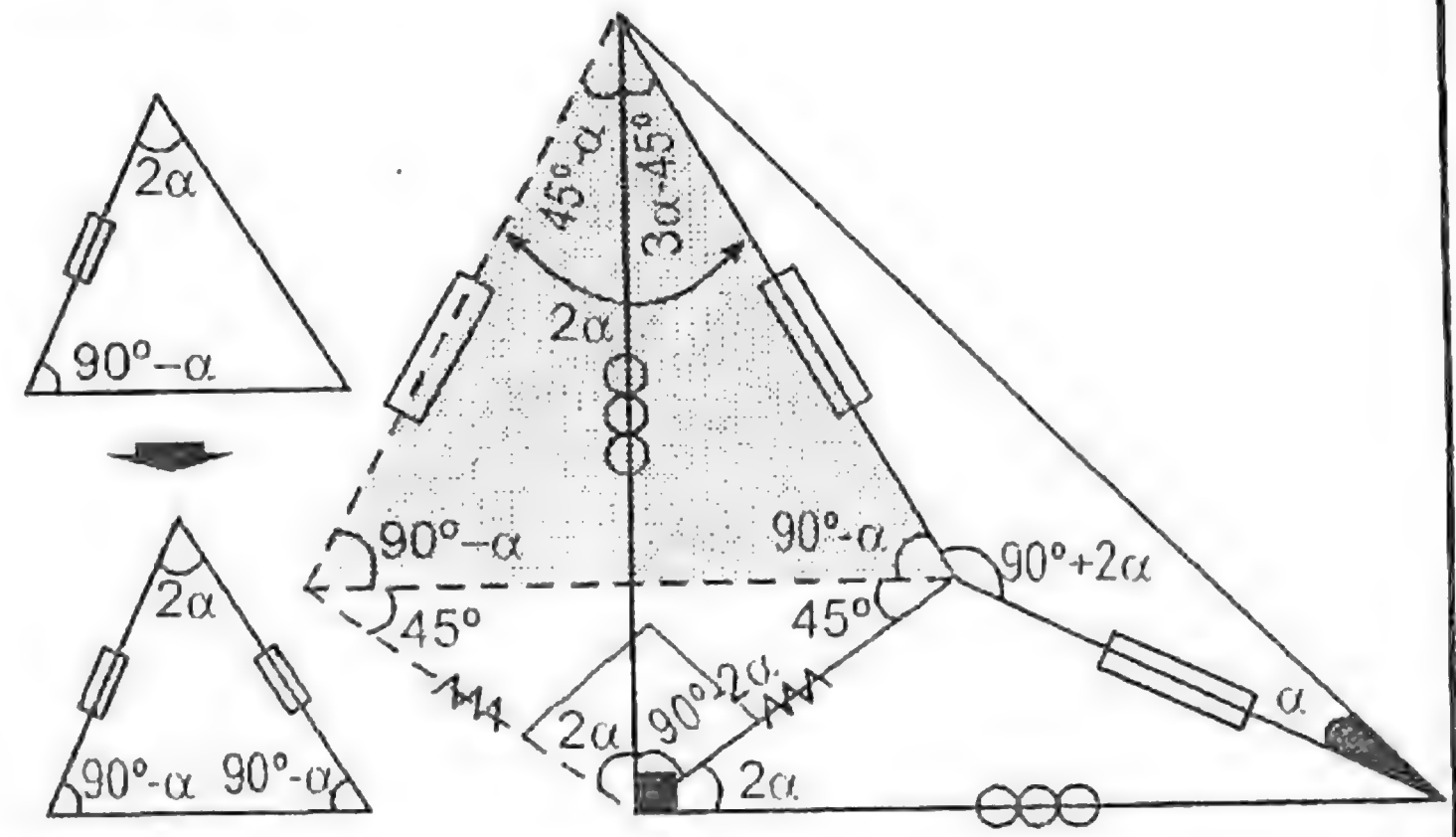
Paso N° 3: Ahora observamos en la figura que se cumple:



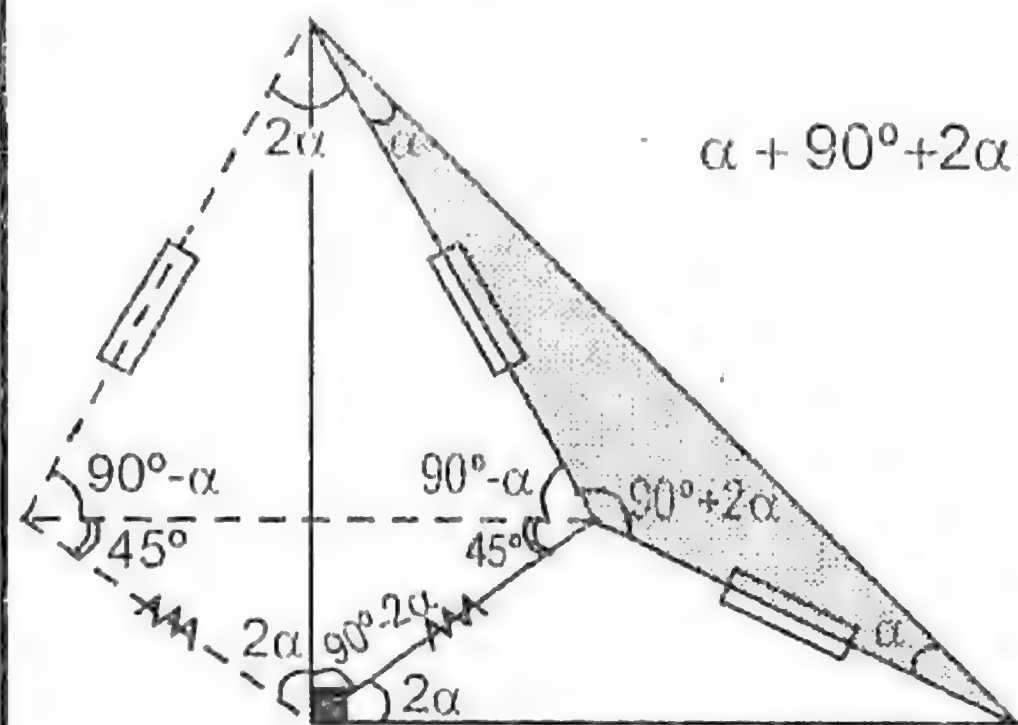
Paso N° 4: También se observa que se obtiene:



Paso N° 5: Realizado el paso anterior obtiene un triángulo isósceles con la siguiente característica.



Paso N° 6: Finalmente un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



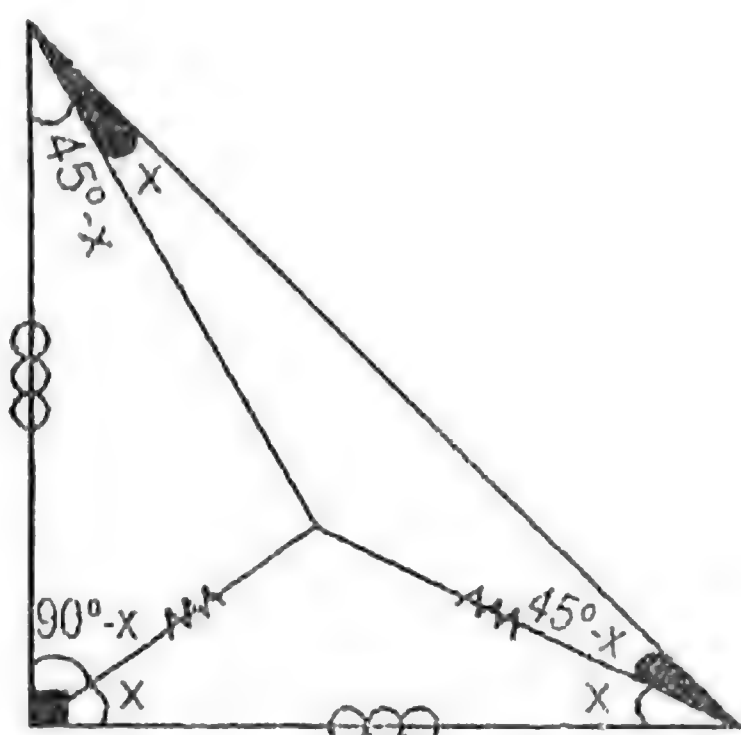
$$\alpha + 90^\circ + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$4\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 22^\circ 30'$$

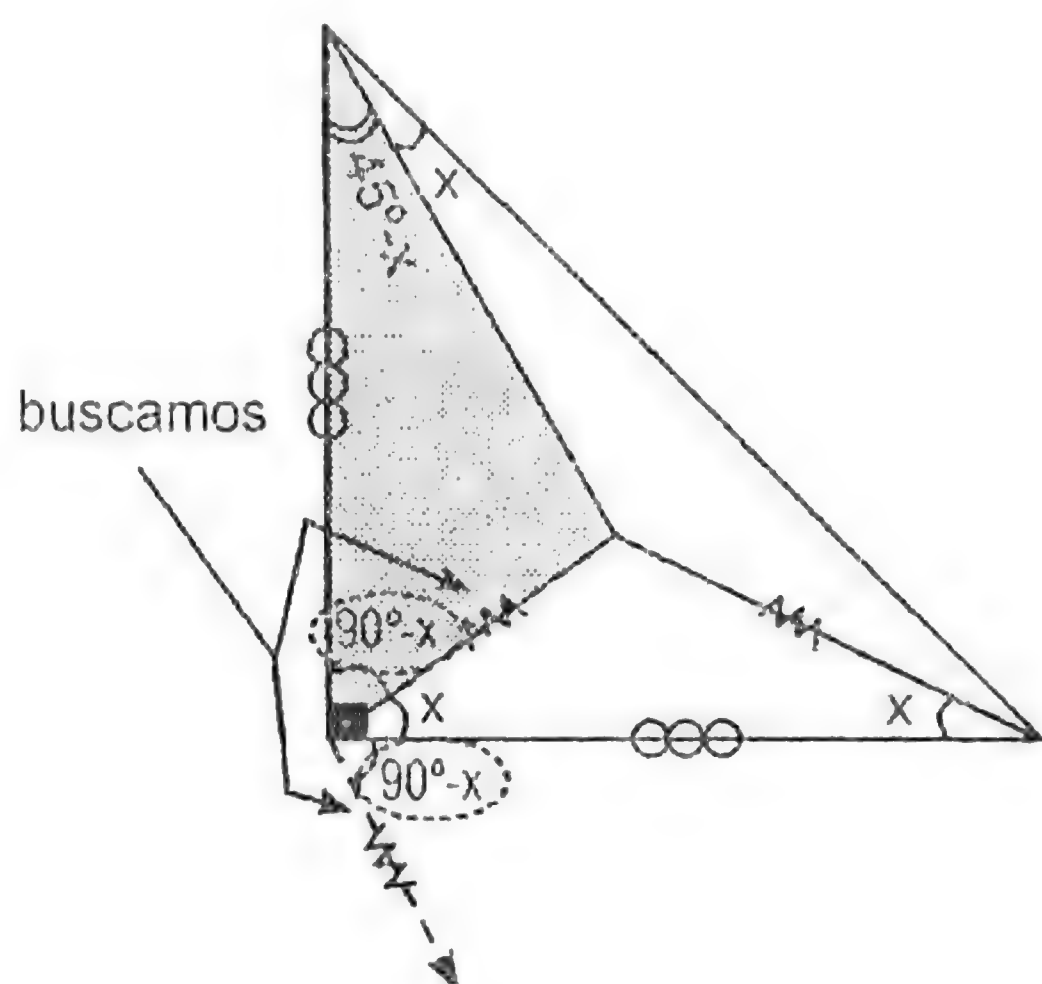
Solución N° 42

En la figura completamos los ángulos internos



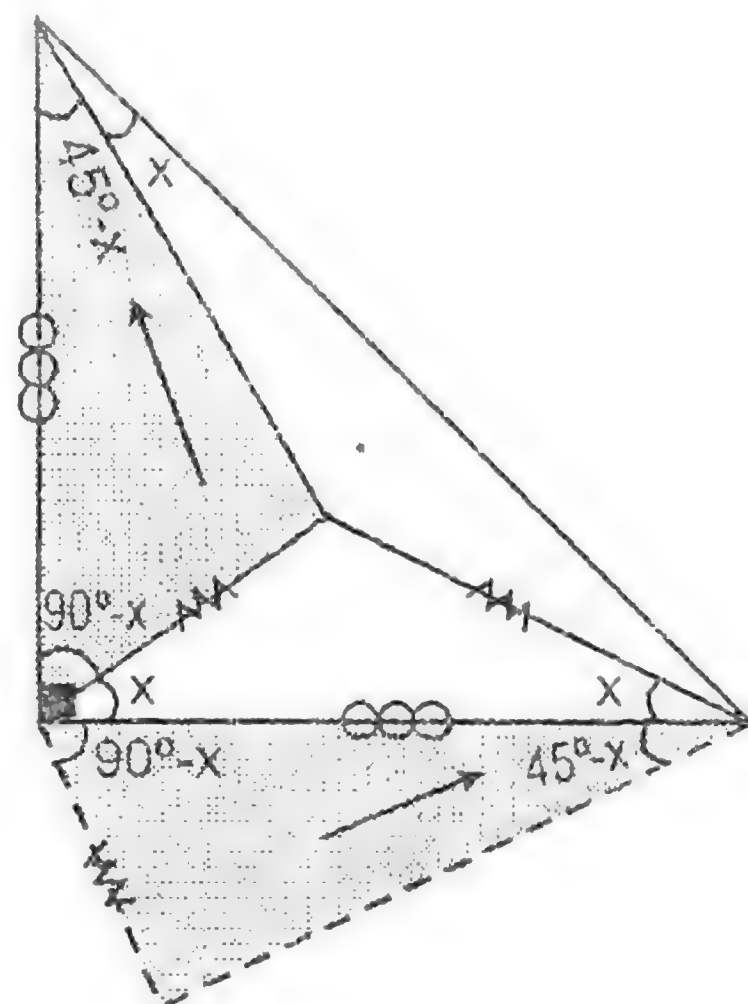
Paso N° 1:

Se observa que se tiene dos lados iguales, entonces buscaremos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.



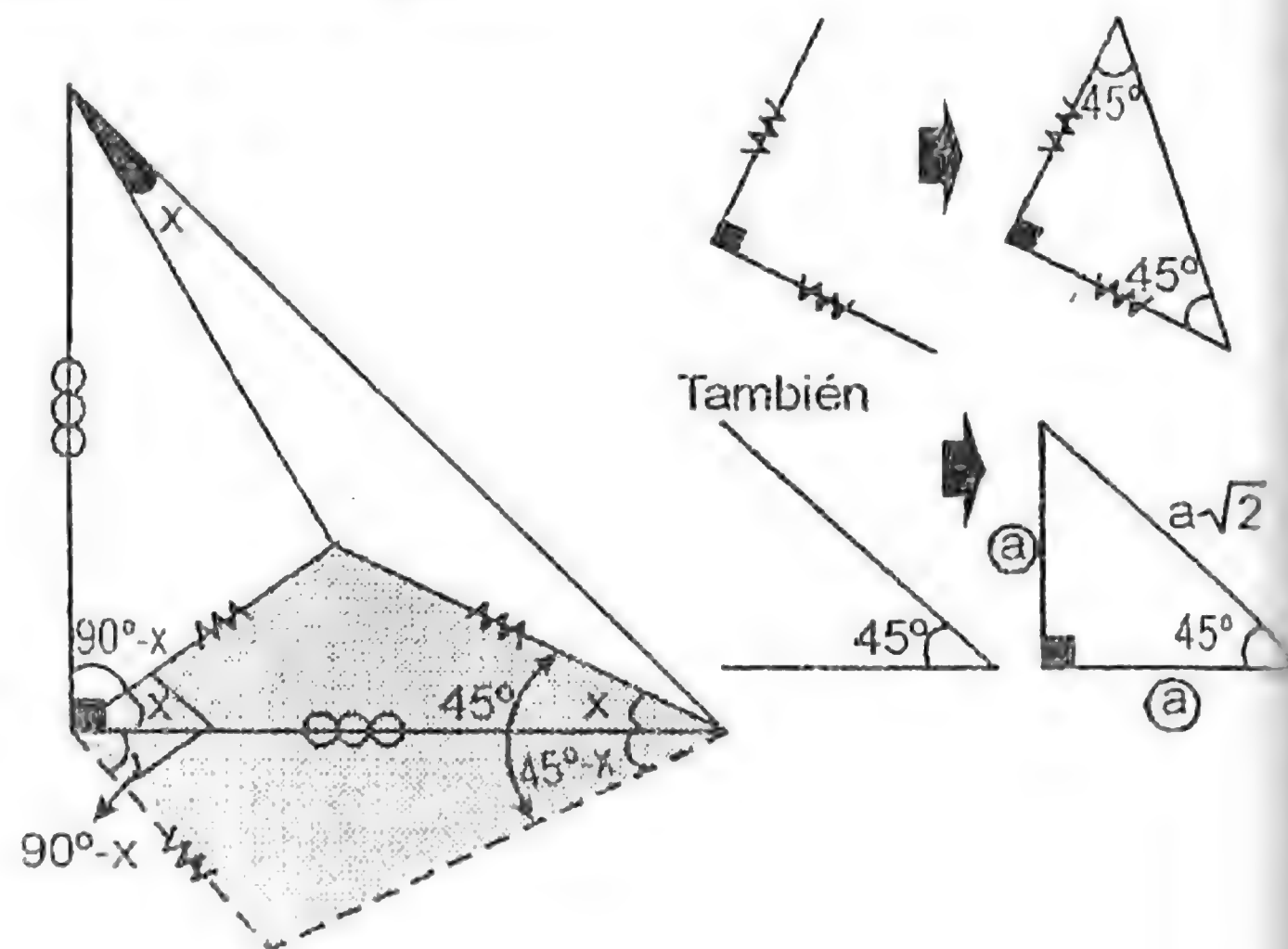
Paso N° 2: Con el trazo anterior se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)

* Realizado el paso anterior, en la figura se obtiene:



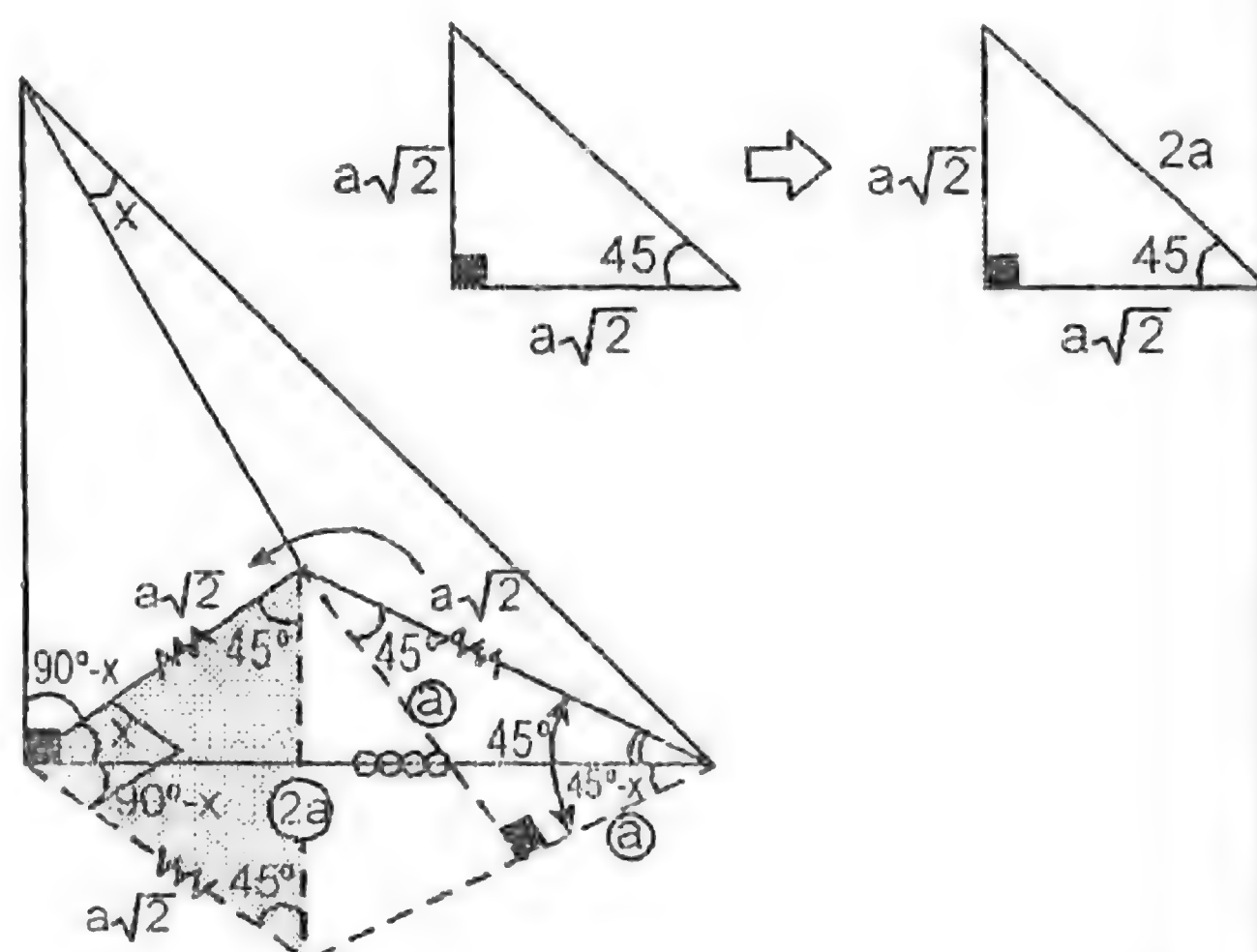
Paso N° 3:

Ahora se observa en la figura que tenemos los siguientes ángulos:



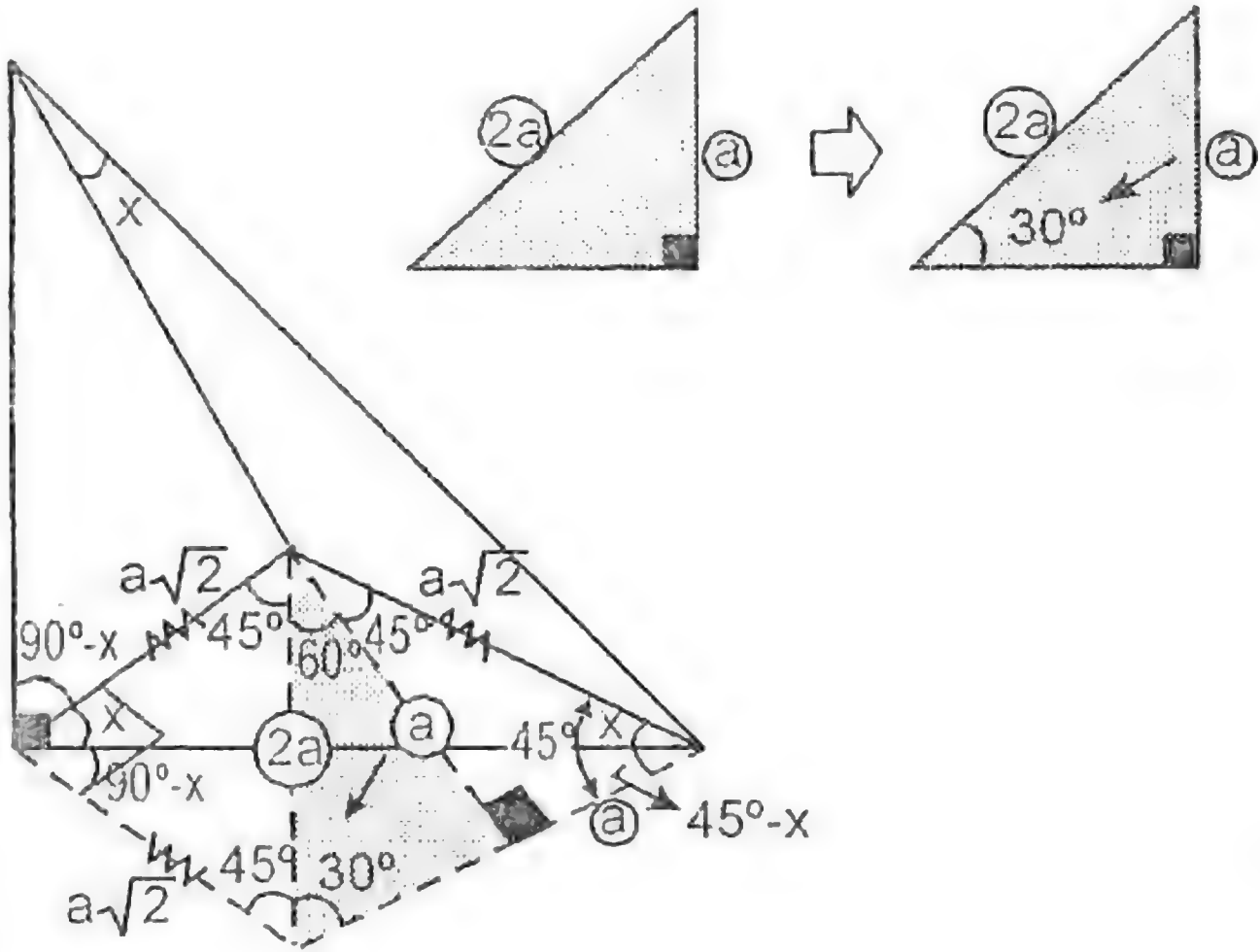
Paso N° 4:

Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables de 45° de la siguiente manera:



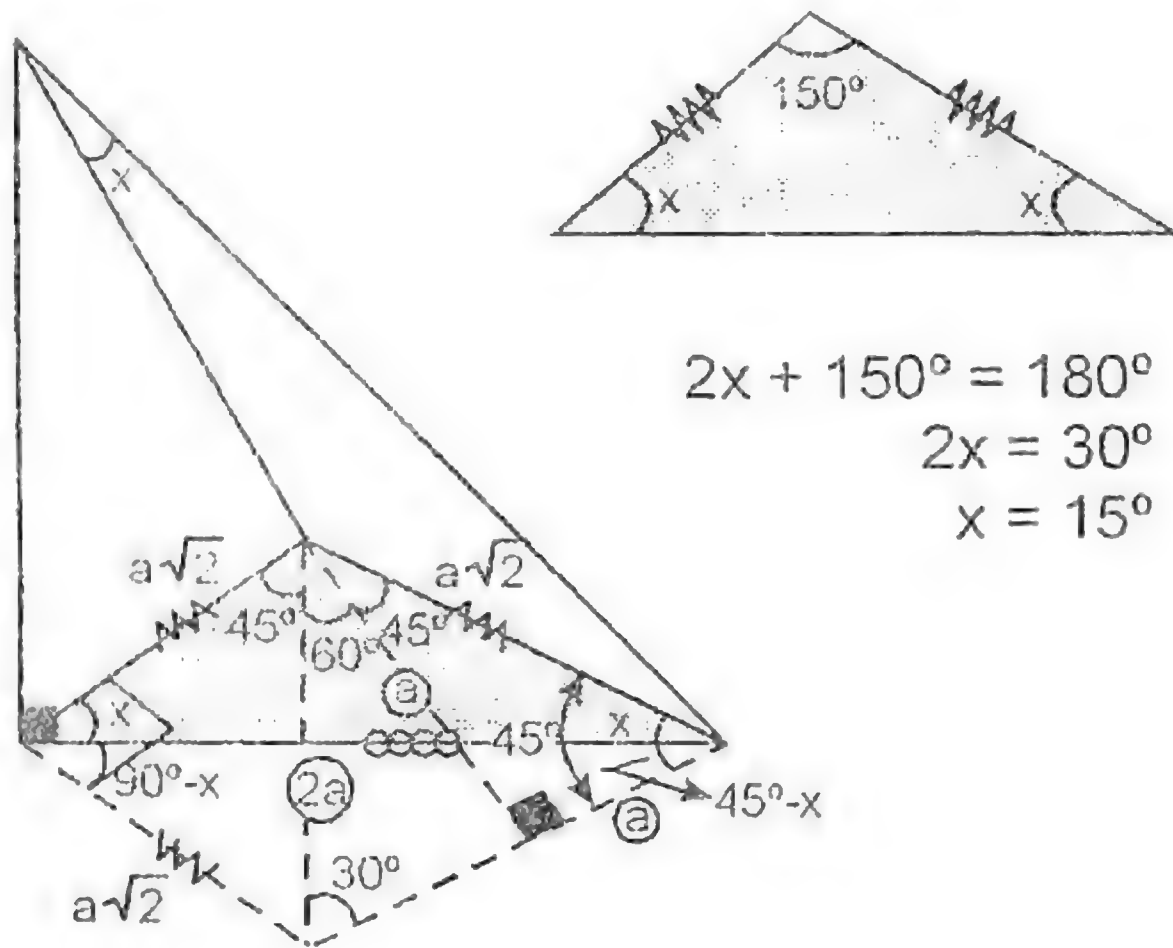
Paso N° 5:

Ahora en la figura se observa que se obtiene otro triángulo notable de (30° y 60°)



Paso N° 6:

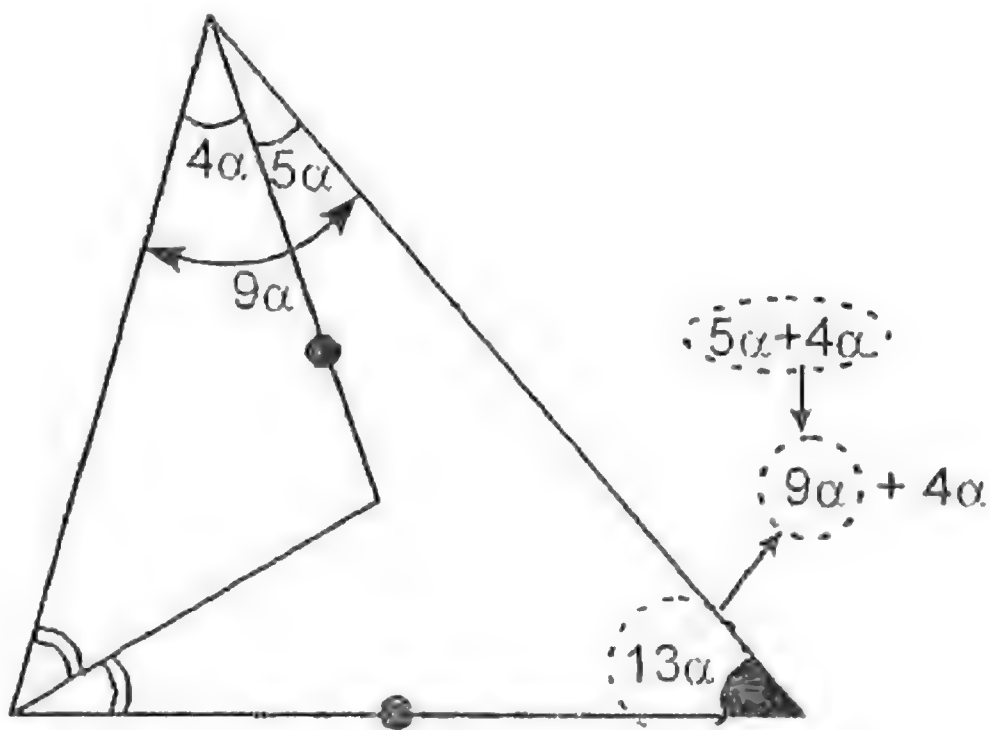
Finalmente se obtiene el siguiente triángulo isósceles.



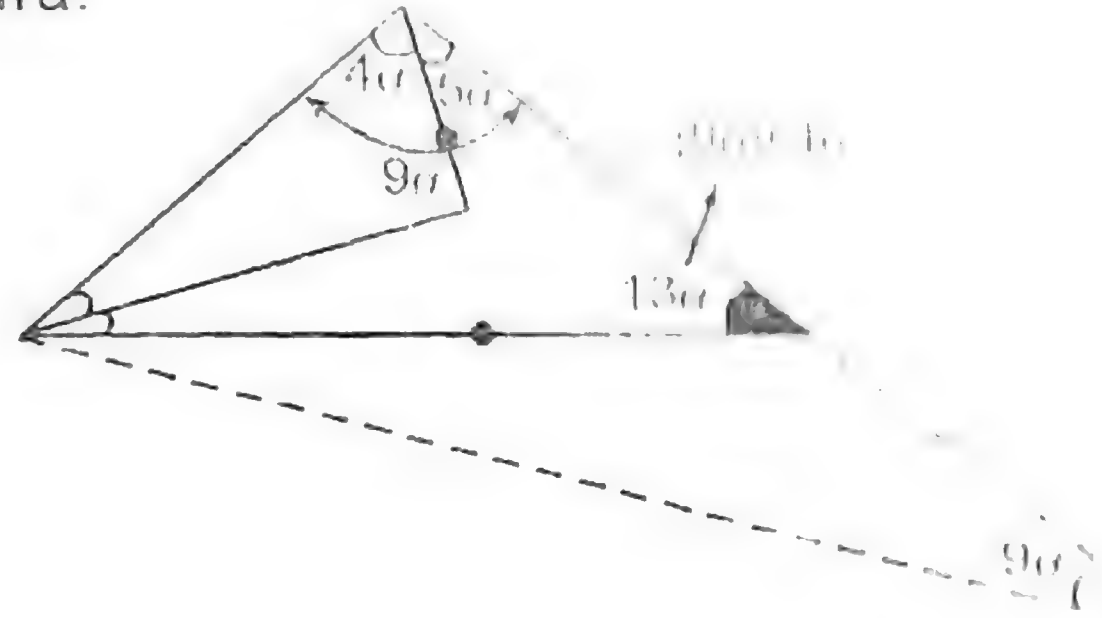
$$\begin{aligned} 2x + 150^\circ &= 180^\circ \\ 2x &= 30^\circ \\ x &= 15^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 43

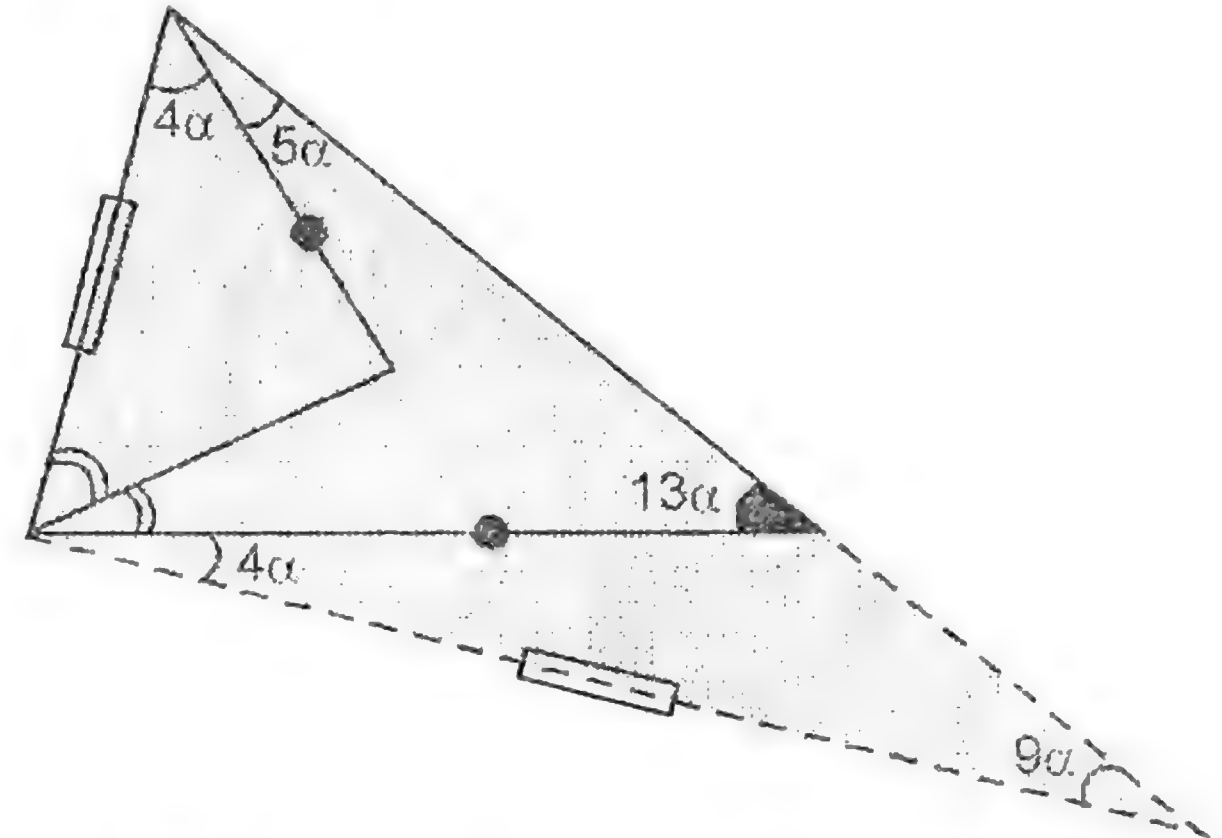
En la figura se observa:



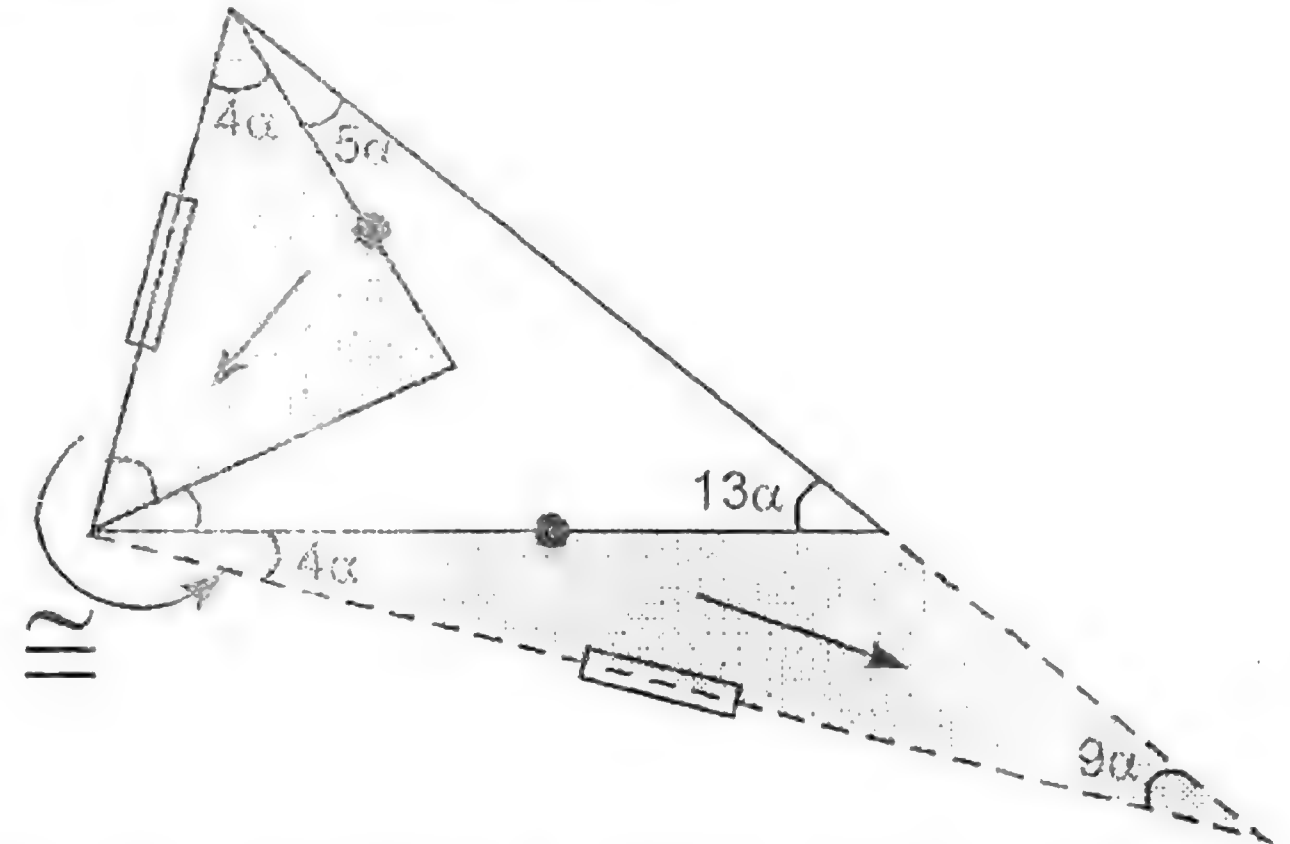
Paso N° 1: Observamos que se tiene dos lados iguales, entonces, tratamos de formar triángulos congruentes realizando un trazo exterior a la figura.



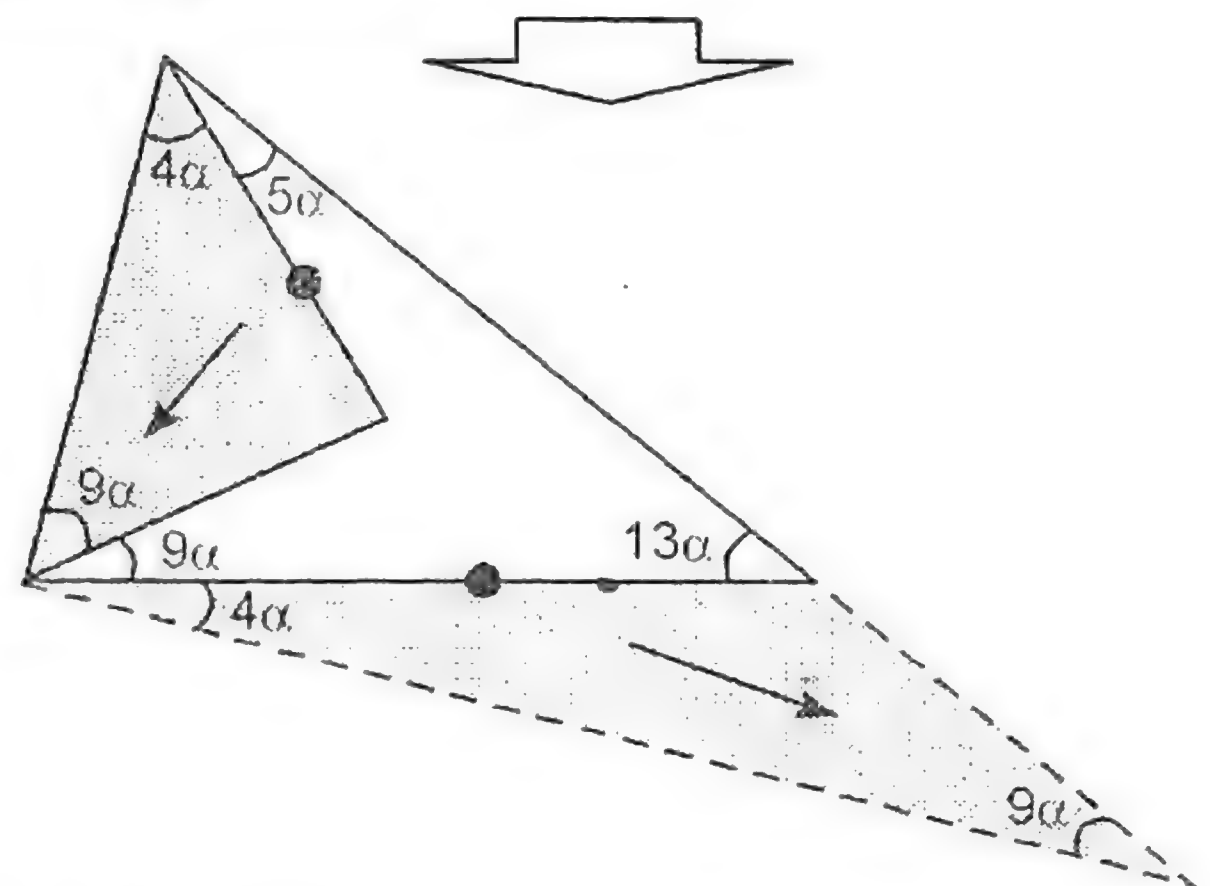
Buscando un triángulo isósceles para encontrar triángulos congruentes.



Paso N° 2: Se obtienen dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)

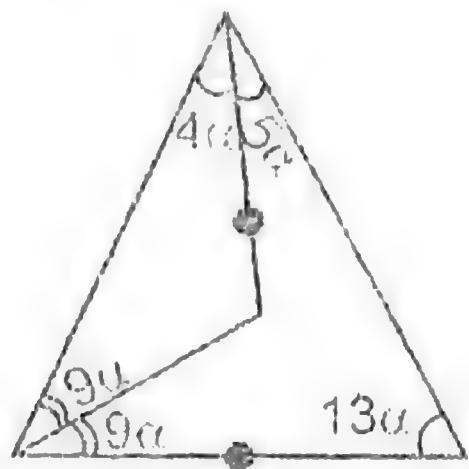


Aquí se cumple: "A lados iguales se opone ángulos iguales"



Paso N° 3:

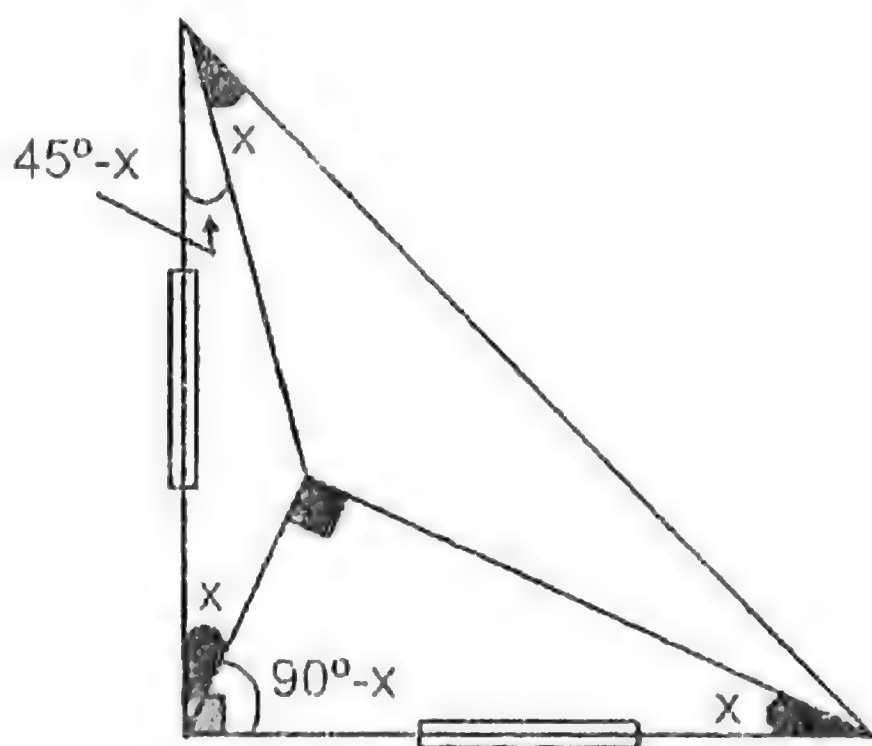
Luego en el triángulo inicial, tenemos:



$$\begin{aligned} 18\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 13\alpha &= 180^\circ \\ 40\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 4^\circ 30' \end{aligned}$$

Solución N° 44

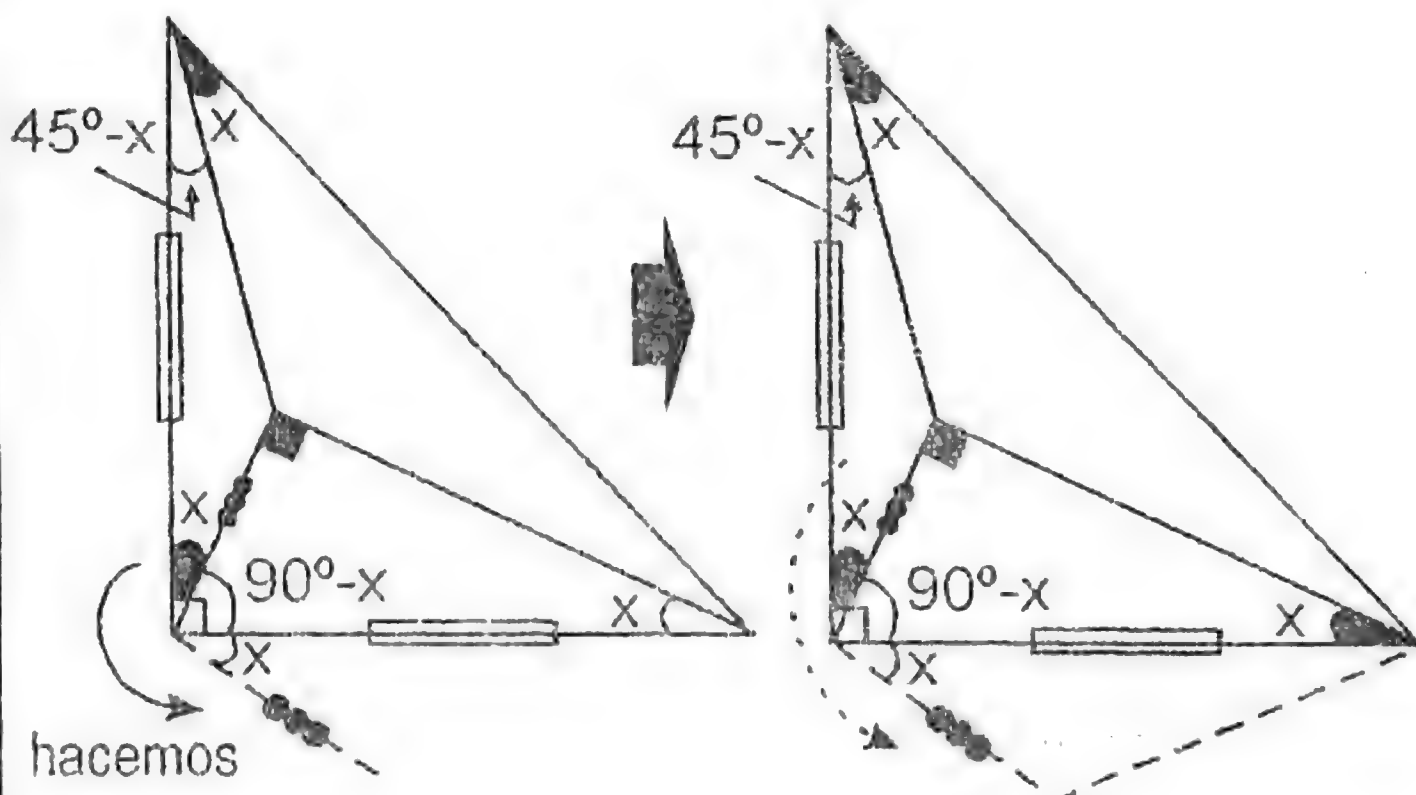
En la figura se observa



86

Paso N° 1:

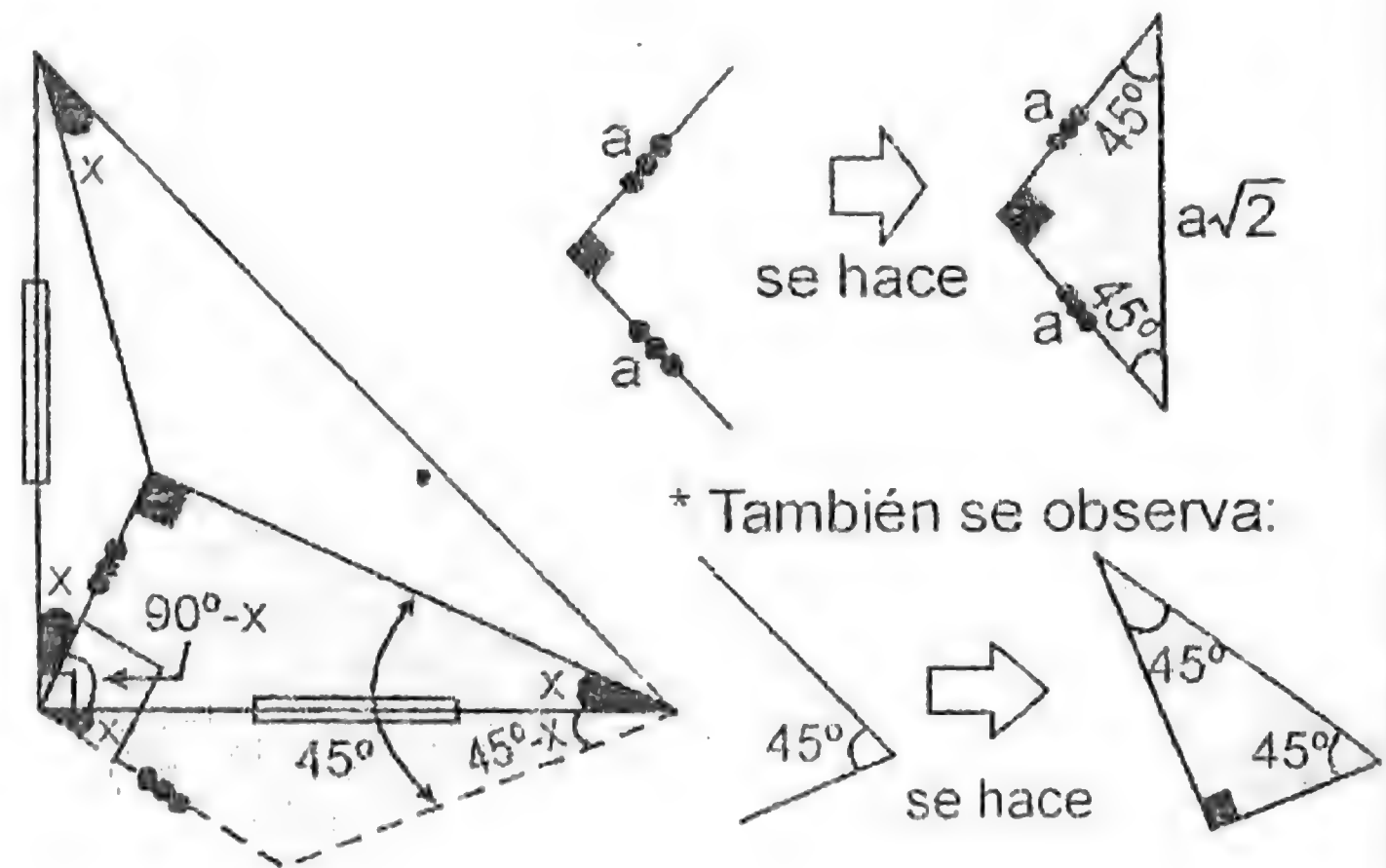
Observamos que tenemos dos lados iguales entonces buscaremos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción, de la siguiente manera:



Paso N° 2: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.), donde se cumple:

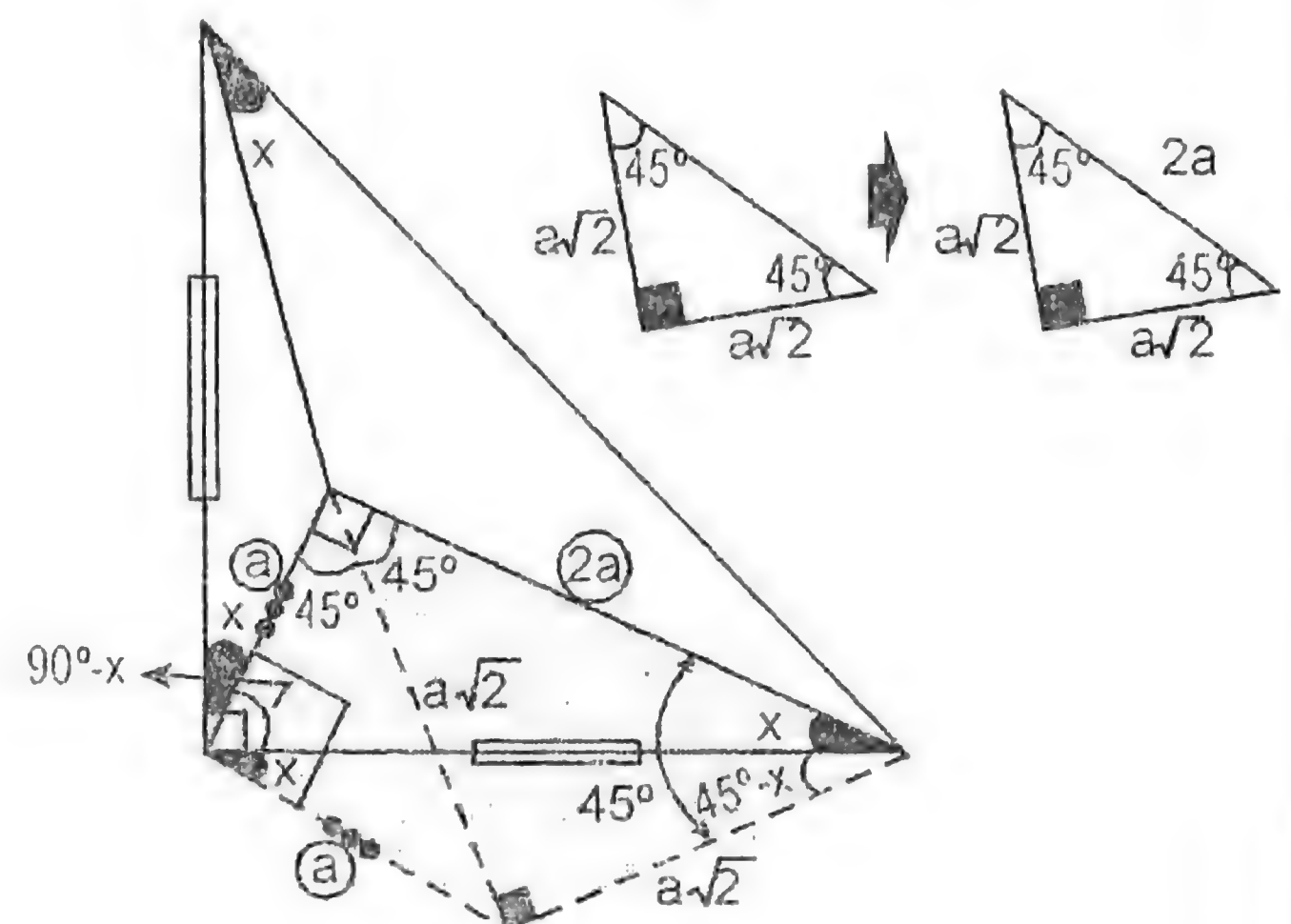
Paso N° 3:

Observamos que en la figura se tiene los siguientes ángulos:



Paso N° 4:

Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables (ver figura):



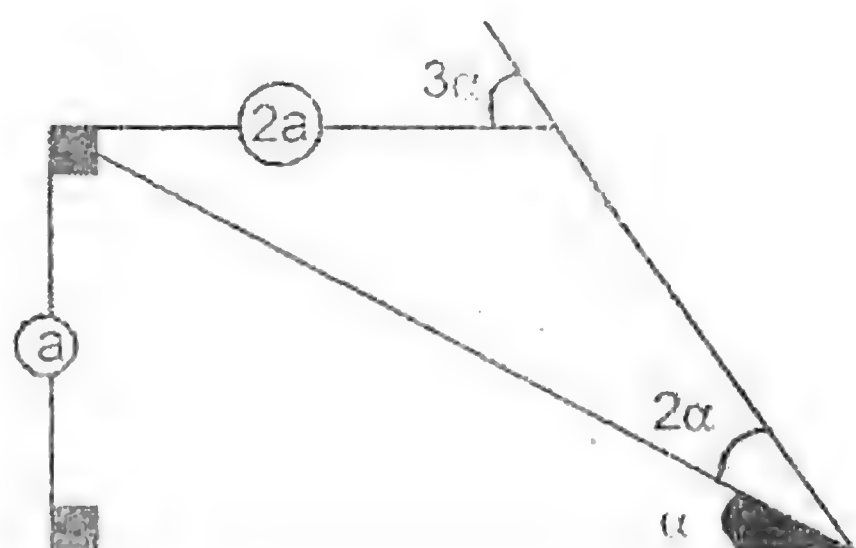
Paso N° 5:

En la figura se observa que se puede aplicar el "Cuarto criterio de construcción" de la siguiente manera:



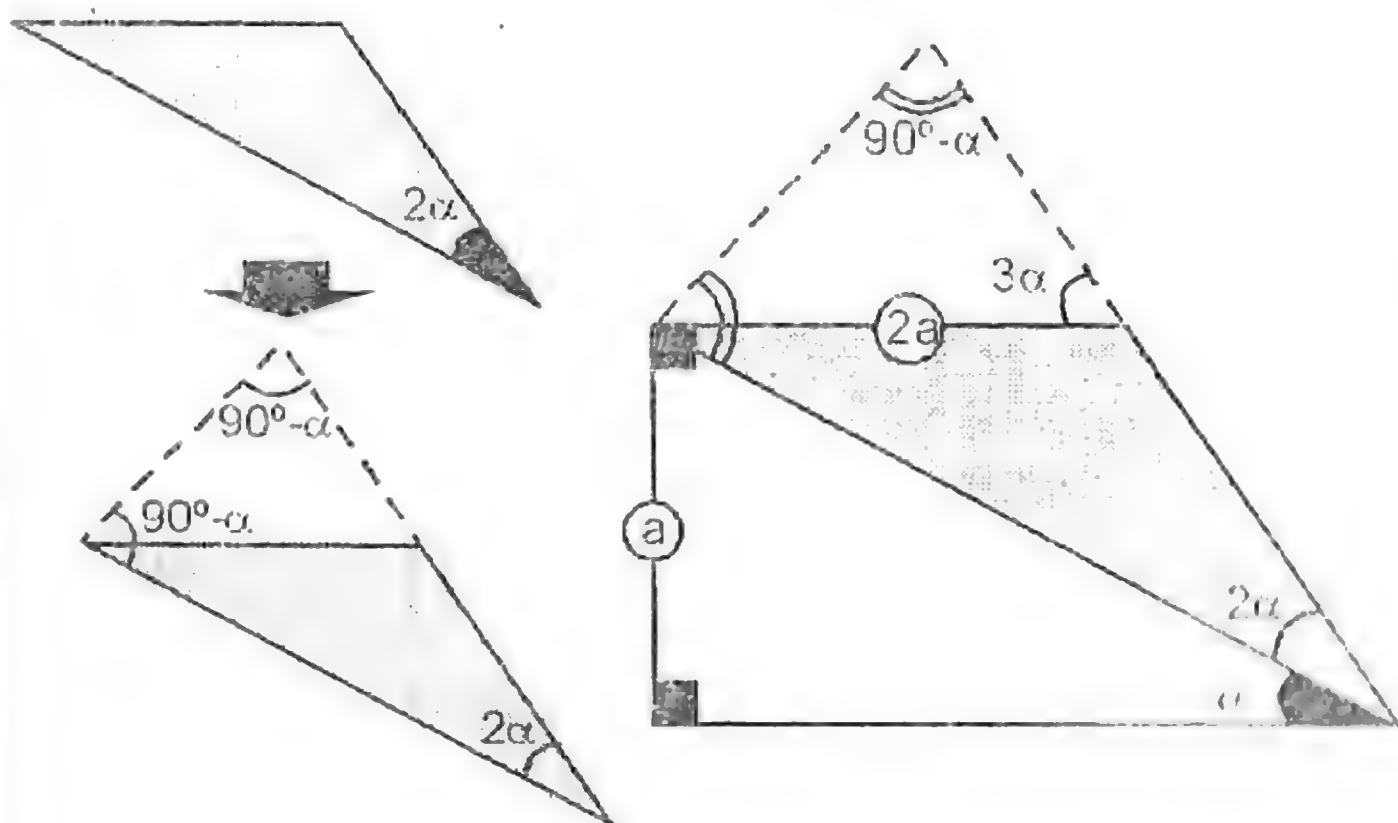
Solución N° 45

En la figura se observa que podemos aplicar el "Cuarto criterio de construcción" de la siguiente manera.



Paso N° 1:

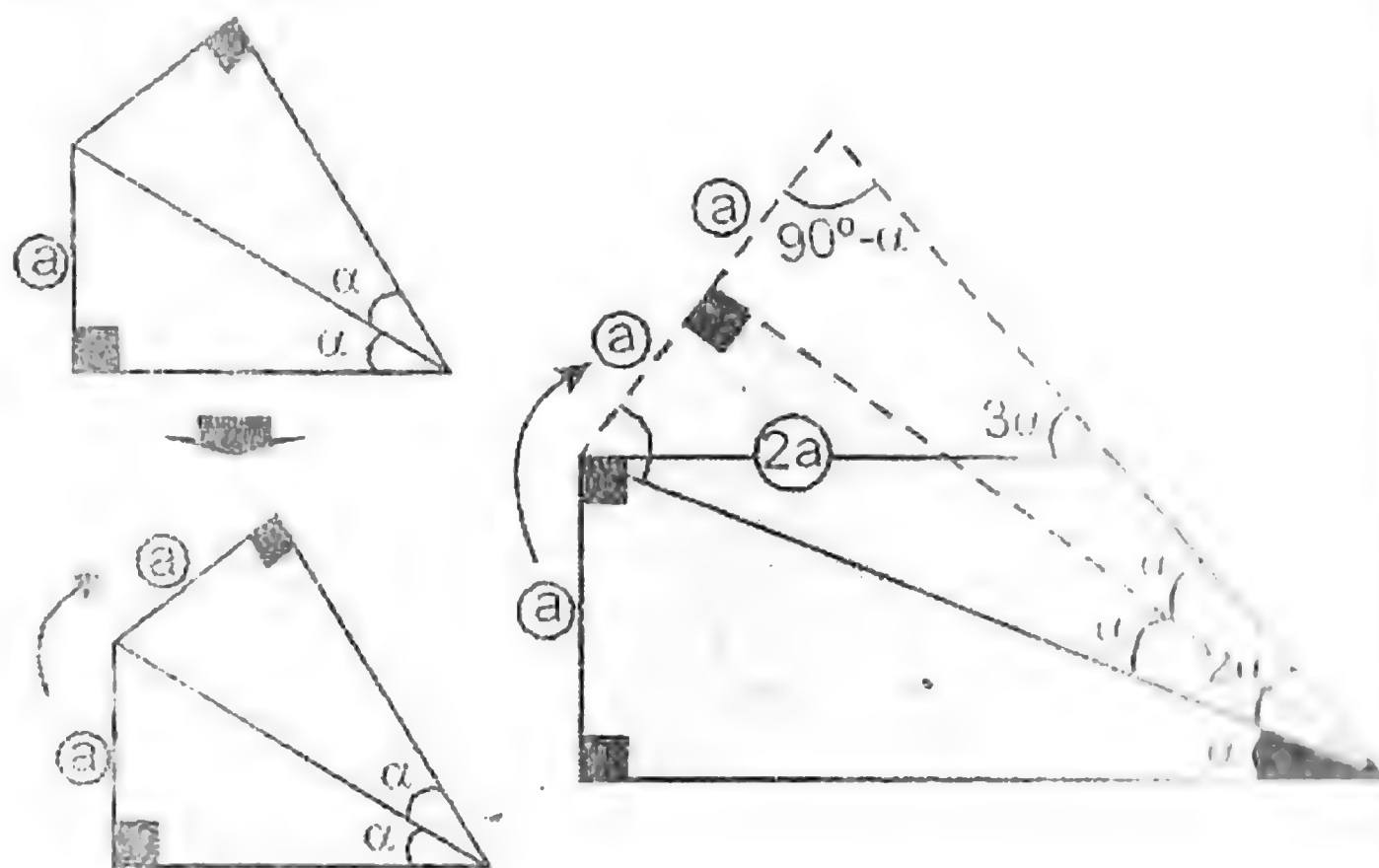
Observamos el siguiente ángulo y realizamos el siguiente trazo: Formando un triángulo isósceles.



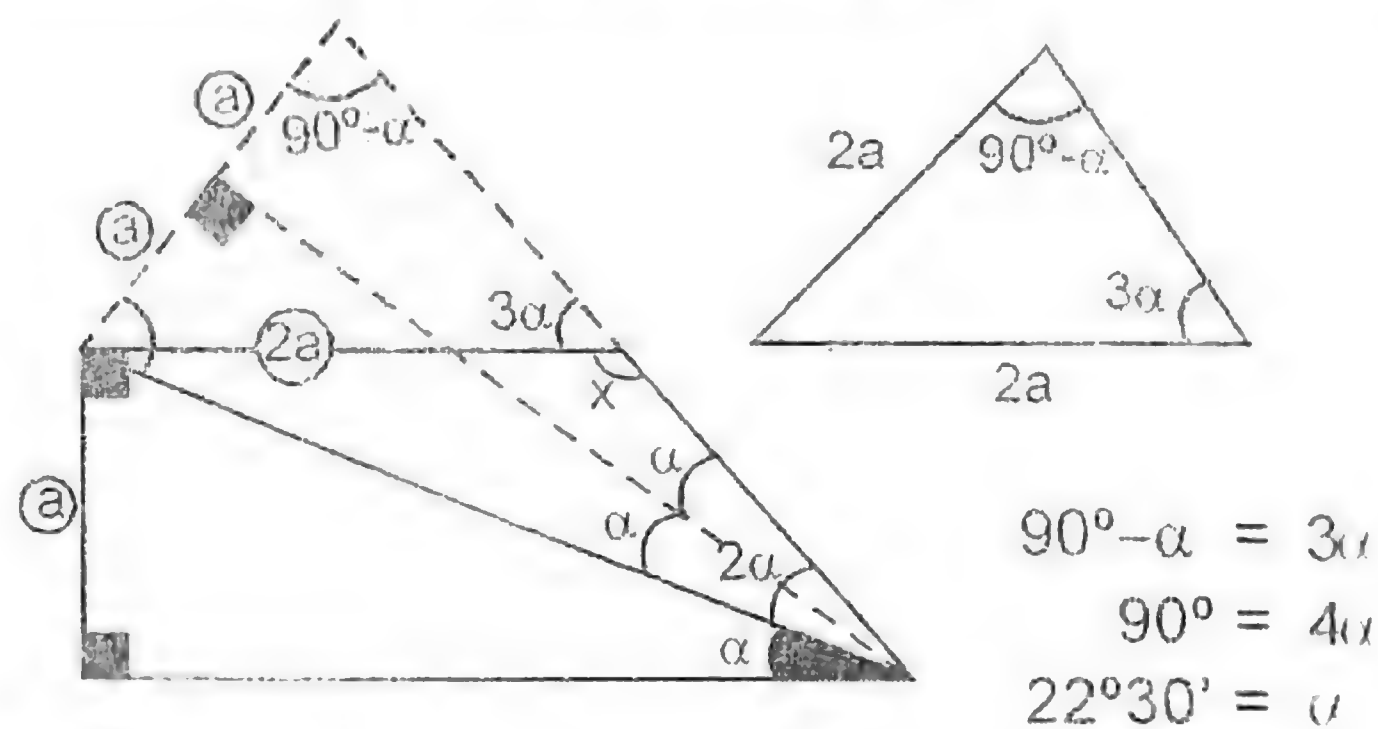
Paso N° 2:

En el triángulo isósceles formado, trazamos su altura y se obtiene:

Paso N° 3: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz.



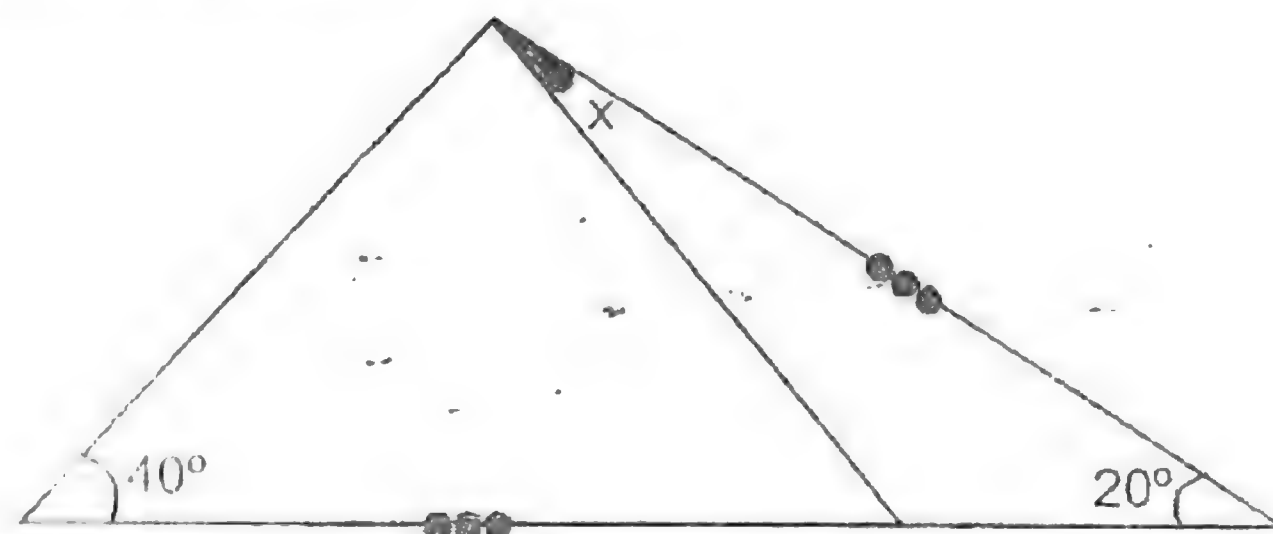
Paso N° 4: Observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo isósceles (ver figura sombreada) donde se obtiene:

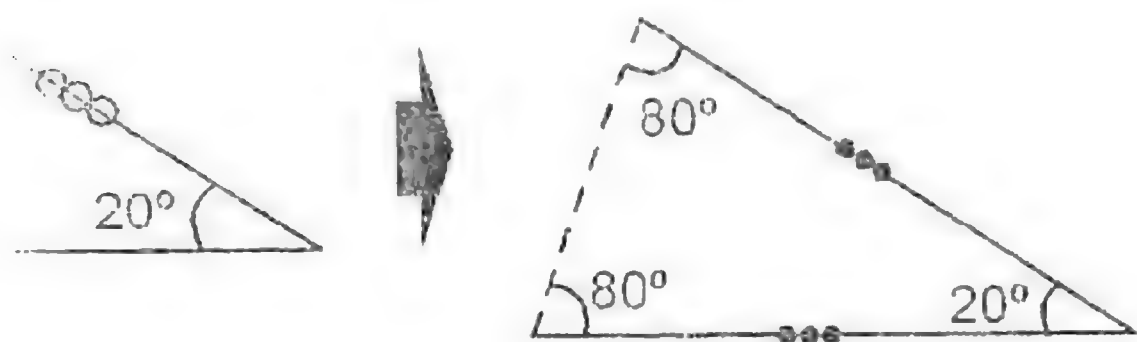


Ahora: $x + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow x = 112^\circ 30'$

Solución N° 46

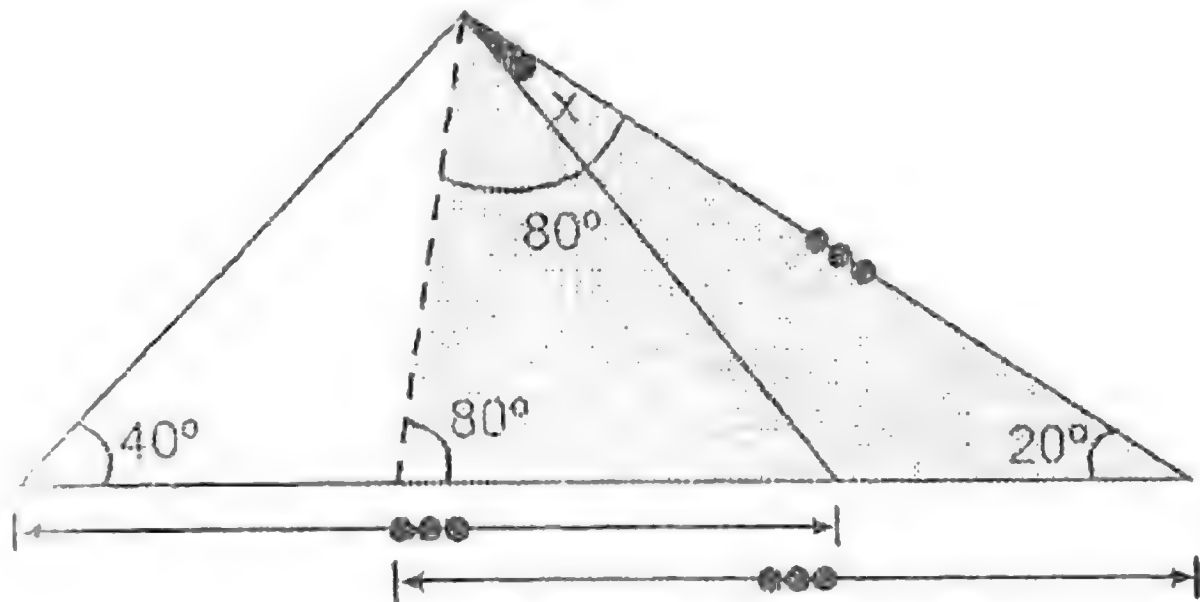
En la figura mostrada se observa que se puede obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo:



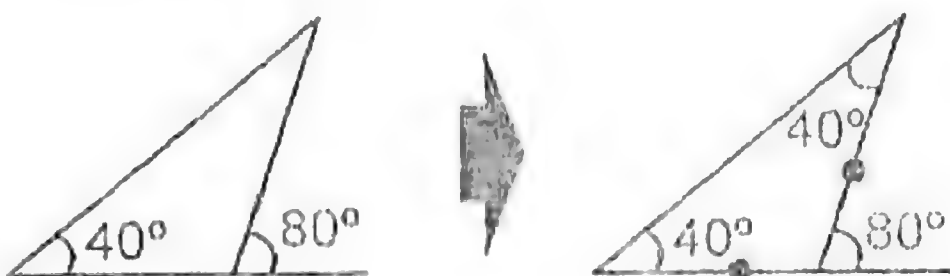


Paso N° 1:

Entonces realizamos el trazo mencionado para generar triángulos isósceles.

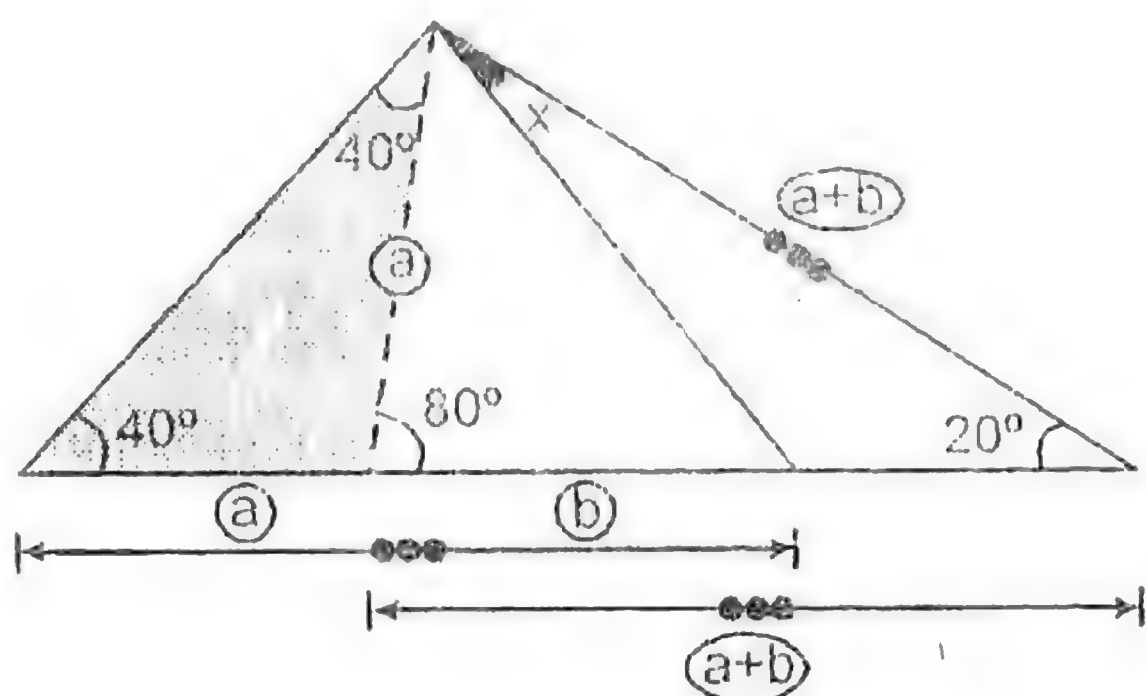


También se observa:



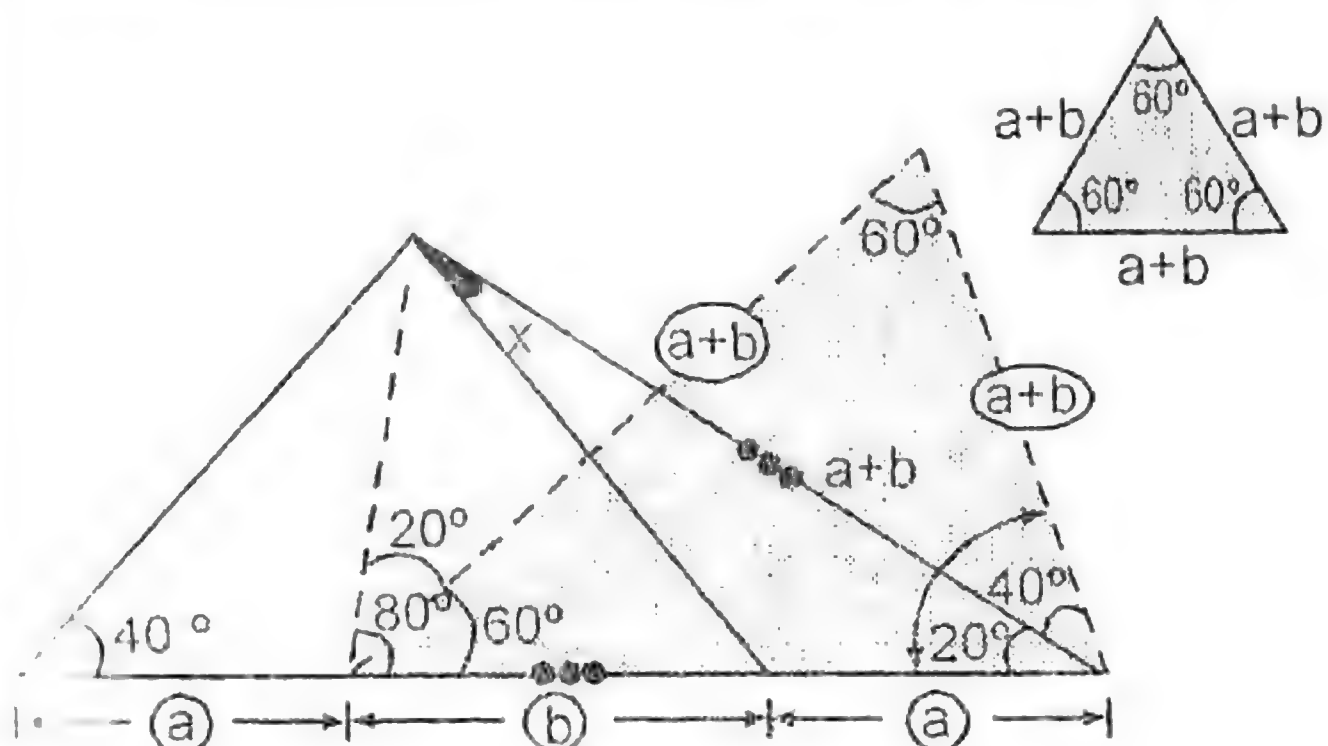
Paso N° 2:

Identificamos los lados iguales colocando variables:



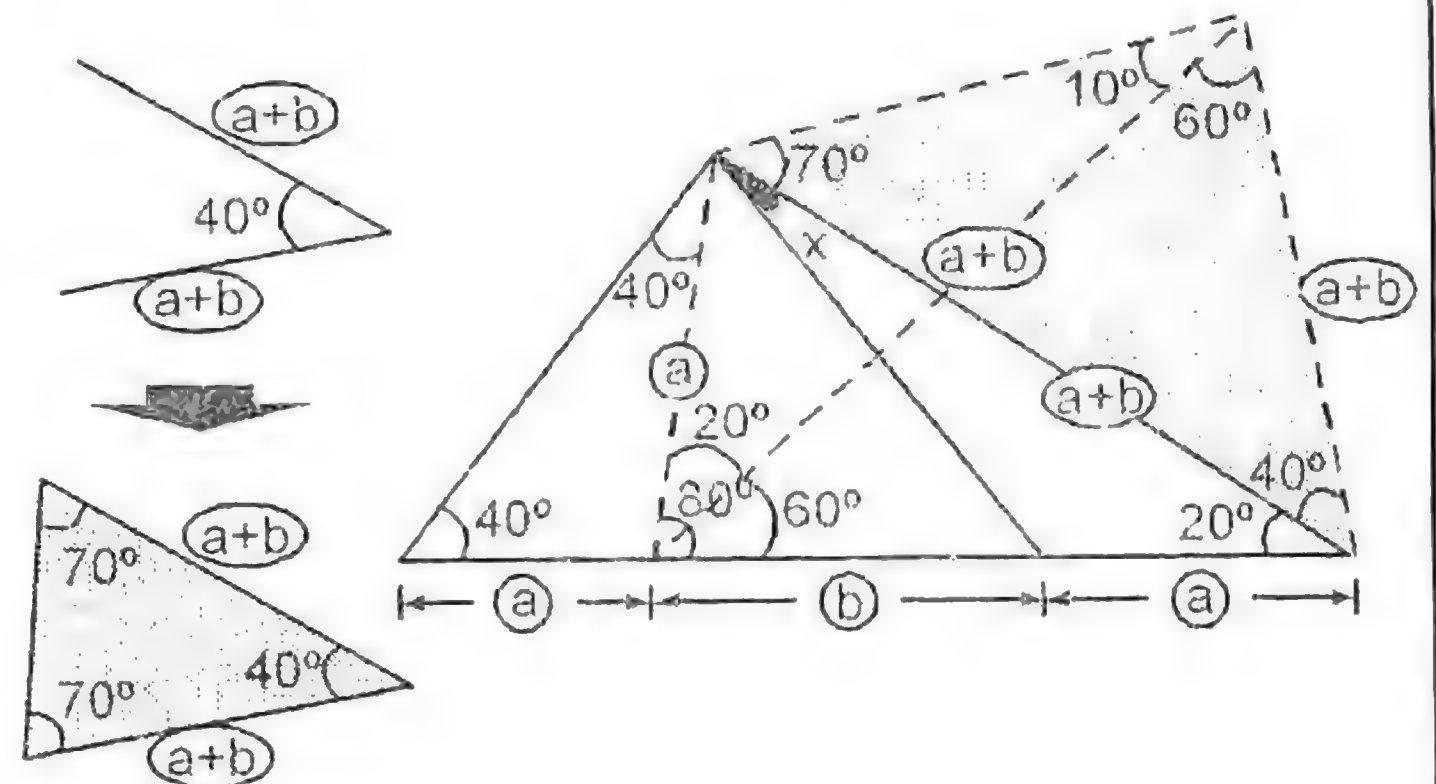
Paso N° 3:

Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera:

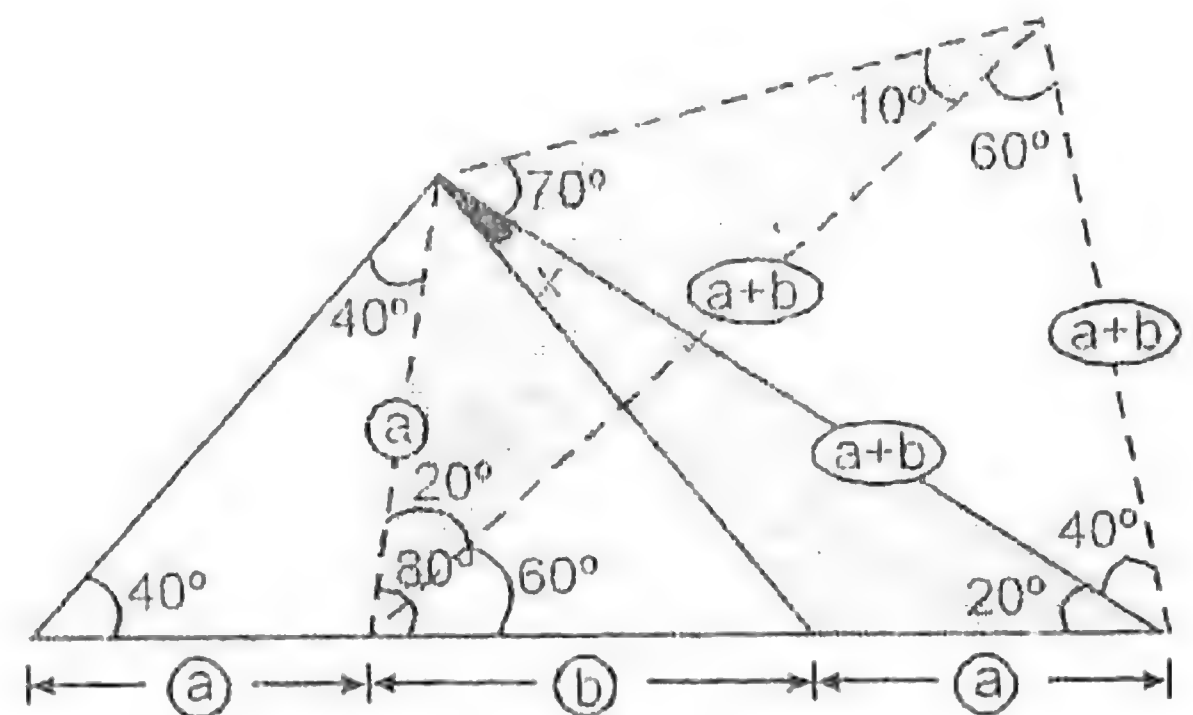


Paso N° 4:

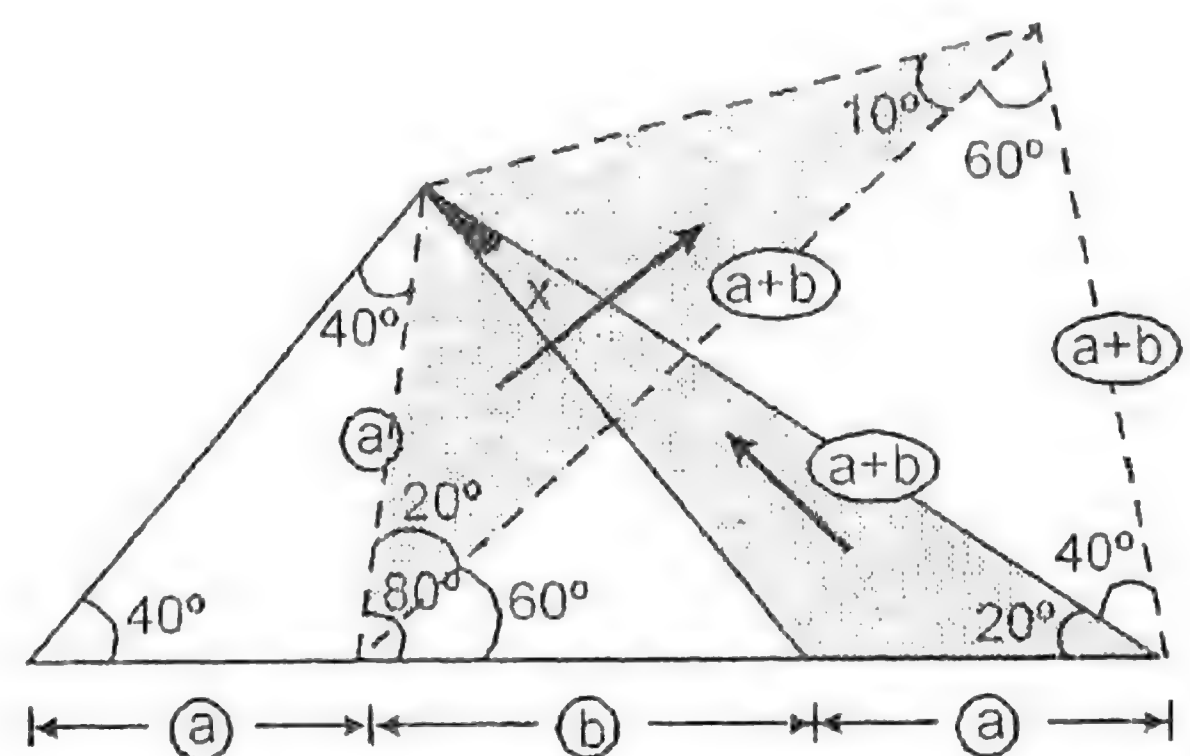
Como consecuencia del trazo anterior realizado, se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 5: También se ha logrado obtener dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) en las siguientes posiciones.



Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

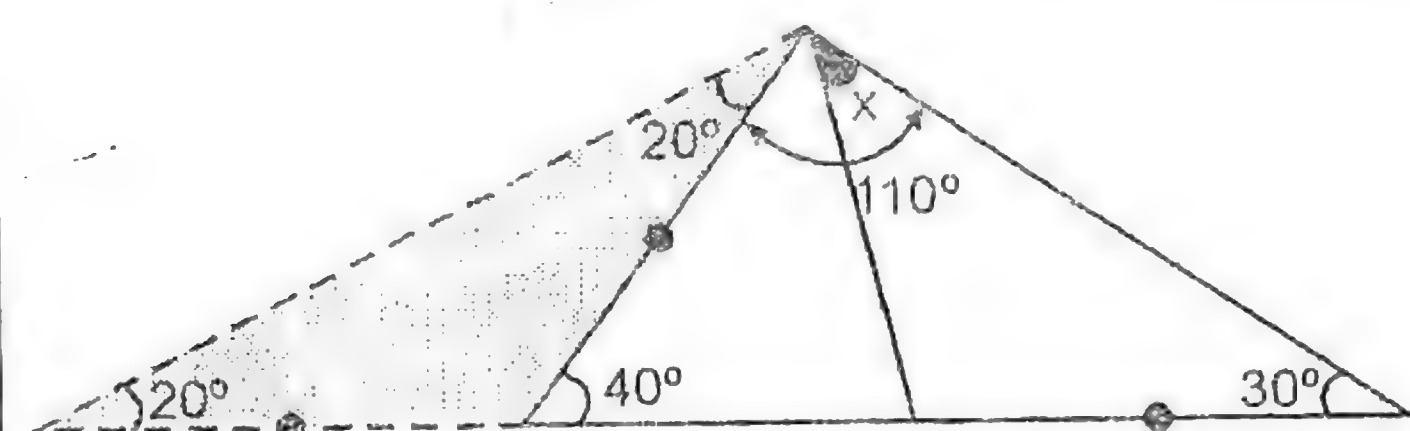


$$\therefore x = 10^\circ$$

Solución N° 47

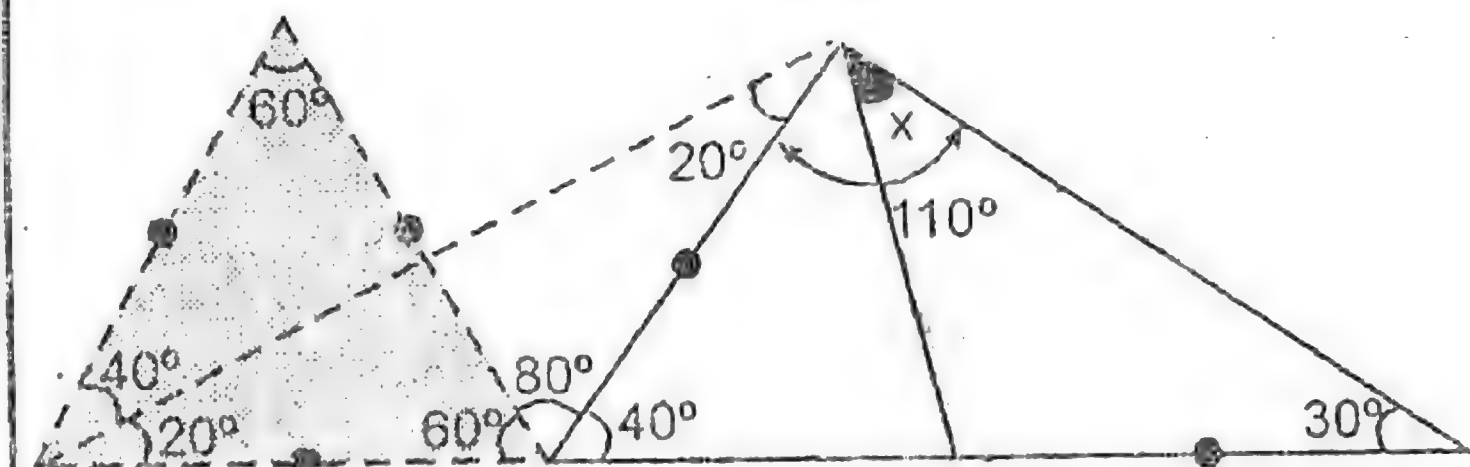
Paso N° 1:

De la figura realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



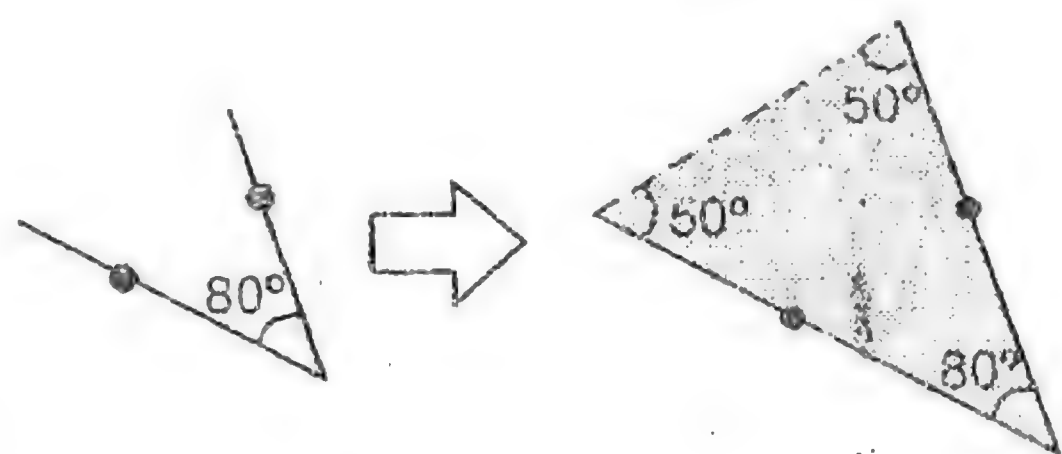
Paso N° 2:

Ahora, realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera.



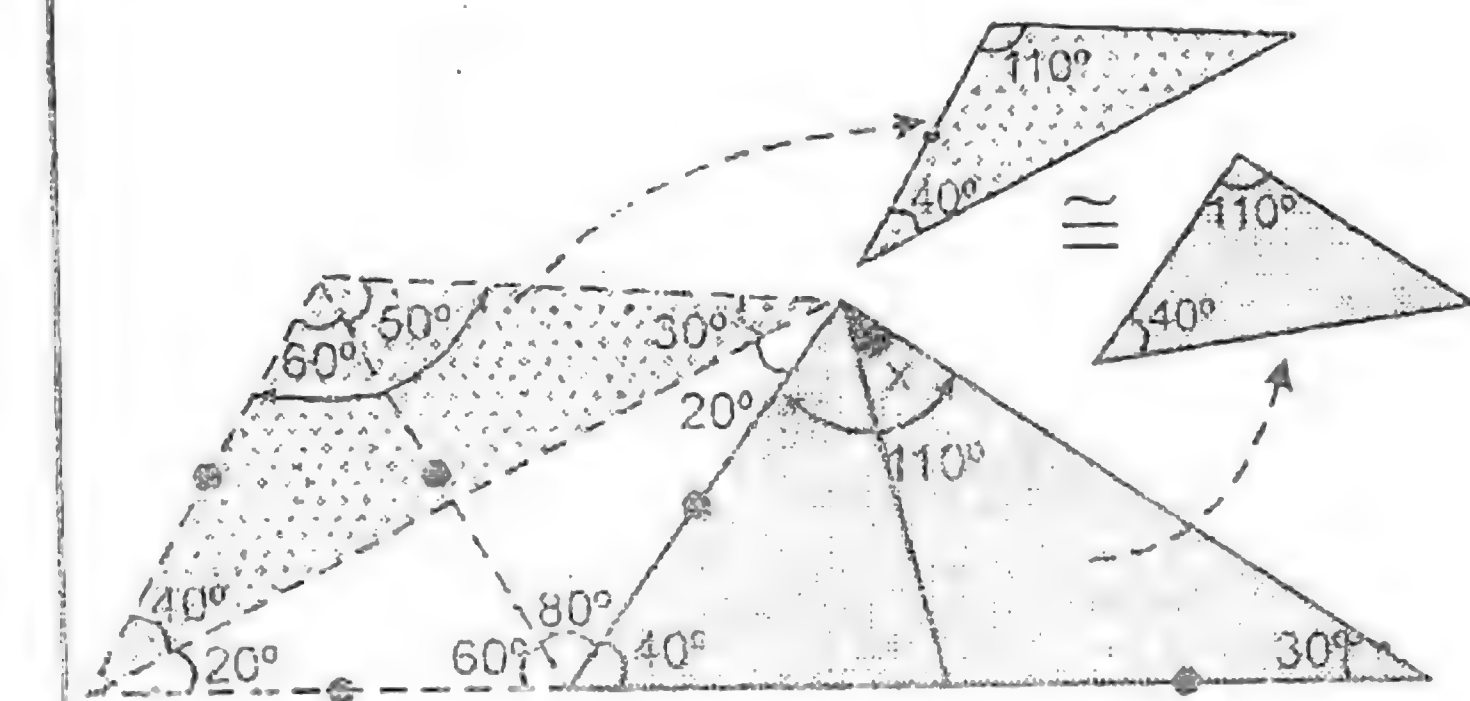
Paso N° 3:

Como consecuencia del trazo realizado se observa un nuevo triángulo isósceles.

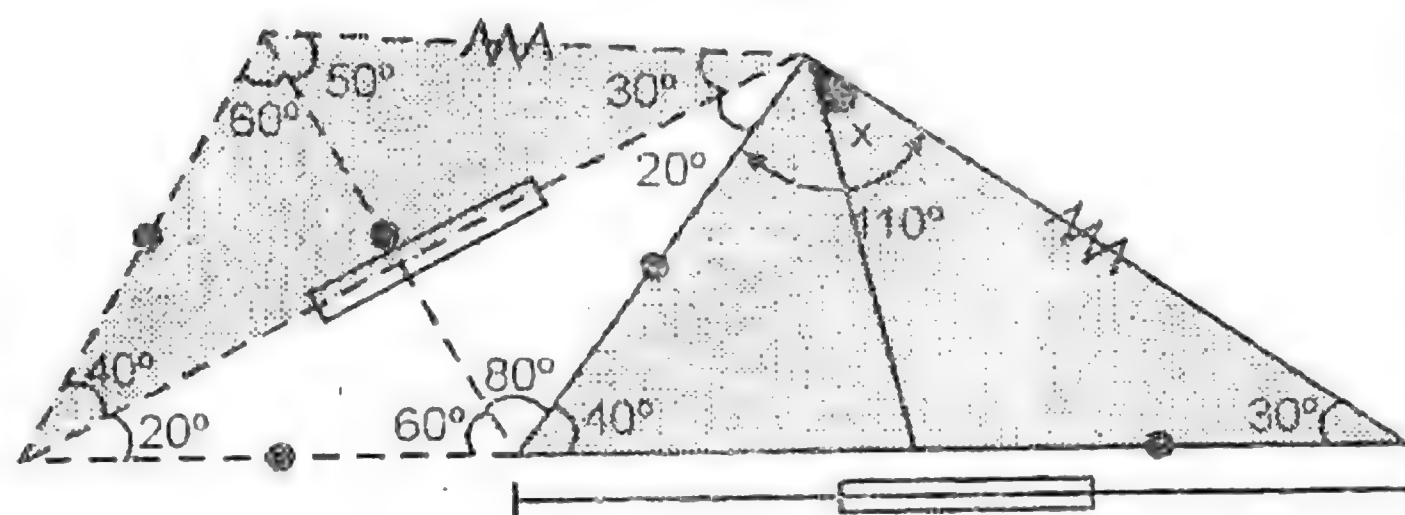


Paso N° 4:

De la figura resultante total se ha logrado obtener dos triángulos congruentes con las siguientes características. Caso (L.A.L.)

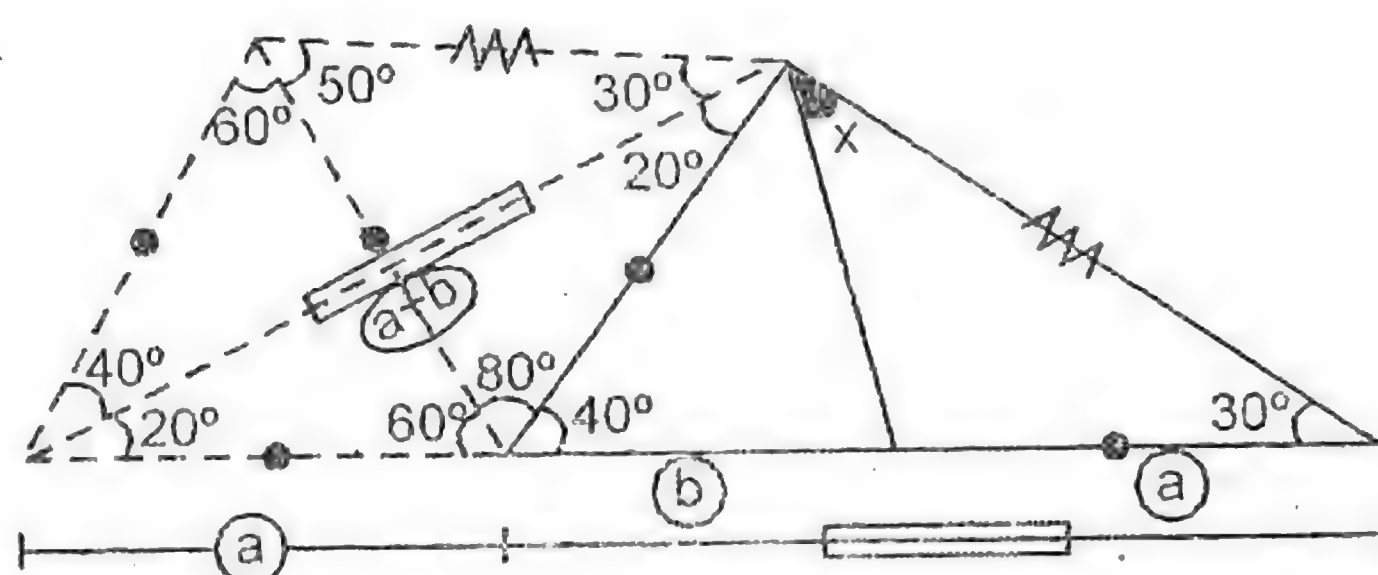


Aquí se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

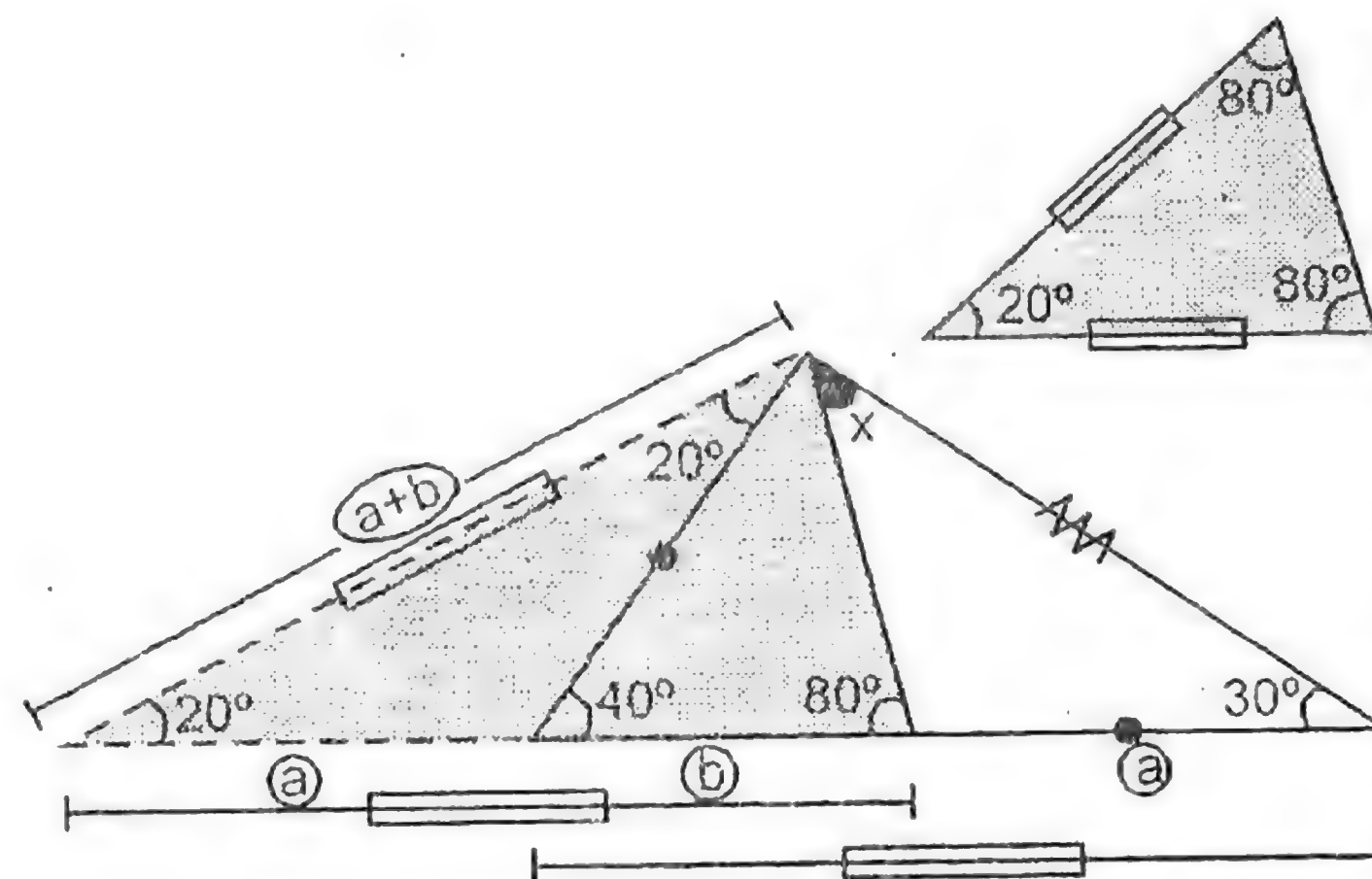


Paso N° 5:

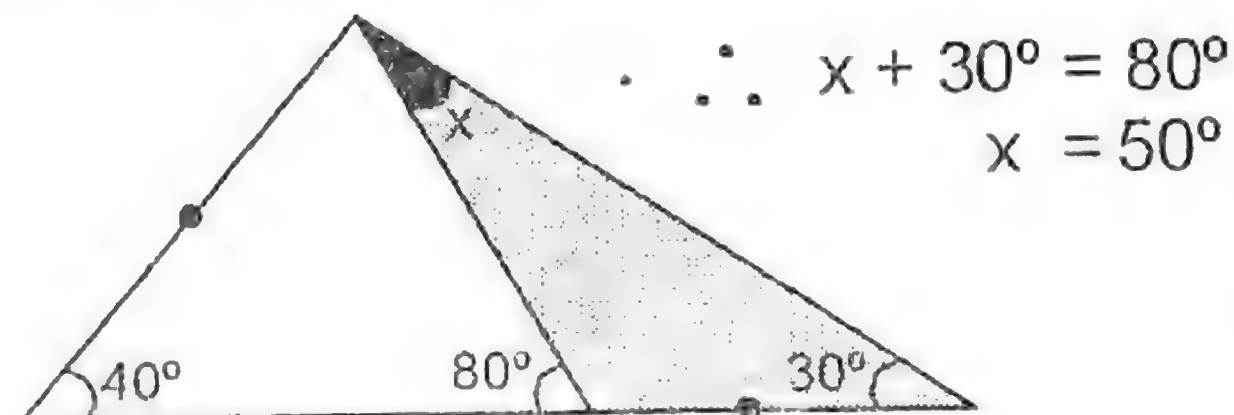
Identificamos los lados o segmentos iguales colocando variables de la siguiente manera.



De la figura se logra obtener un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



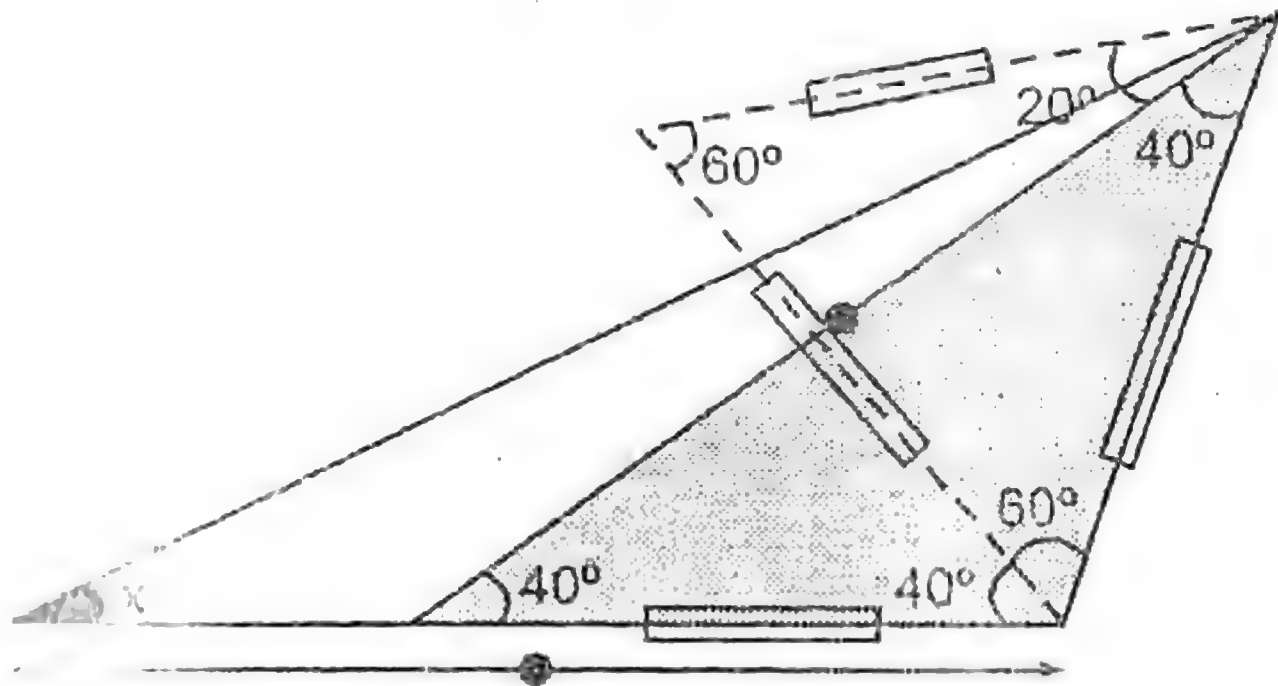
De aquí, se obtiene:



$$\begin{aligned} \therefore x + 30^\circ &= 80^\circ \\ x &= 50^\circ \end{aligned}$$

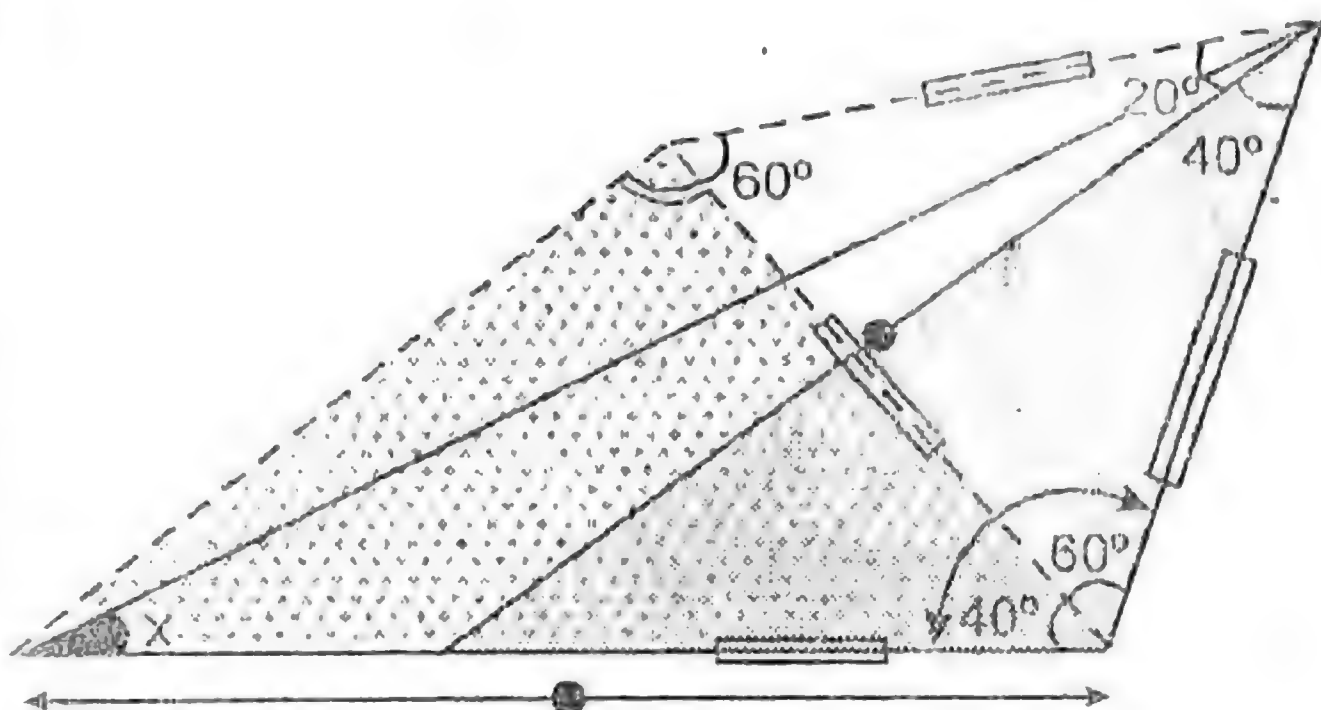
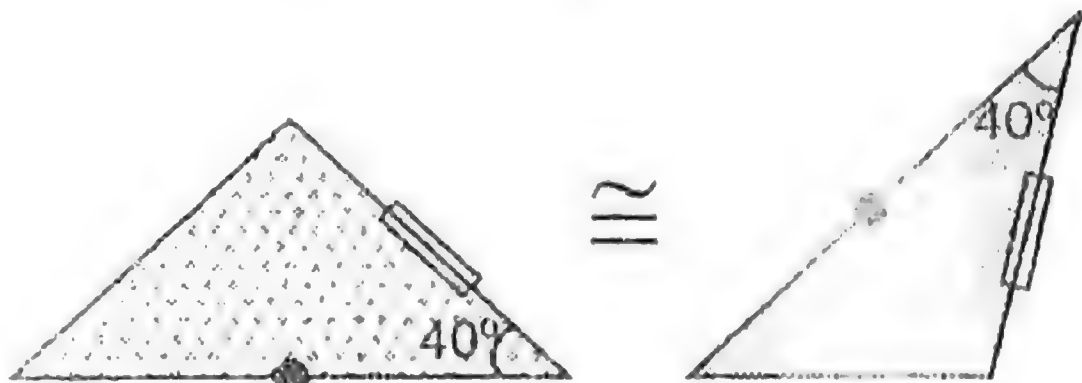
Paso N° 1:

Se observa un triángulo equilátero (Nos brinda 3 ángulos y 3 lados iguales).
El triángulo se realizaría de la siguiente manera.

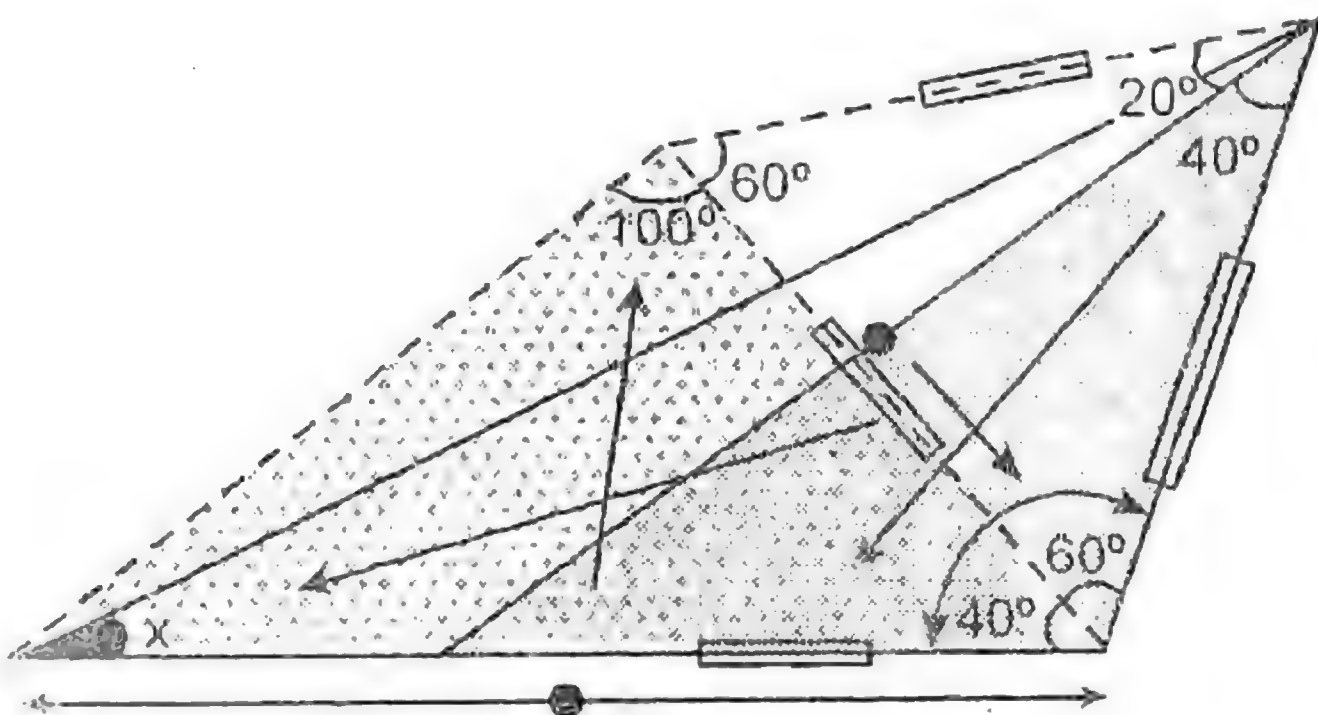


Paso N° 2:

Se observa que se ha generado en la nueva figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

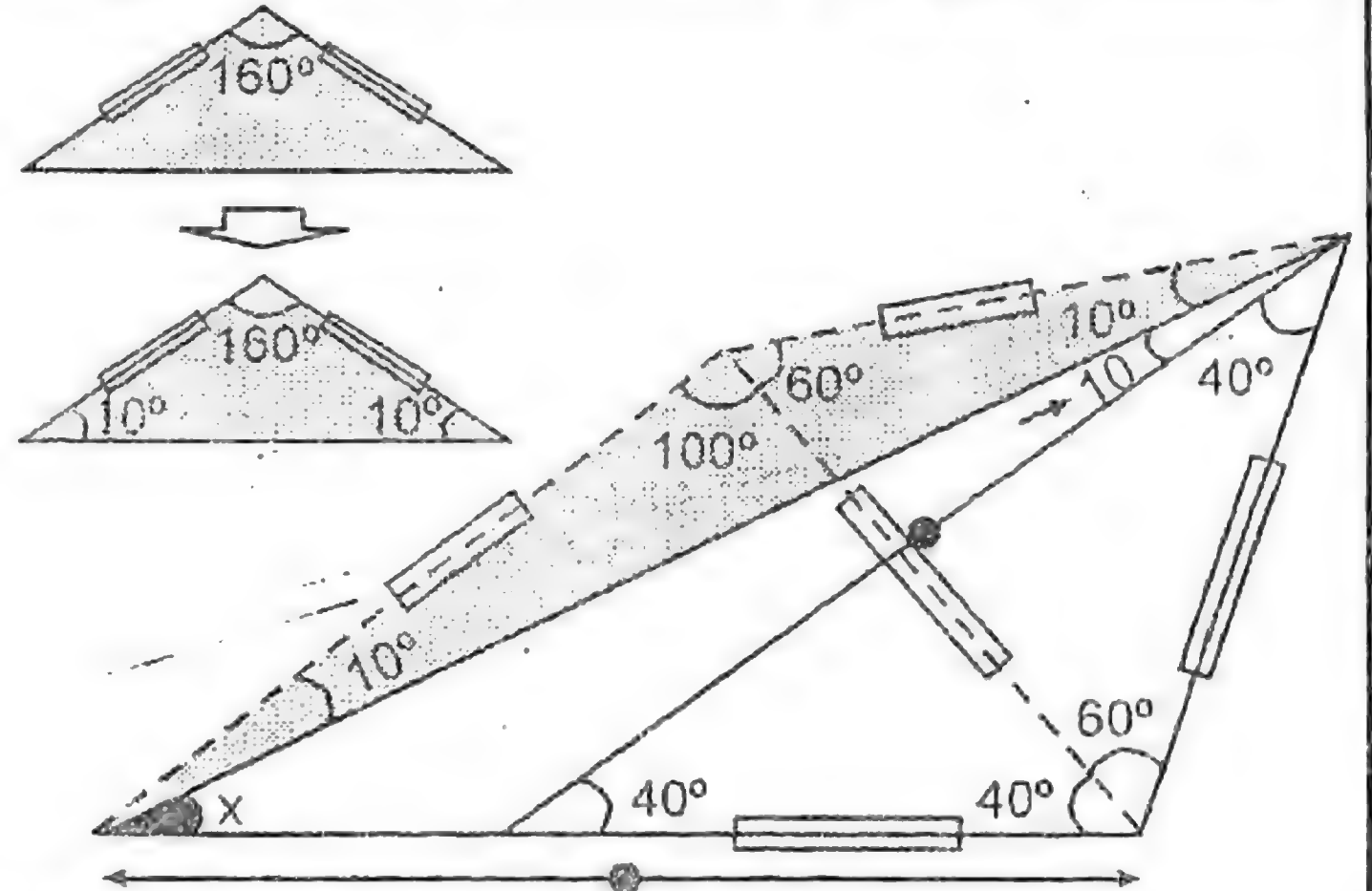


Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



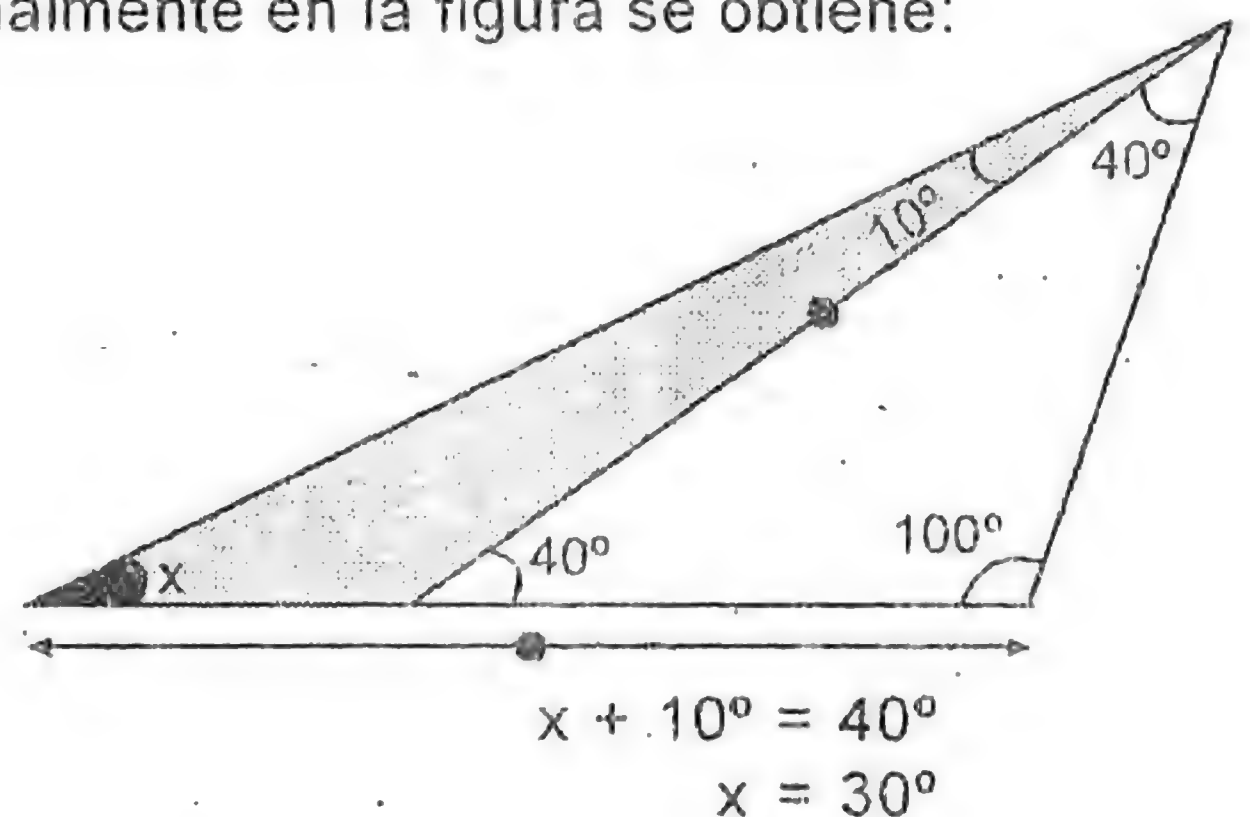
Paso N° 3:

Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



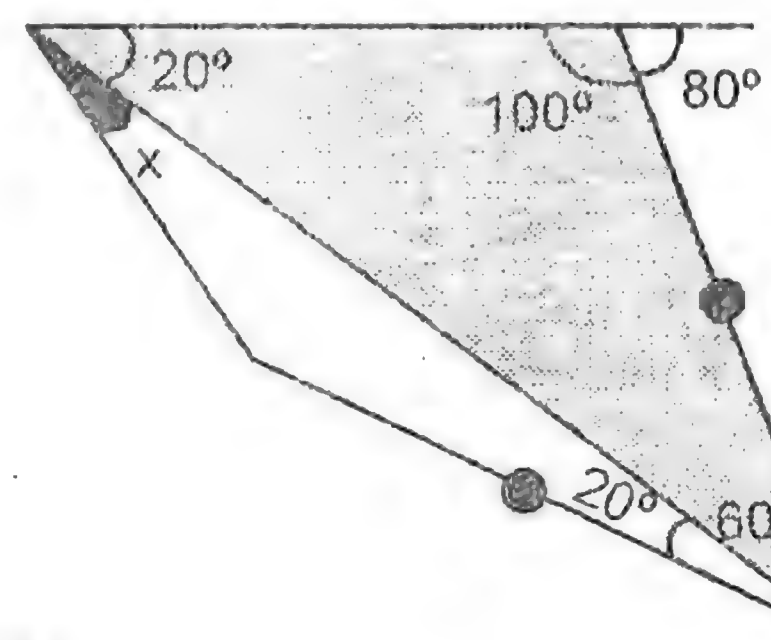
Paso N° 4:

Finalmente en la figura se obtiene:



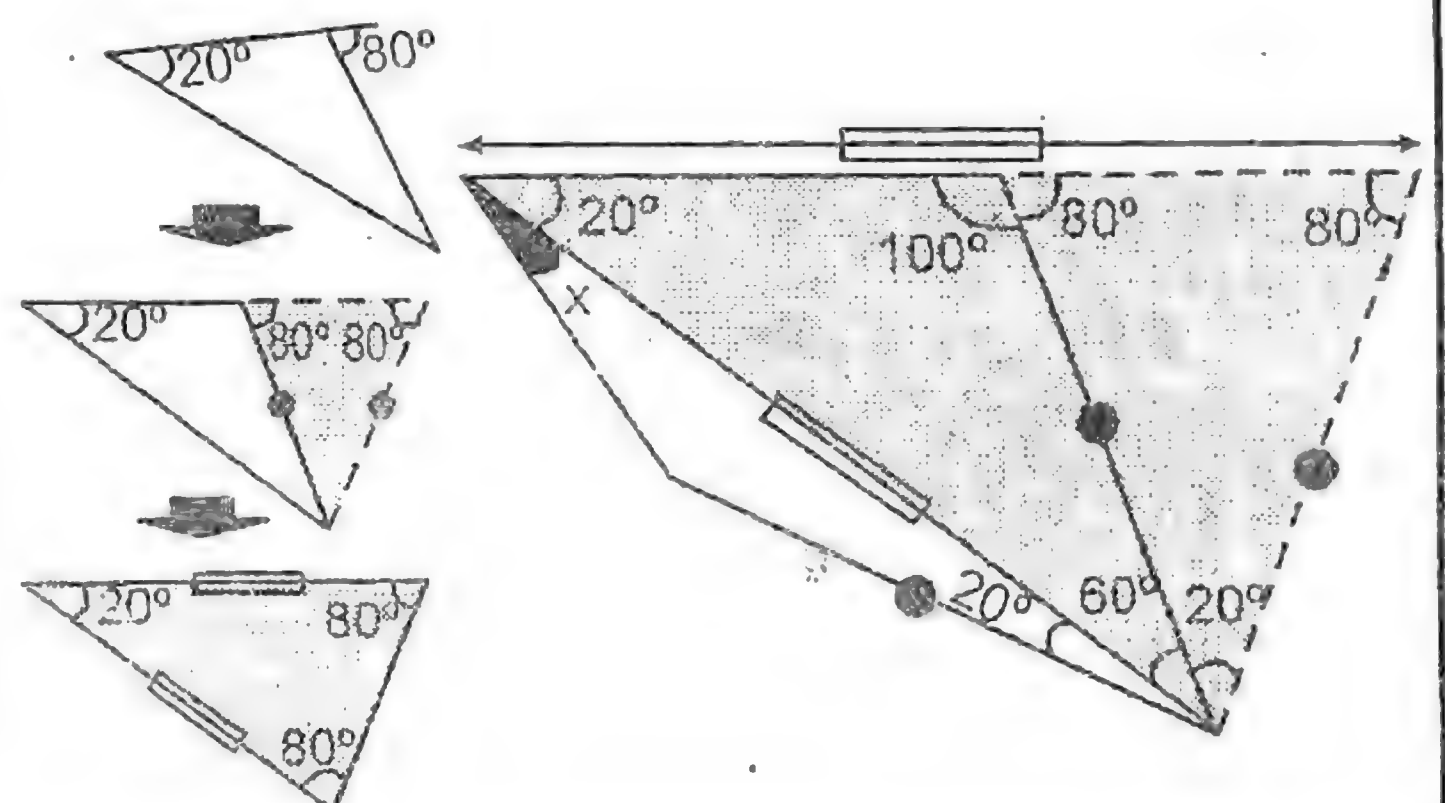
Solución N° 52

En la figura observamos:

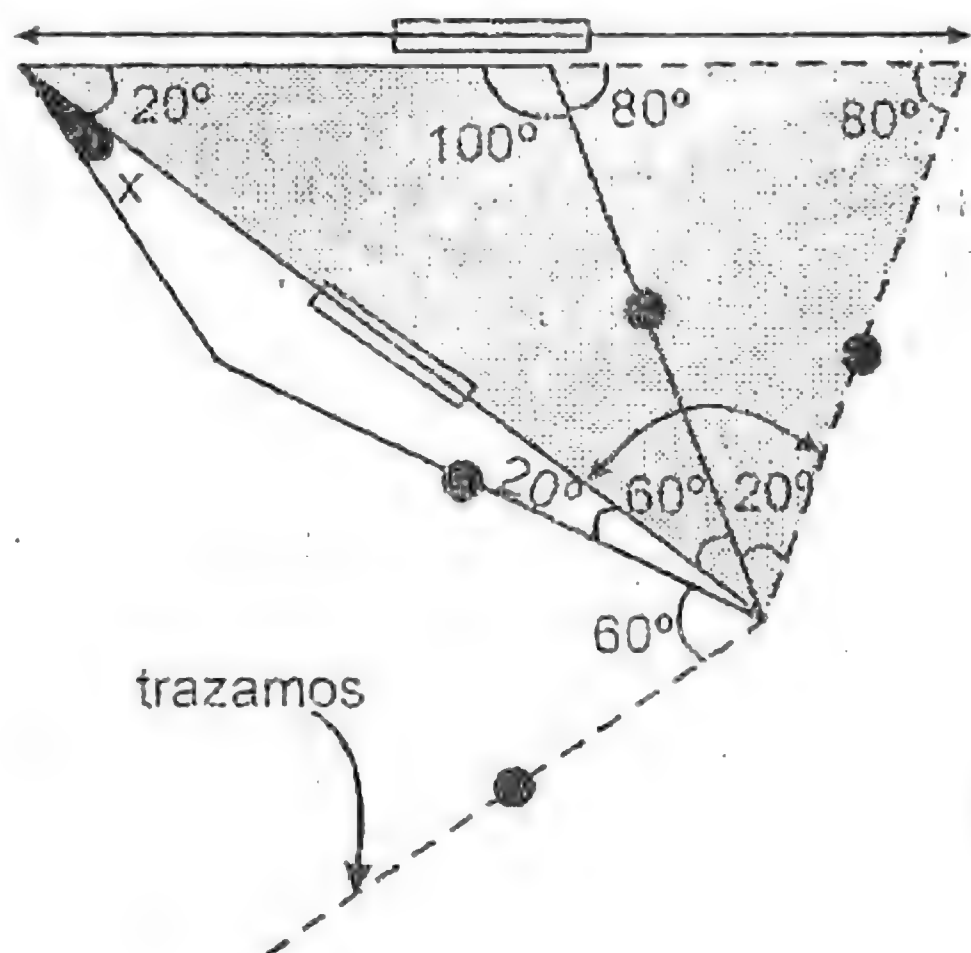


Paso N° 1:

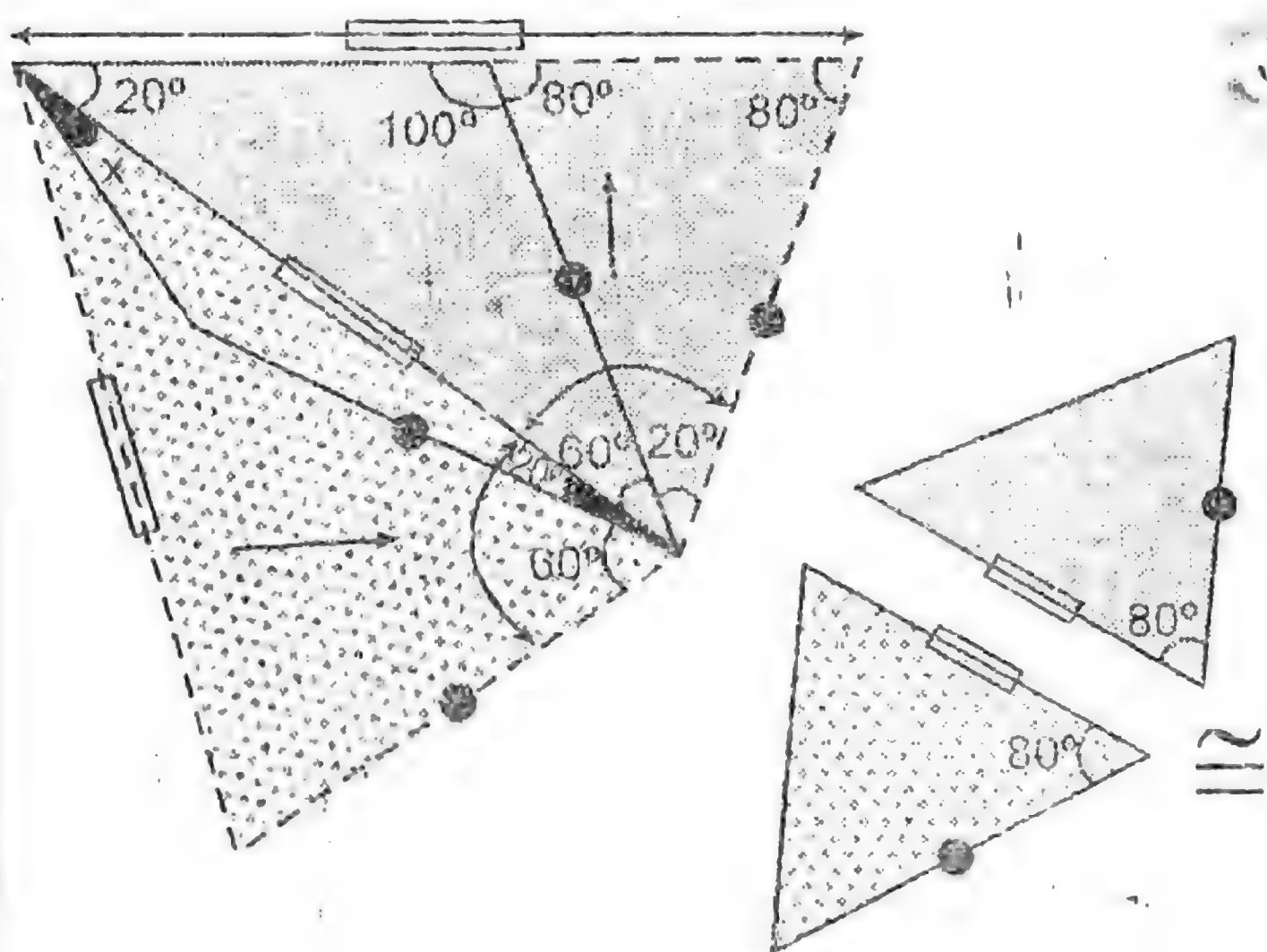
Se observa que tenemos el siguiente triángulo.



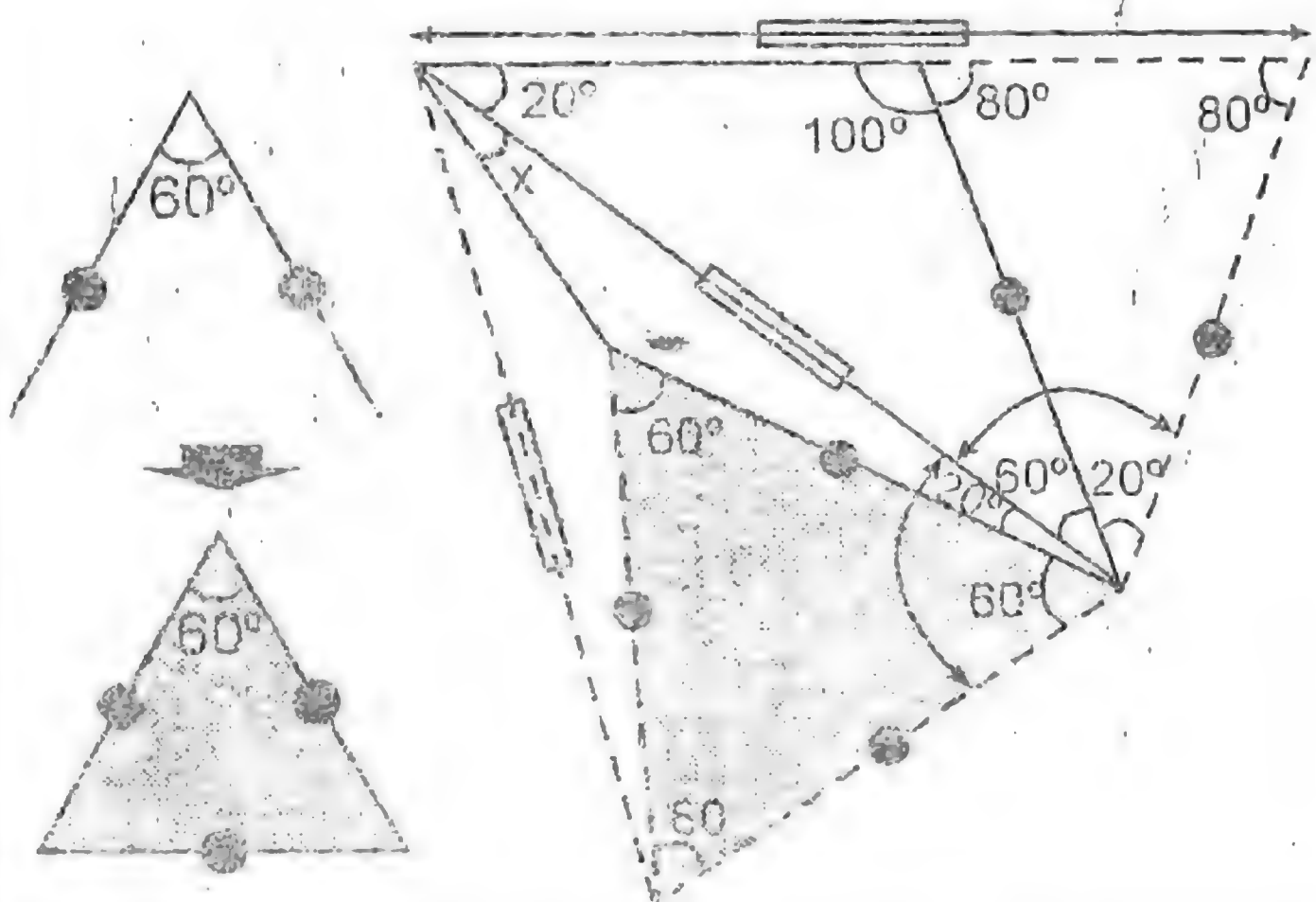
Paso N° 2: Como observamos lados iguales buscaremos trazar en la figura triángulos congruentes, para ello realizamos el siguiente trazo. (Quinto criterio de construcción)



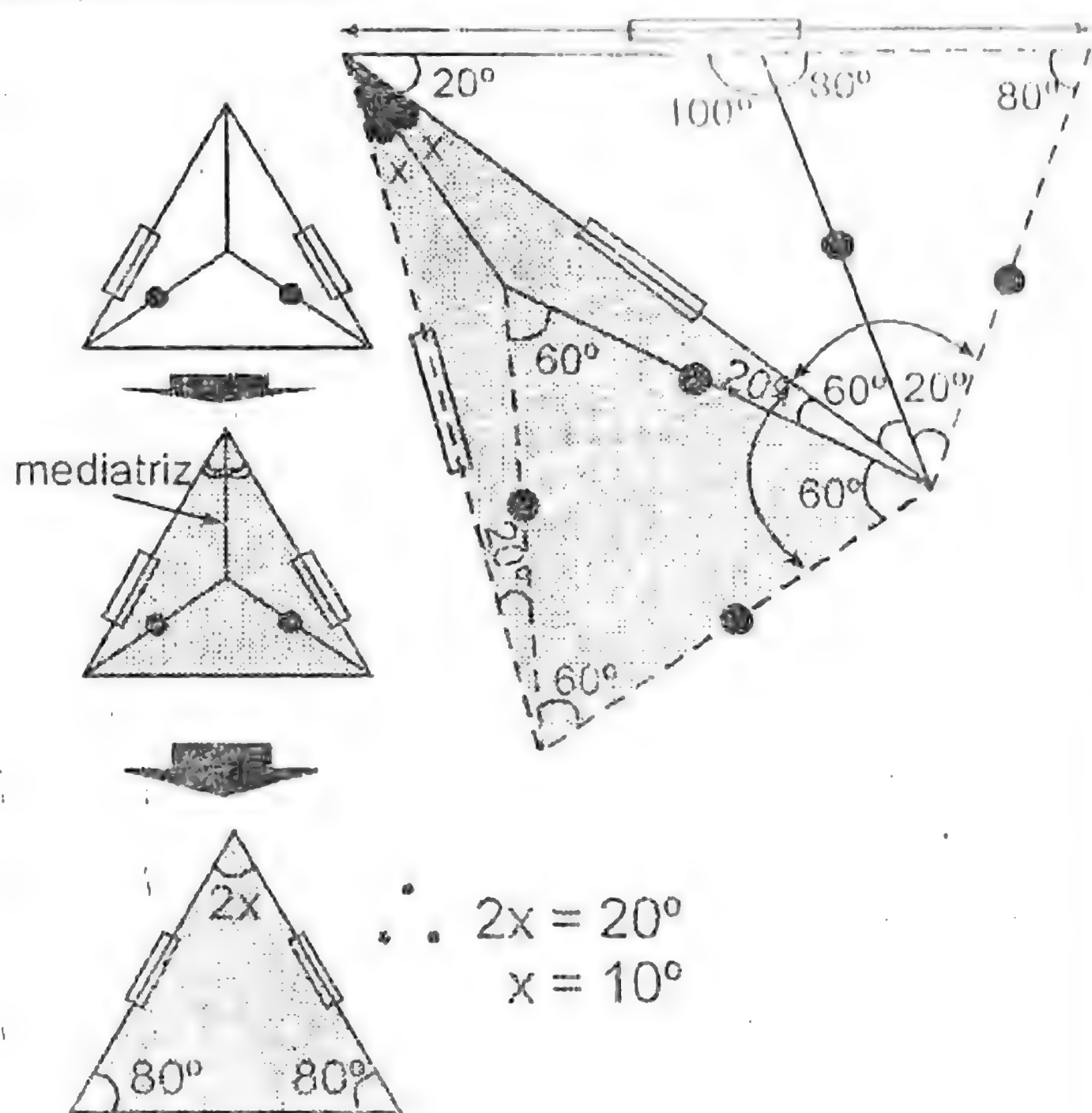
Con ello generamos congruencia, caso (L.A.L.)



Paso N° 3: Ahora observamos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

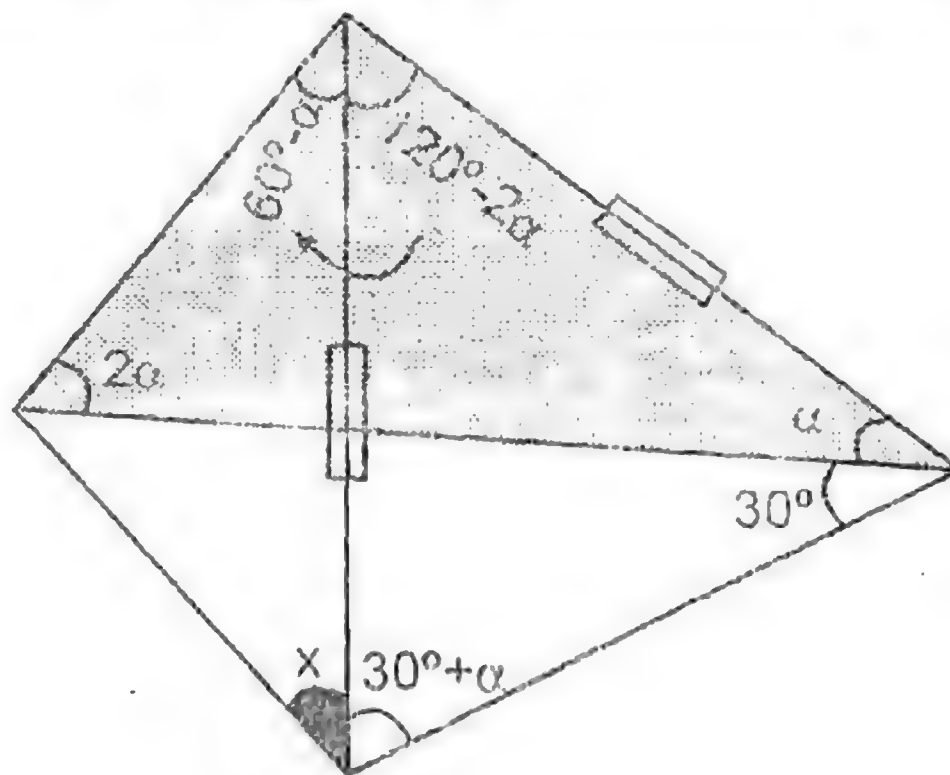


Paso N° 4: Luego observamos la siguiente figura que se cumple:

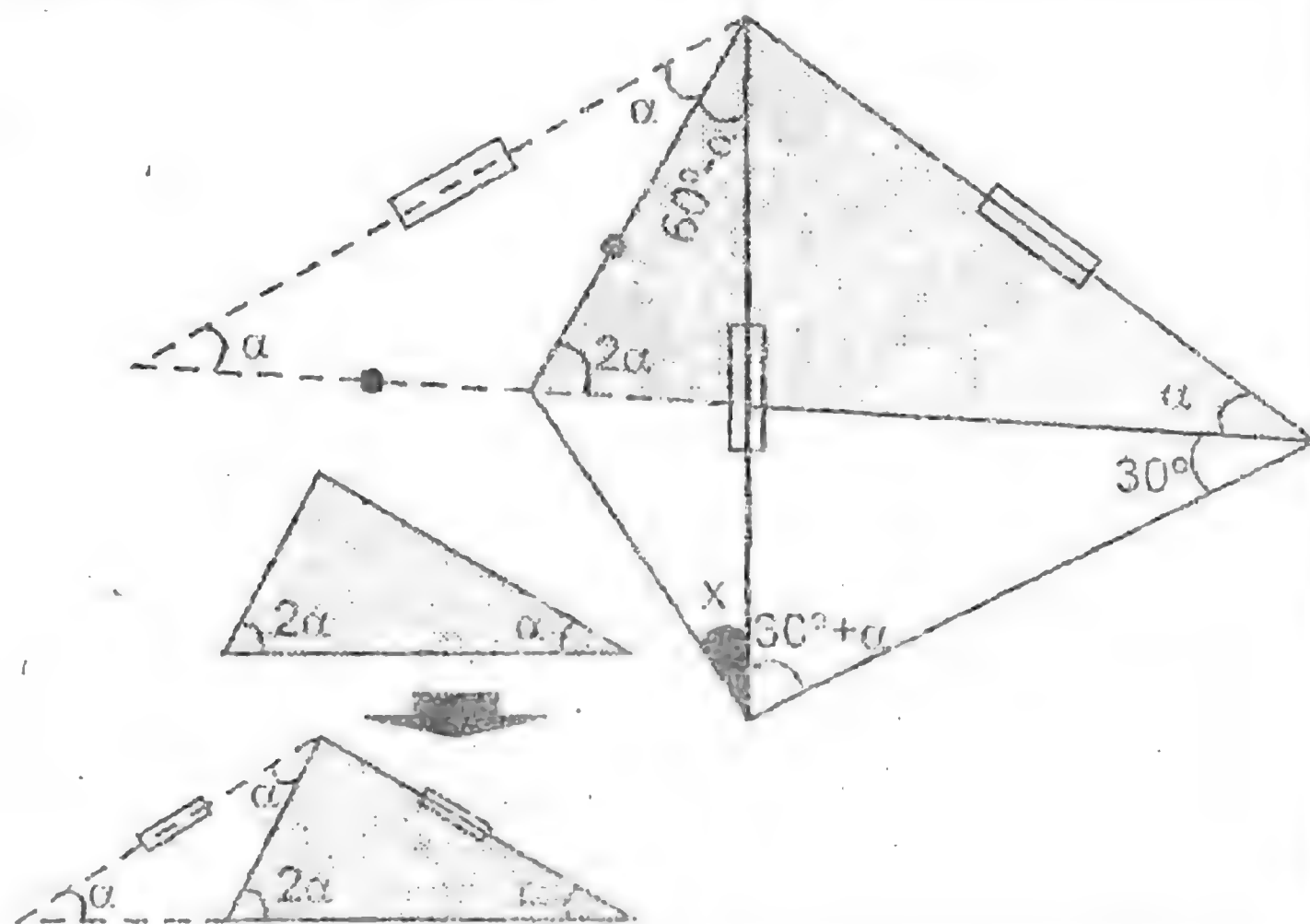


Solución N° 53

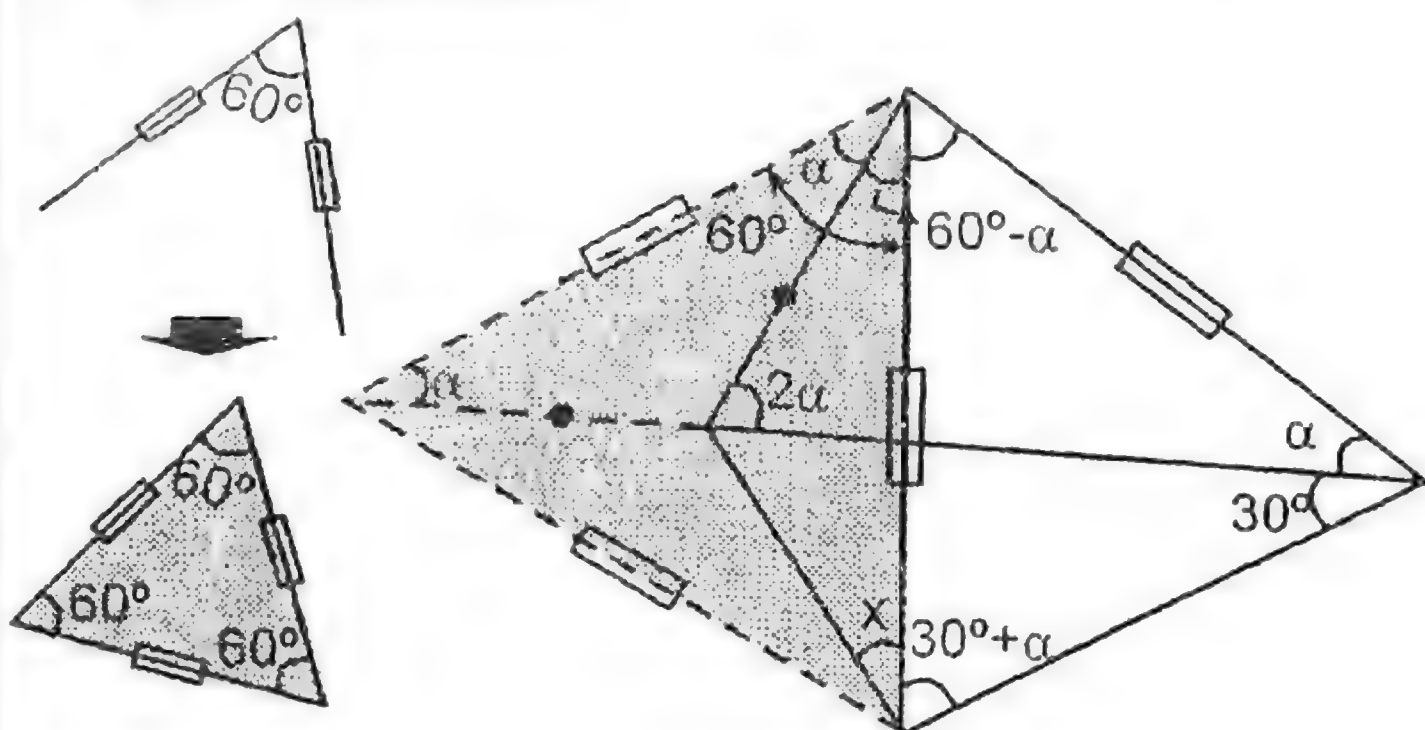
Completamos ángulos internos de la figura.



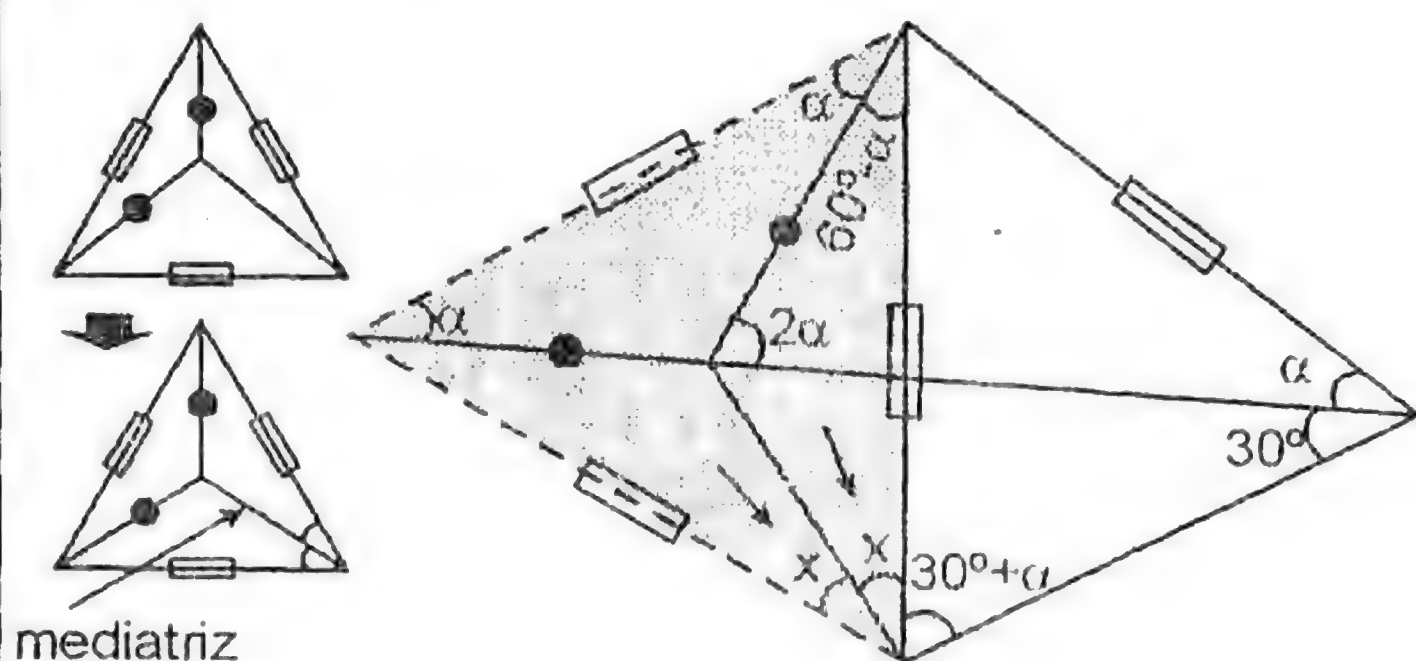
Paso N° 1: Se tiene un triángulo donde tiene ángulos en la relación de 1 a 2; entonces se realizamos el primer criterio de construcción.



Paso N° 2: Ahora tenemos en la figura un triángulo equilátero.



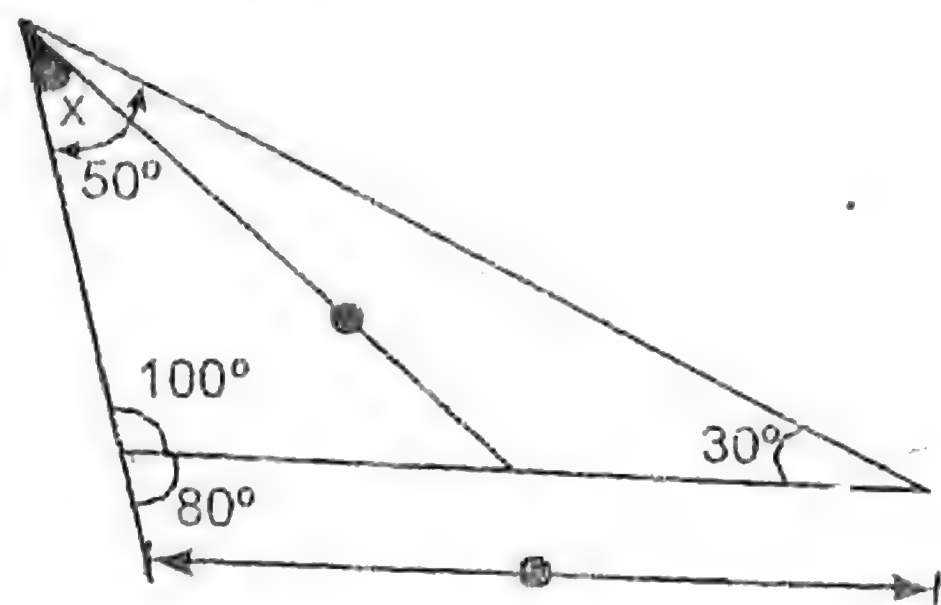
Paso N° 3: Luego observamos la siguiente figura donde se cumple:



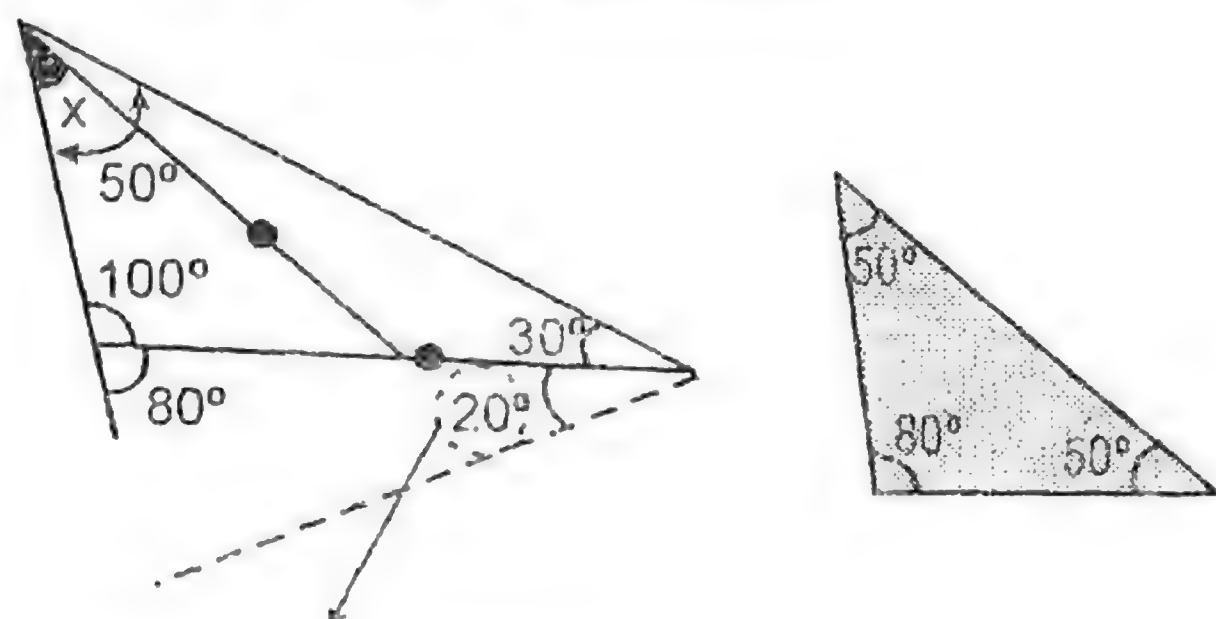
$$\begin{aligned} \therefore 2x &= 60^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 54

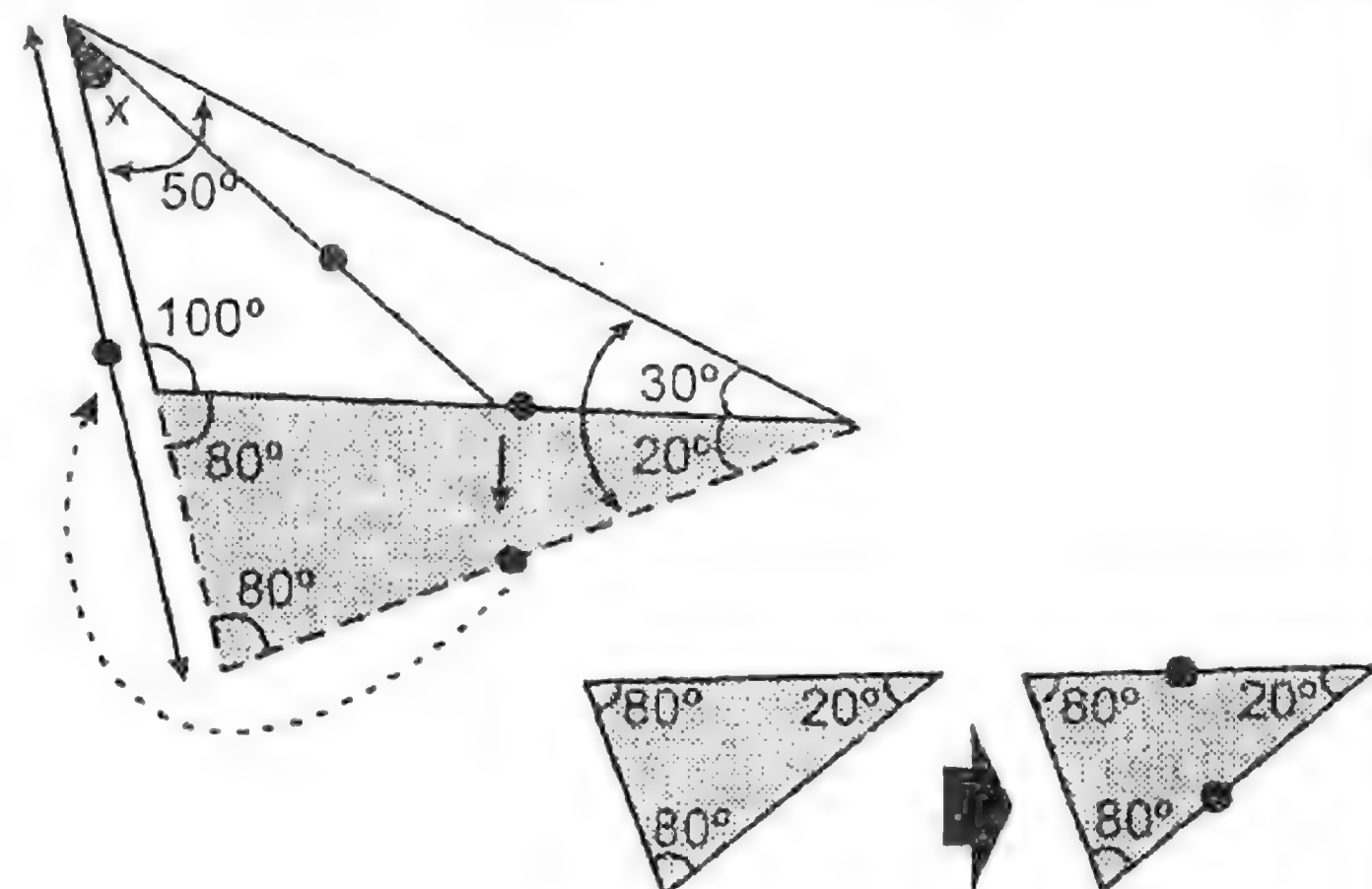
En la figura, observamos:



Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

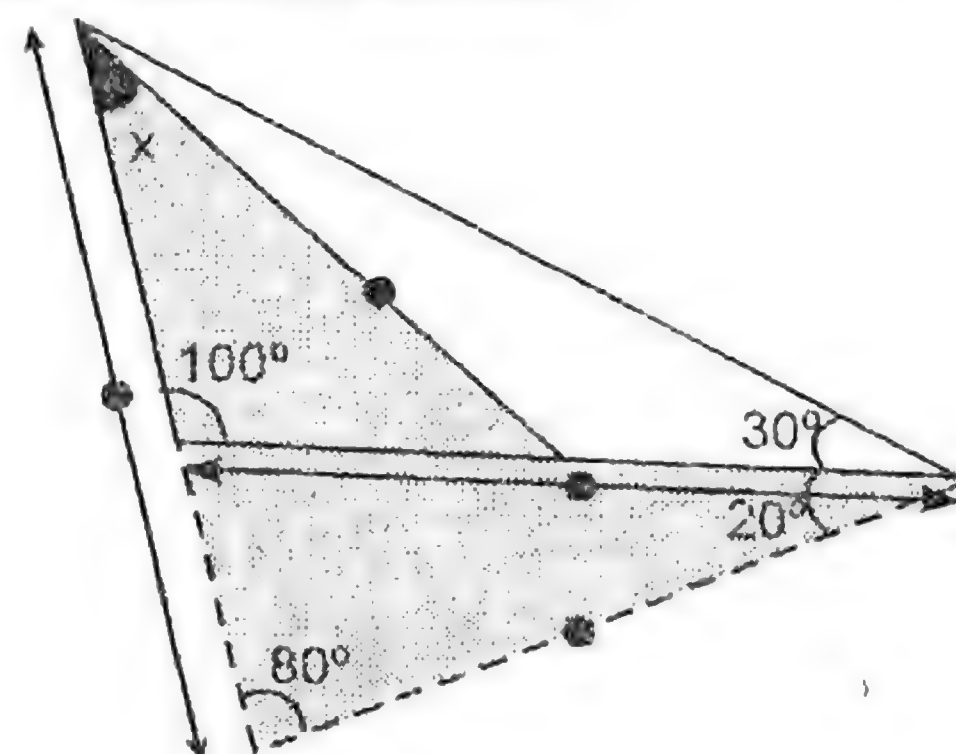


Colocamos este ángulo para obtener en la figura total un triángulo isósceles



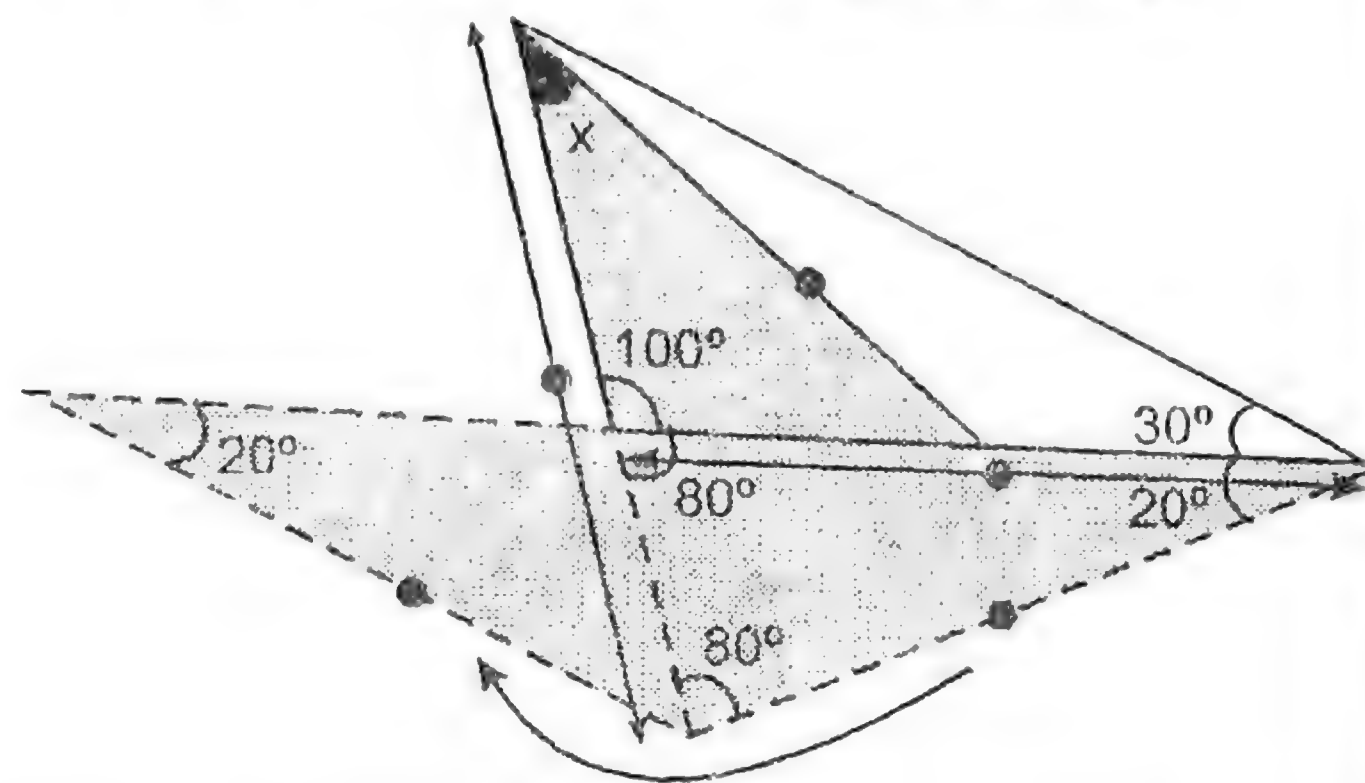
Paso N° 2:

Ahora en la nueva figura, observamos un cuadrilátero concavo, donde posee las siguientes características.

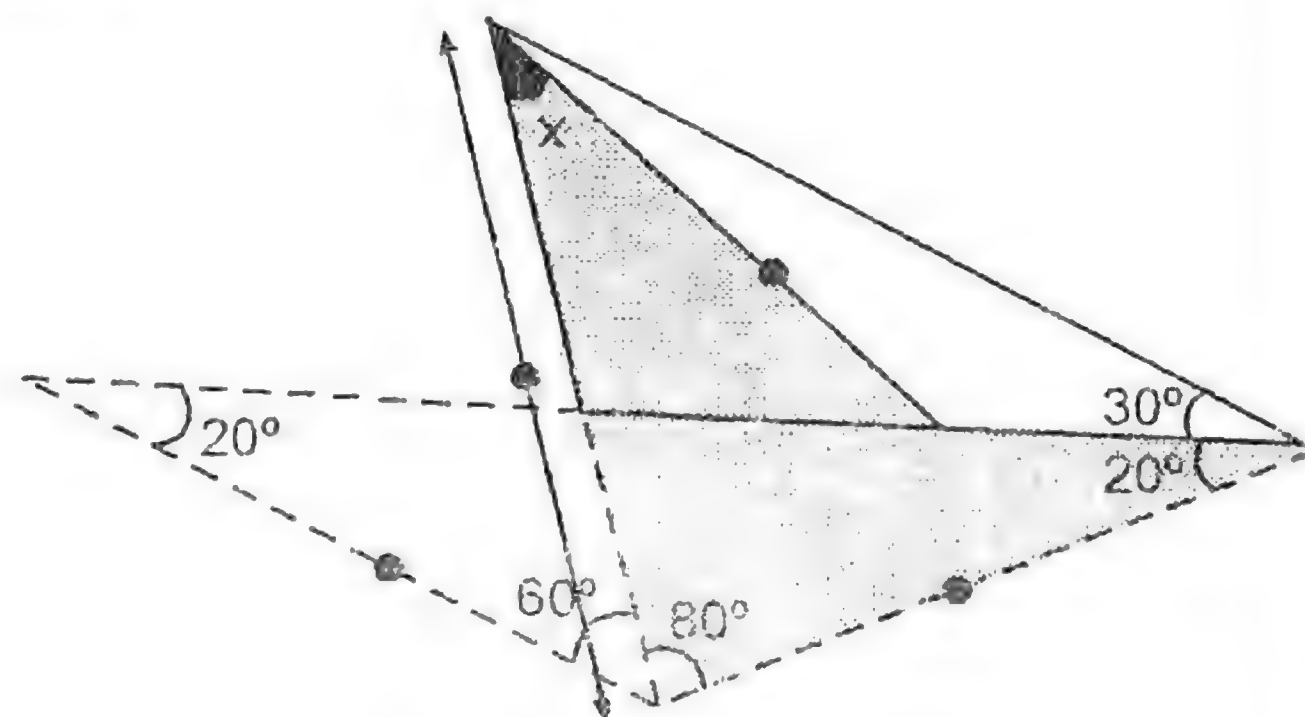


Paso N° 3:

Realizamos el siguiente trazo, utilizando el sexto criterio de construcción (ángulo espejo)

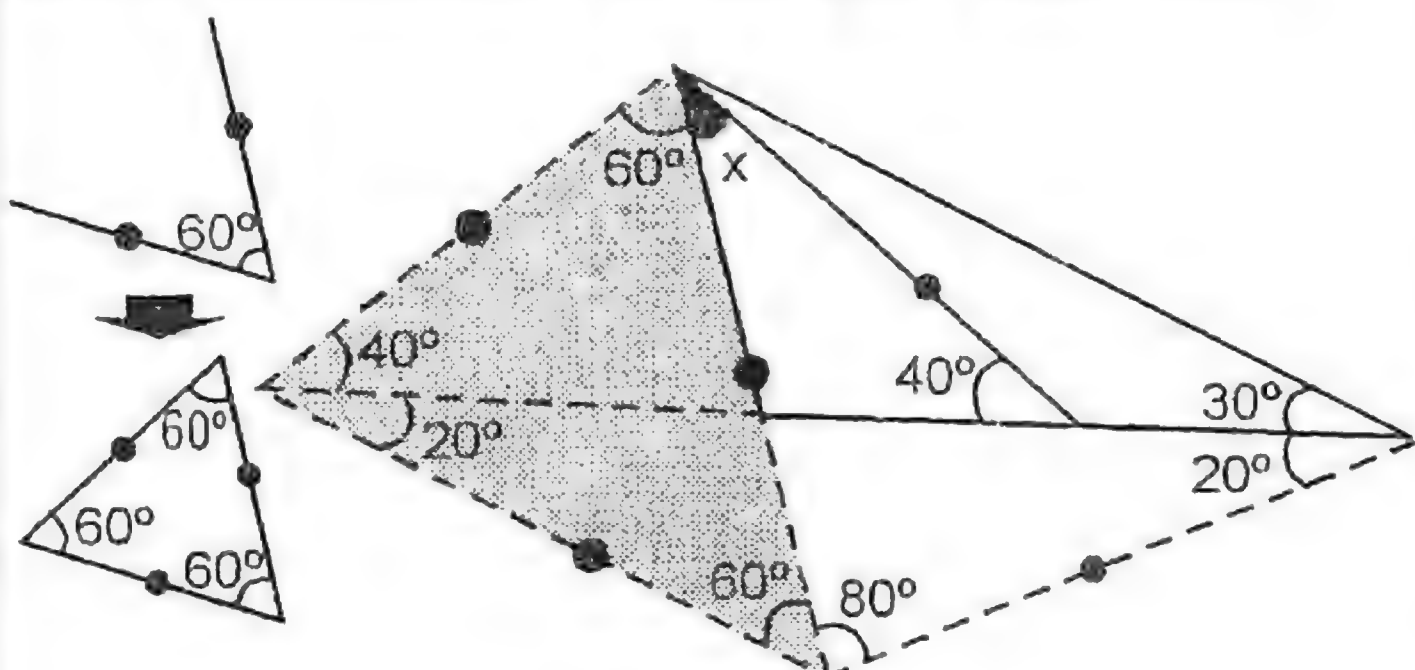


Ahora completamos los ángulos internos en la figura:

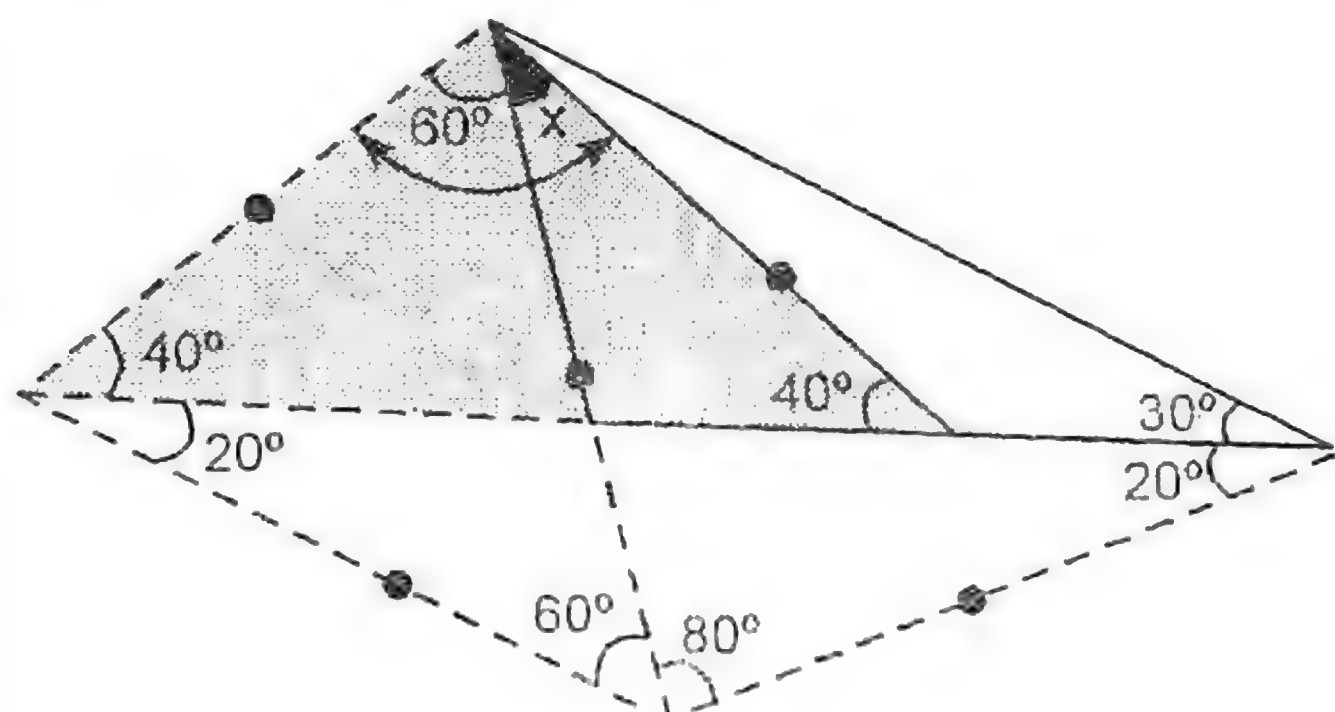


Paso N° 4:

Ahora observamos un triángulo equilátero:



Paso N° 5: Obtenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

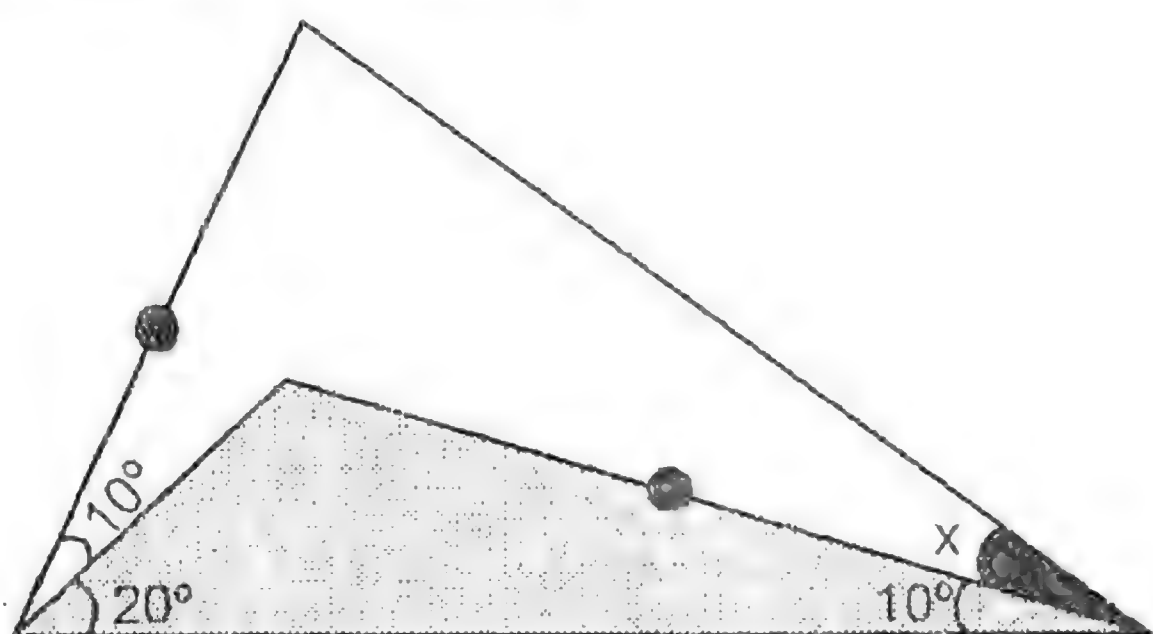


$$\therefore 40^\circ + 60^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

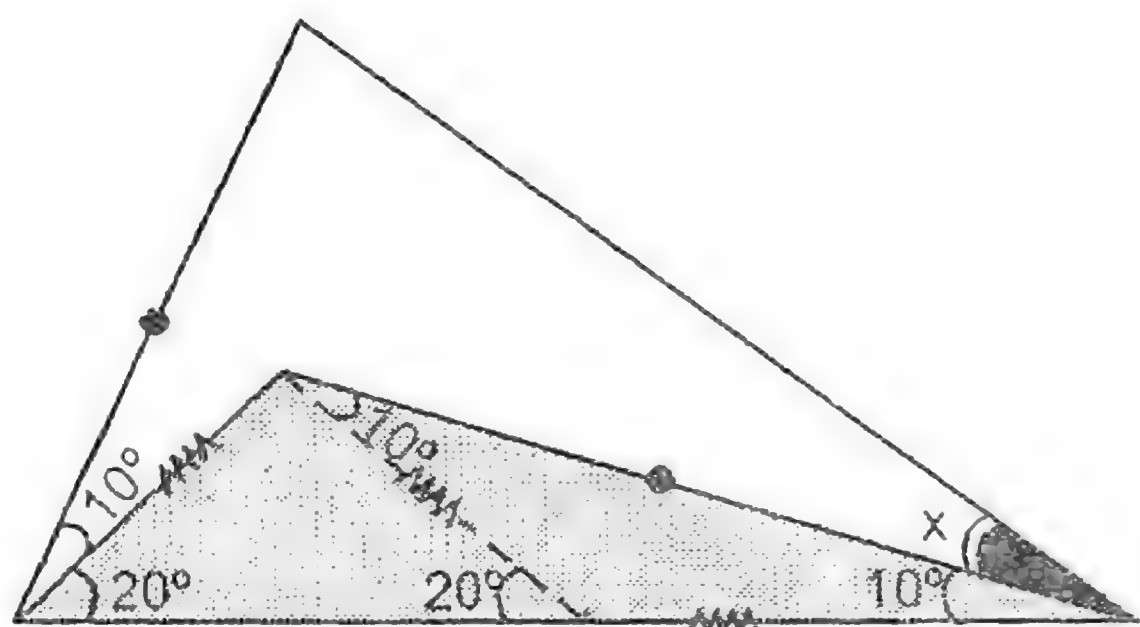
Solución N° 55

En la figura se observa:



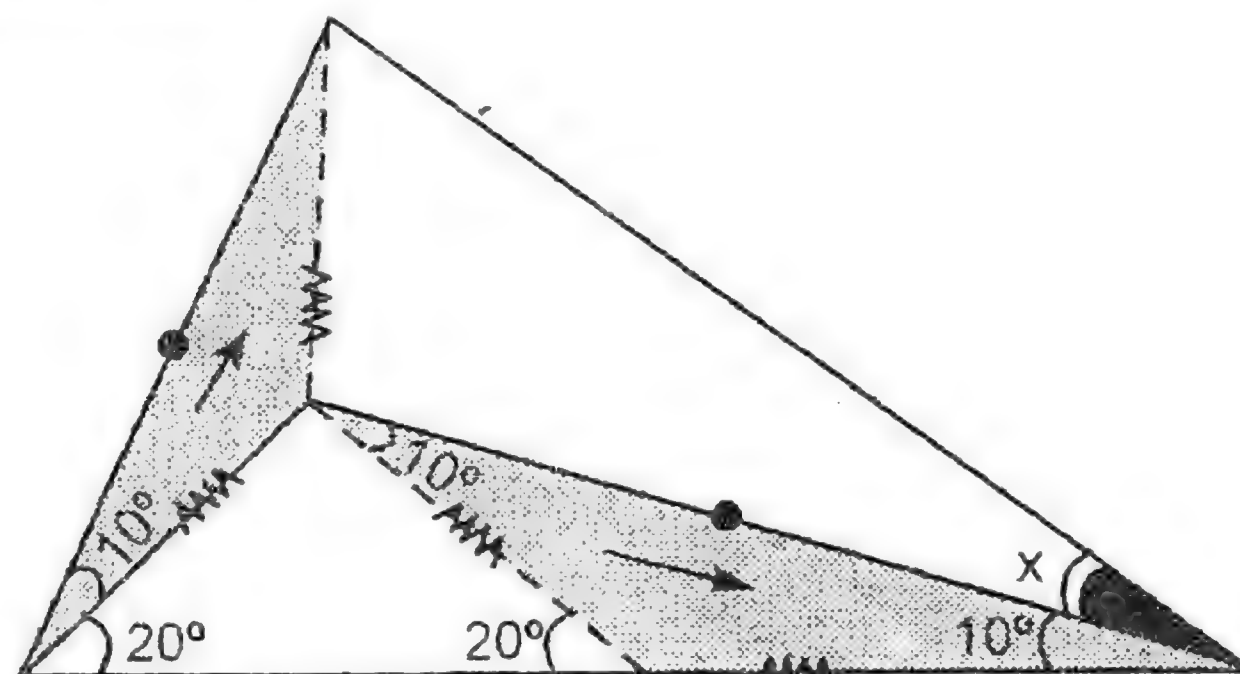
Paso N° 1:

Observamos en un triángulo ángulos en la relación de uno a dos (Primer criterio de construcción)



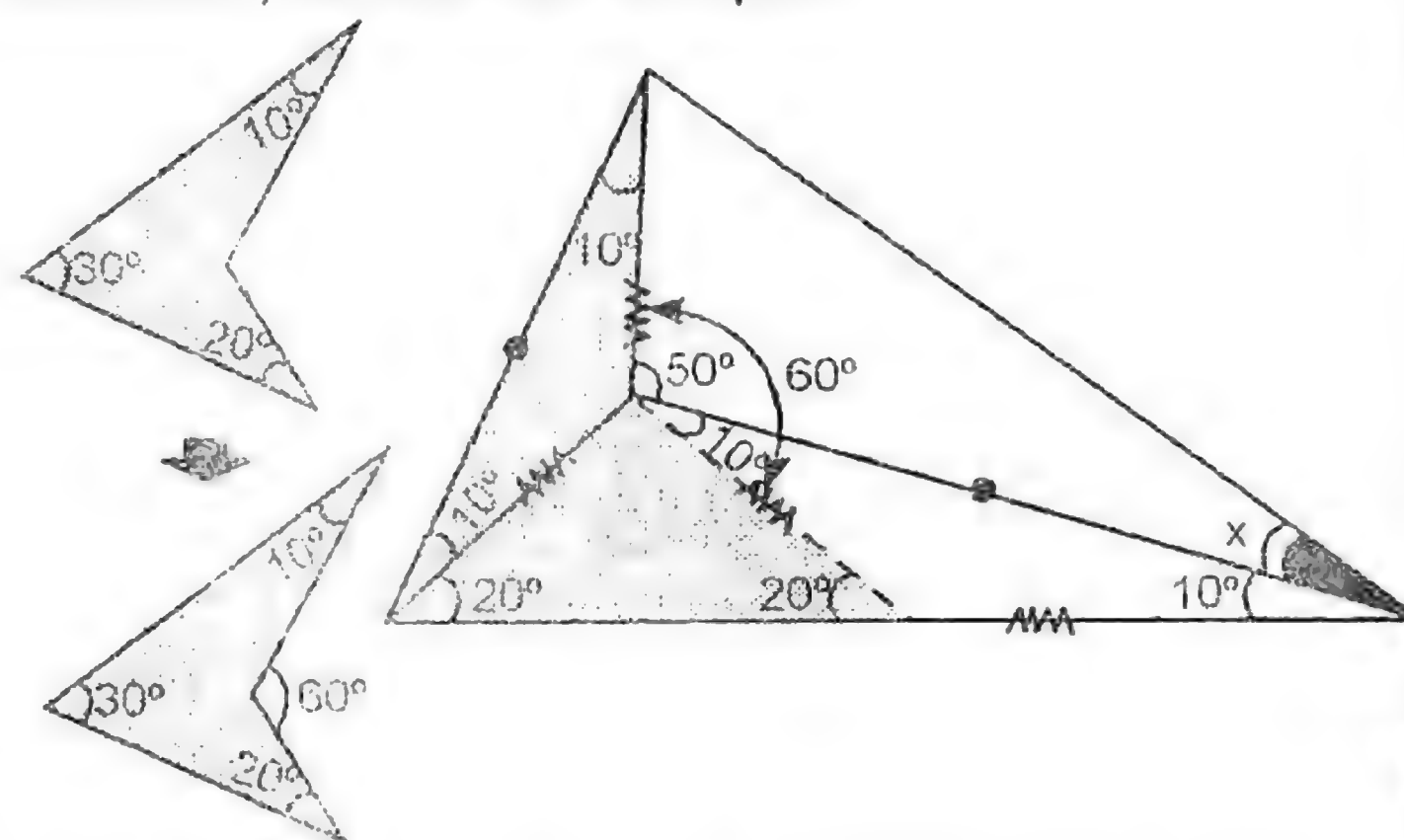
Paso N° 2:

Con el trazo realizado se ha generado dos triángulos que son congruentes, caso (lado-ángulo-lado)

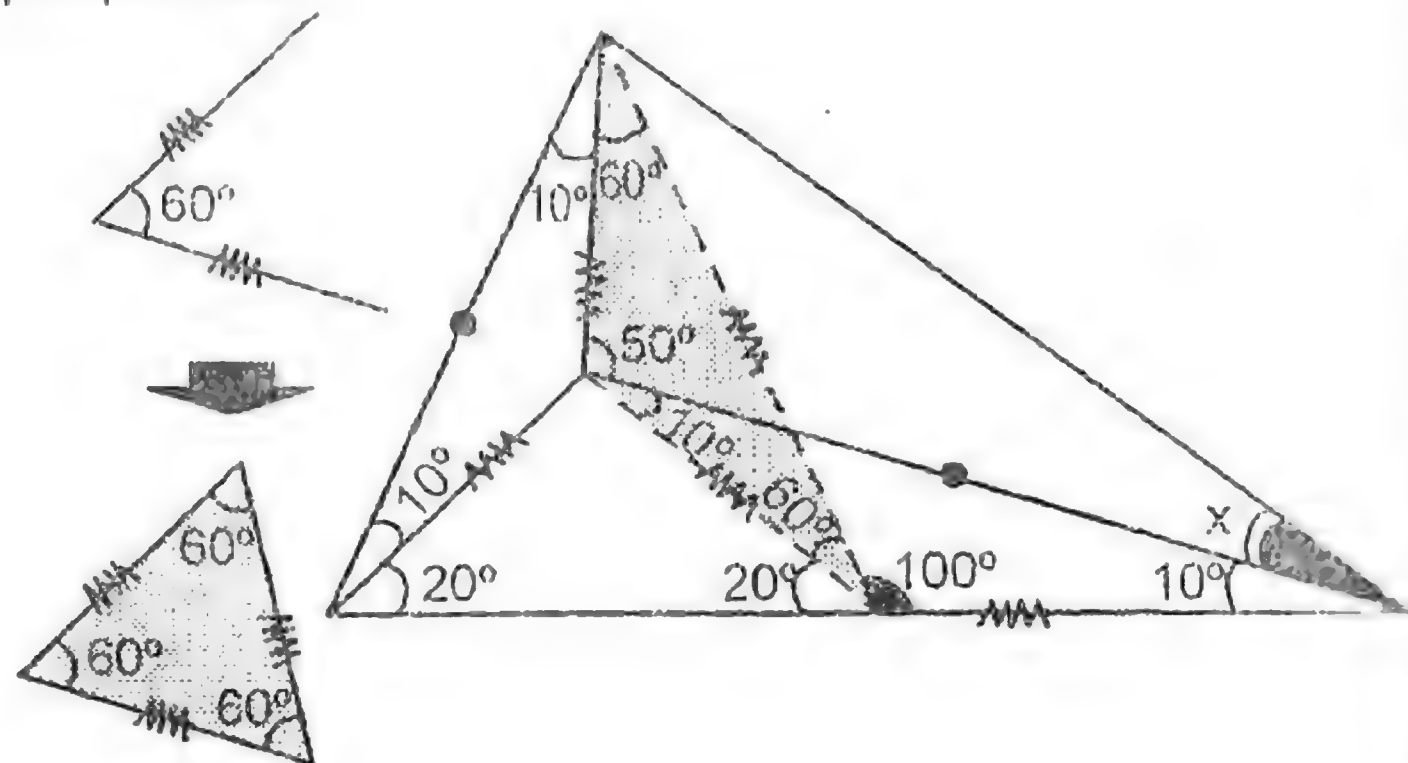


Paso N° 3:

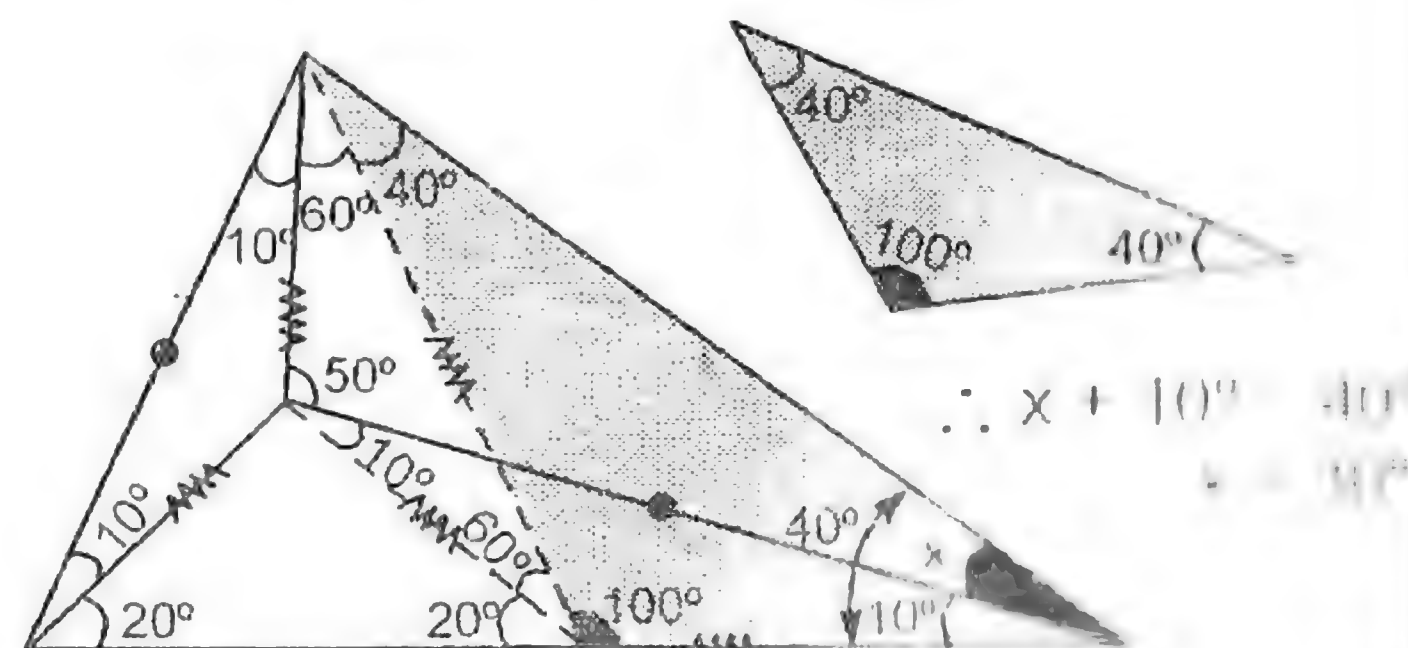
Se observa que se tiene un cuadrilátero cóncavo, donde se cumple:



Paso N° 4: En la figura se observa la siguiente propiedad:



Paso N° 5: Ahora, tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

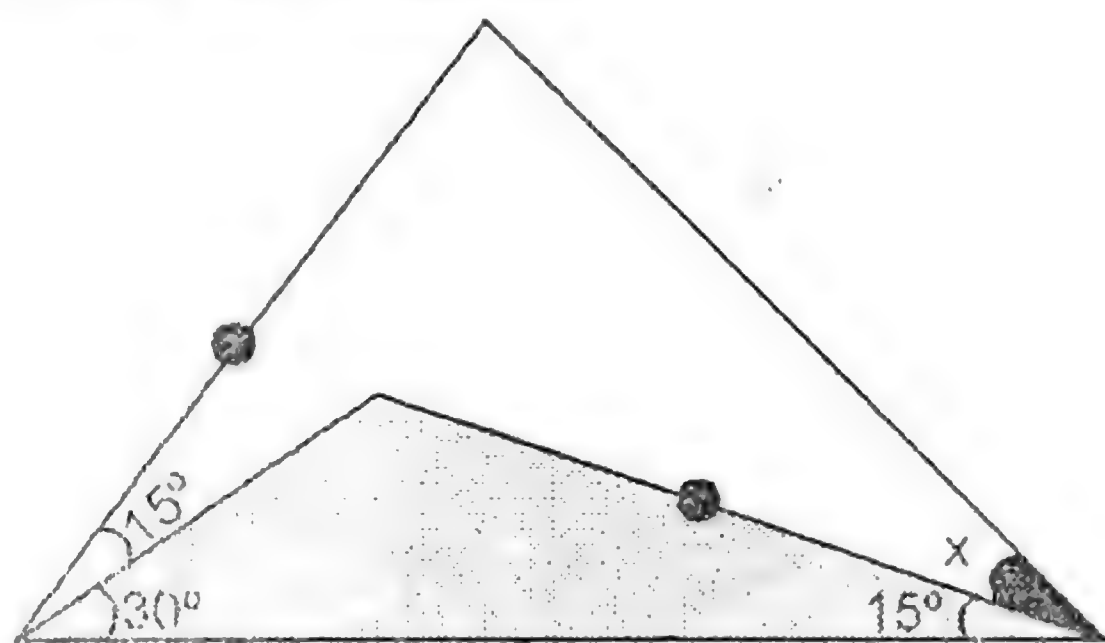


$$\therefore x + 10^\circ = 40^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

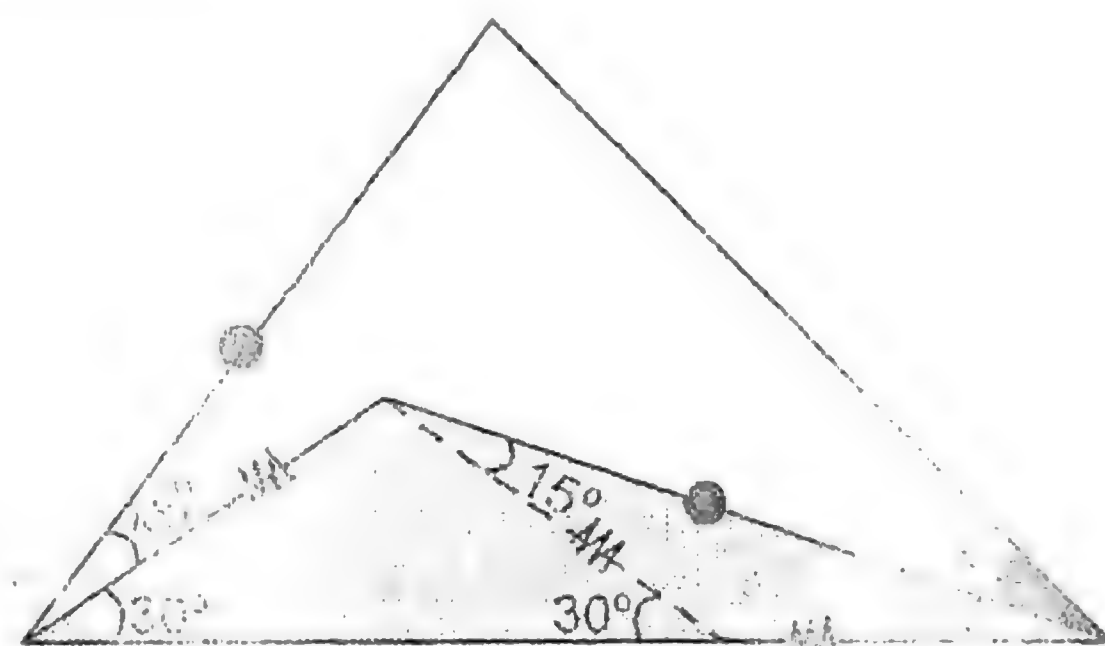
Solución No 56

En la figura se observa:



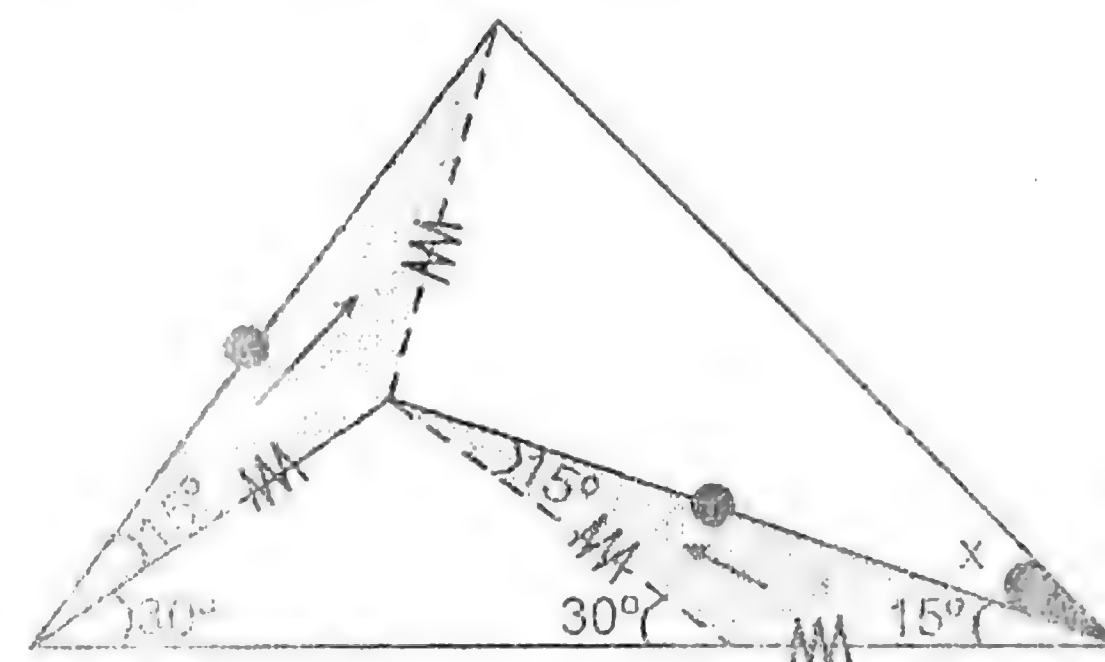
Paso N° 1:

Observamos en el triángulo sombreado que tiene ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer criterio de construcción.



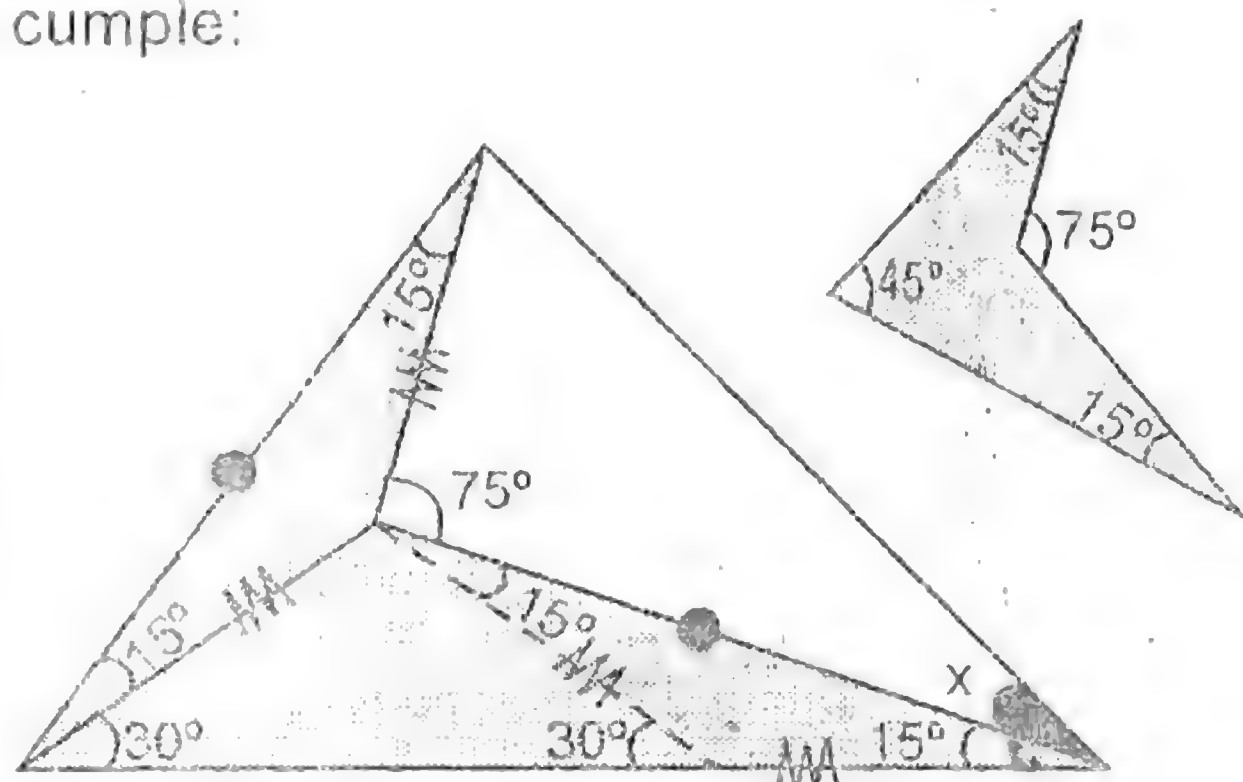
Paso N° 2:

Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos que son congruentes; caso (L.A.L.)



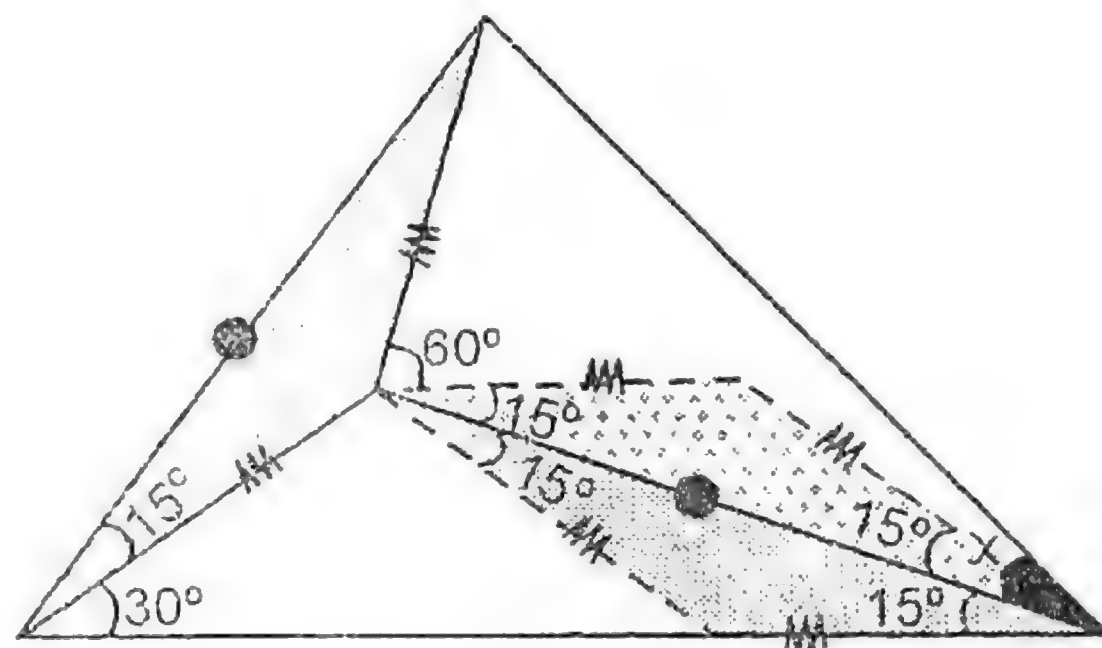
Paso N° 3:

Ahora tenemos un cuadrilátero cóncavo donde se cumple:

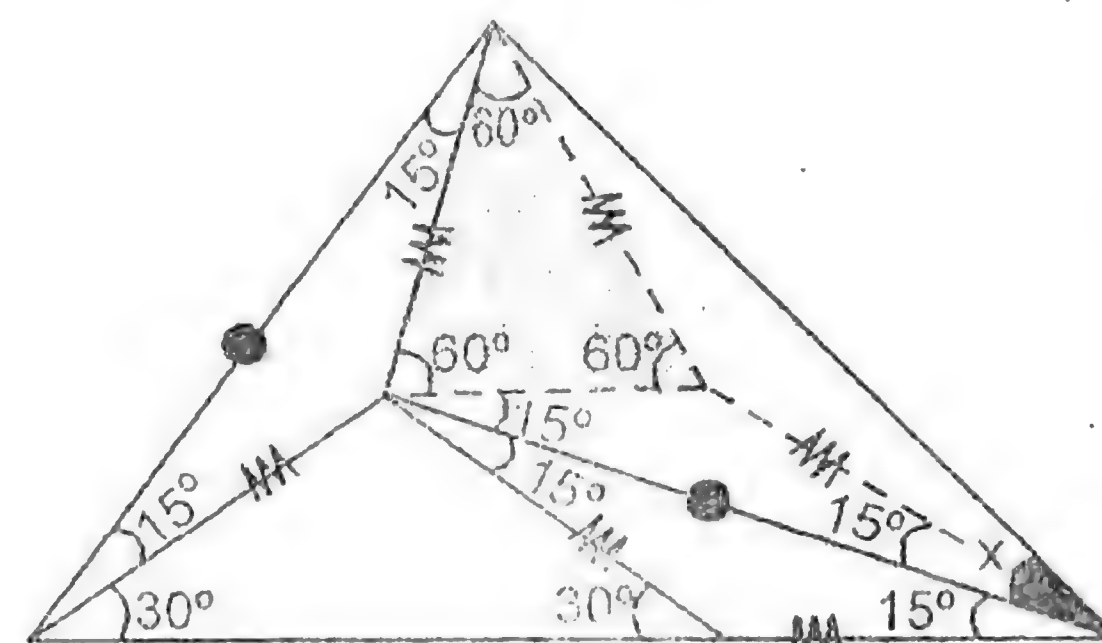
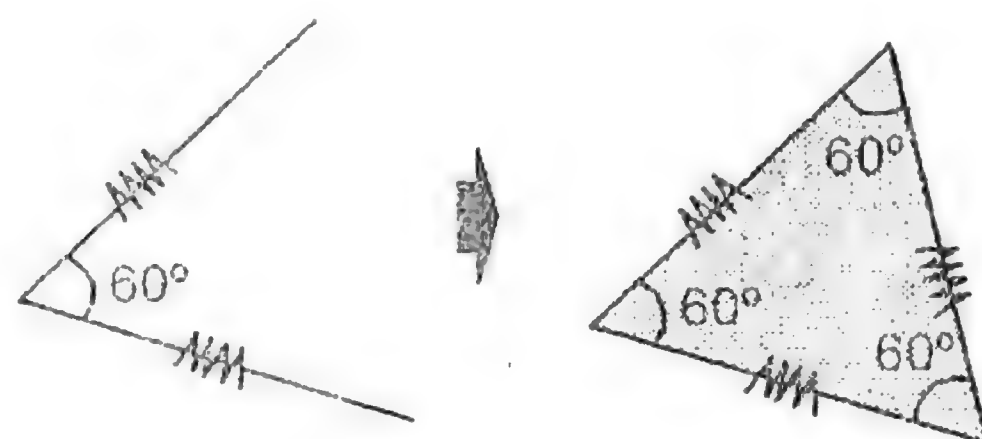


Paso N° 4:

Luego trazamos otro triángulo congruente de la siguiente manera para así obtener lados iguales.

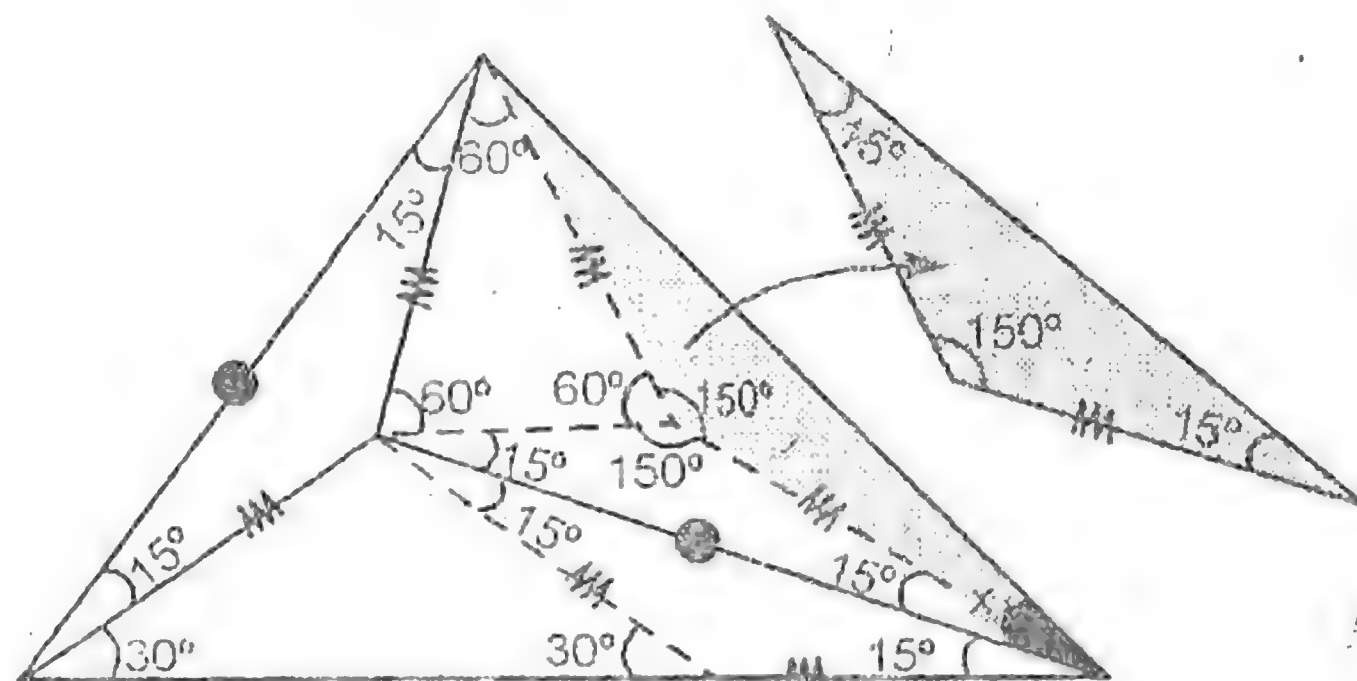


Paso N° 5: Se observa la siguiente propiedad, donde se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 6:

Finalmente se observa que tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

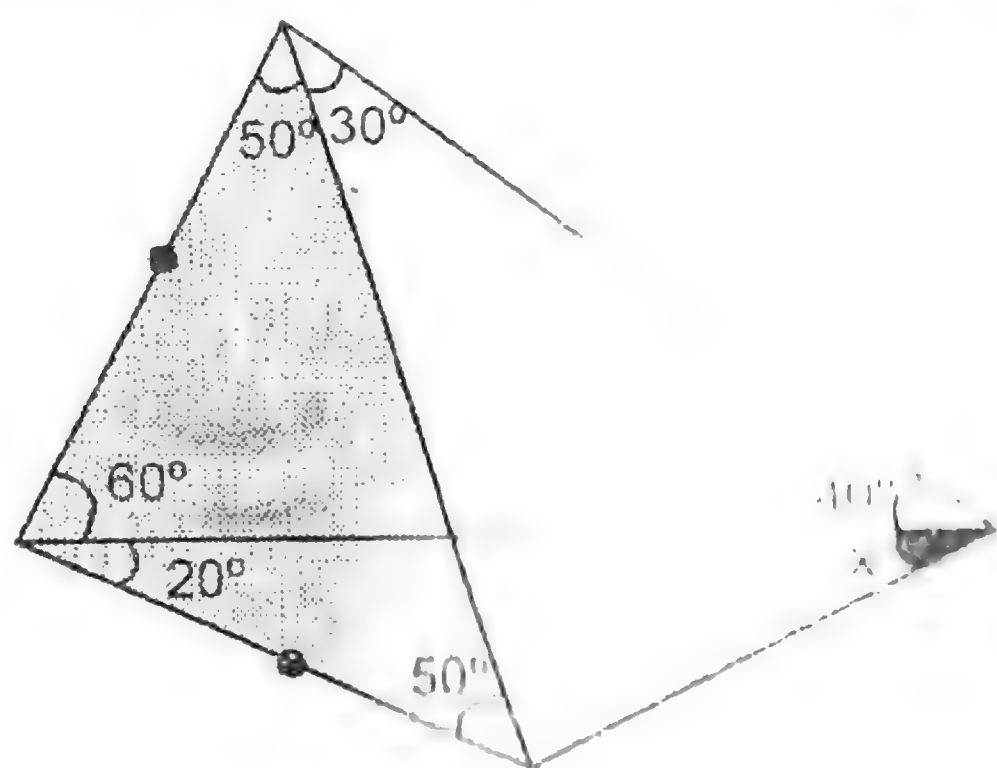


$$\therefore x = 15^\circ + 15^\circ$$

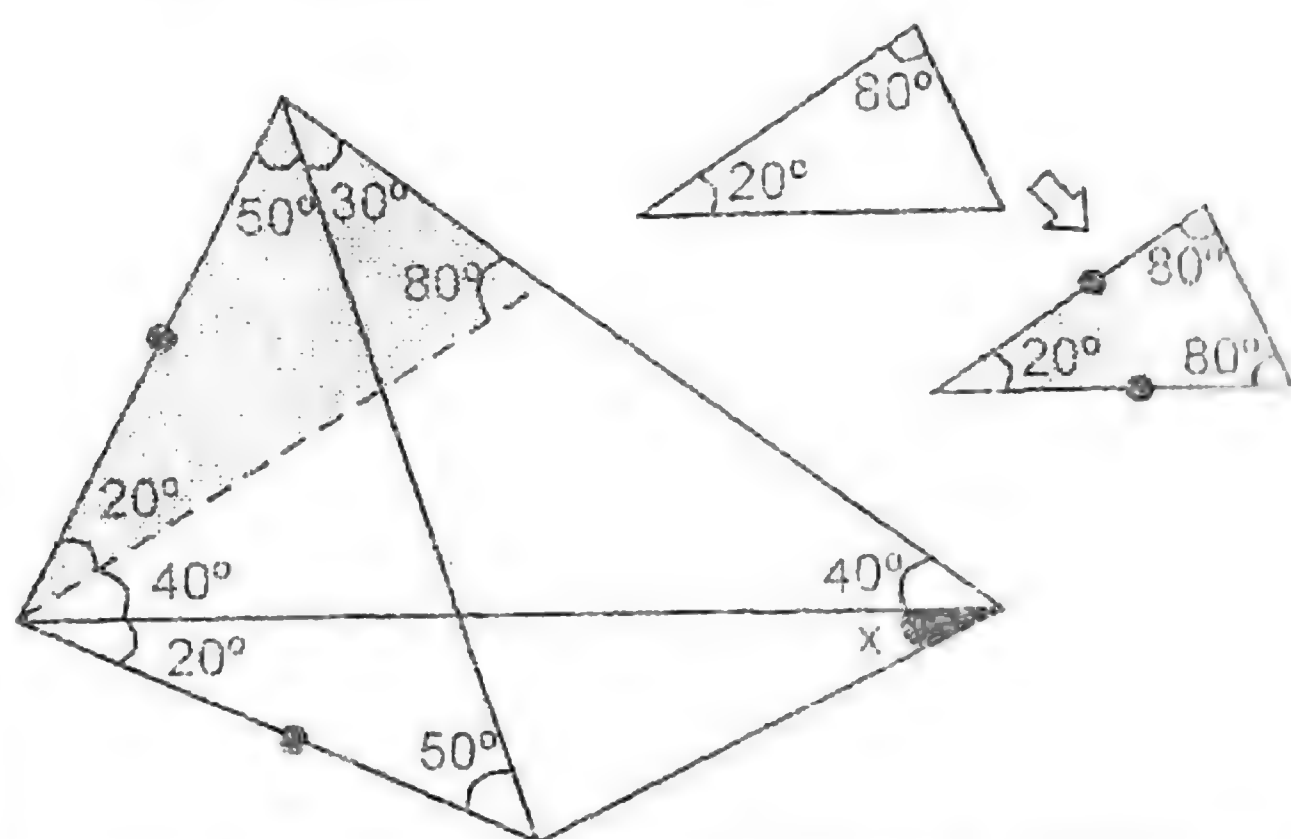
$$x = 30^\circ$$

Solución N° 57

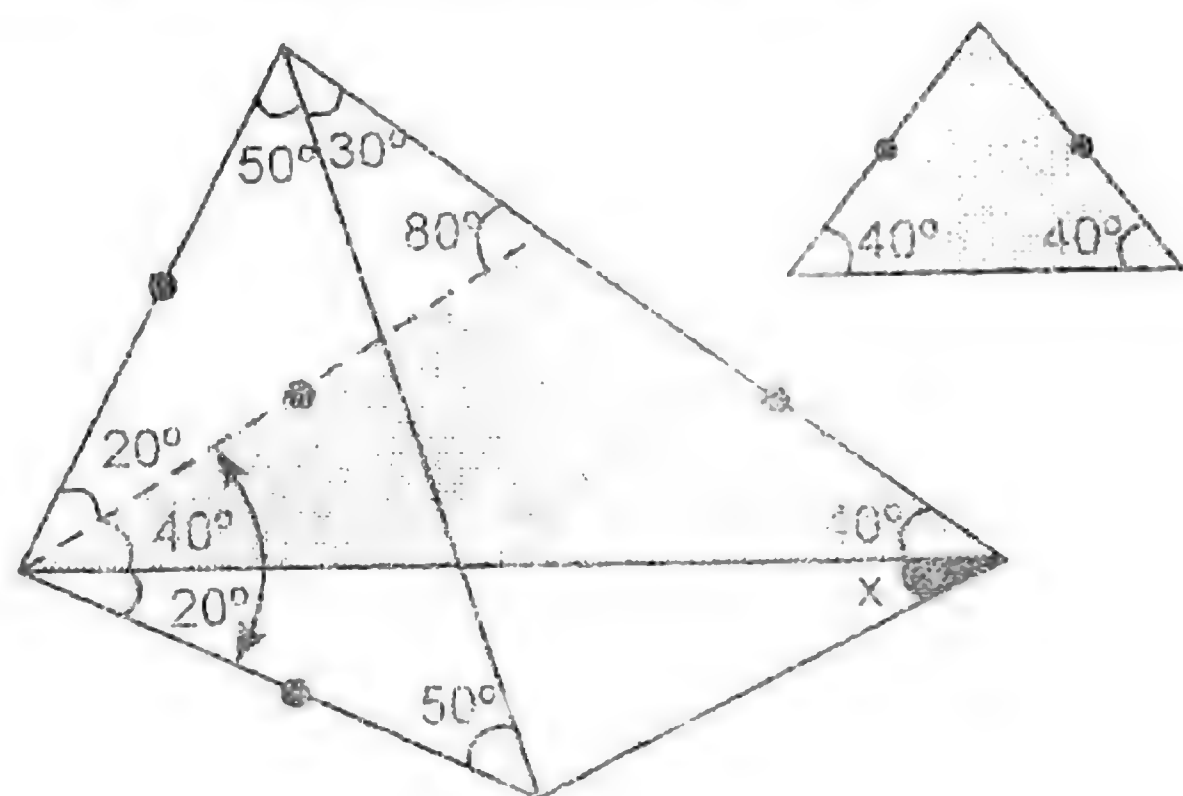
En la figura completamos los ángulos interiores.



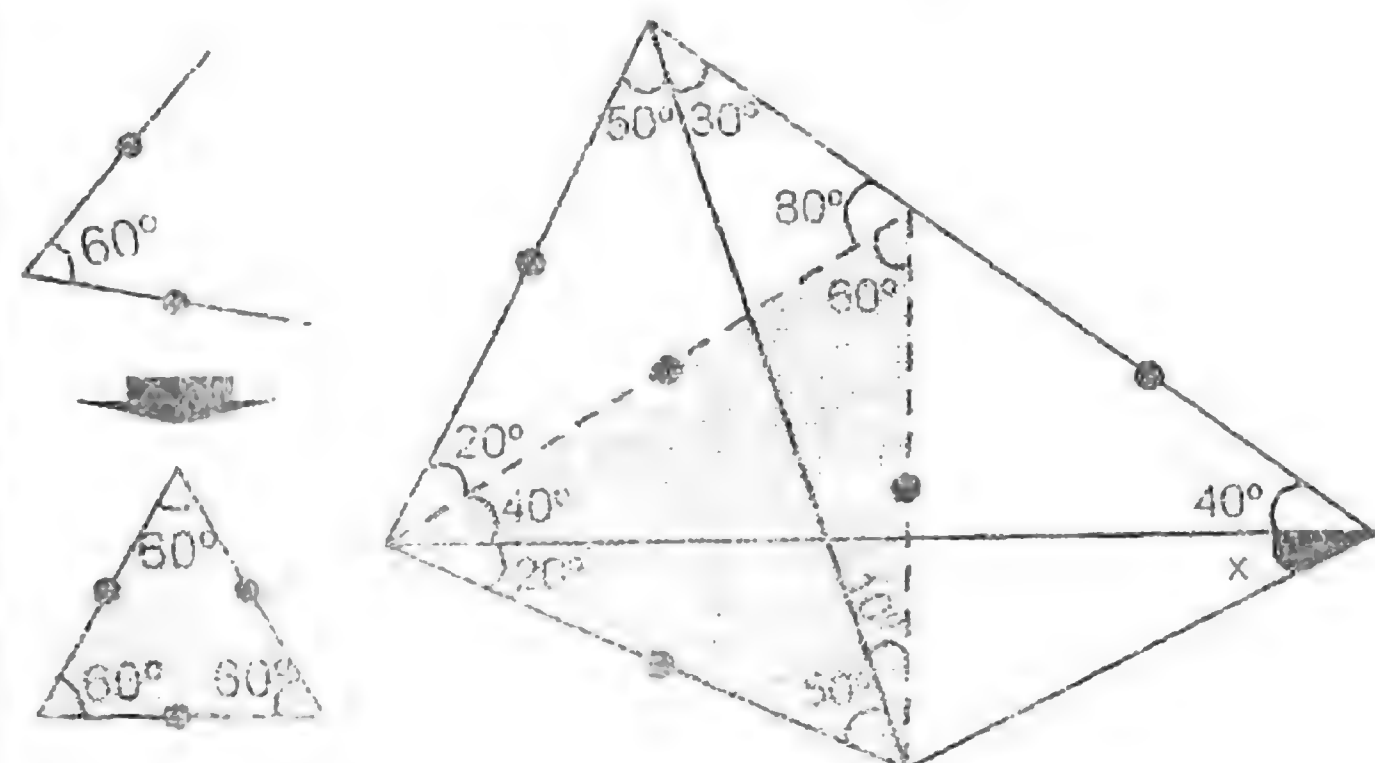
Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



También se observa otro triángulo isósceles:

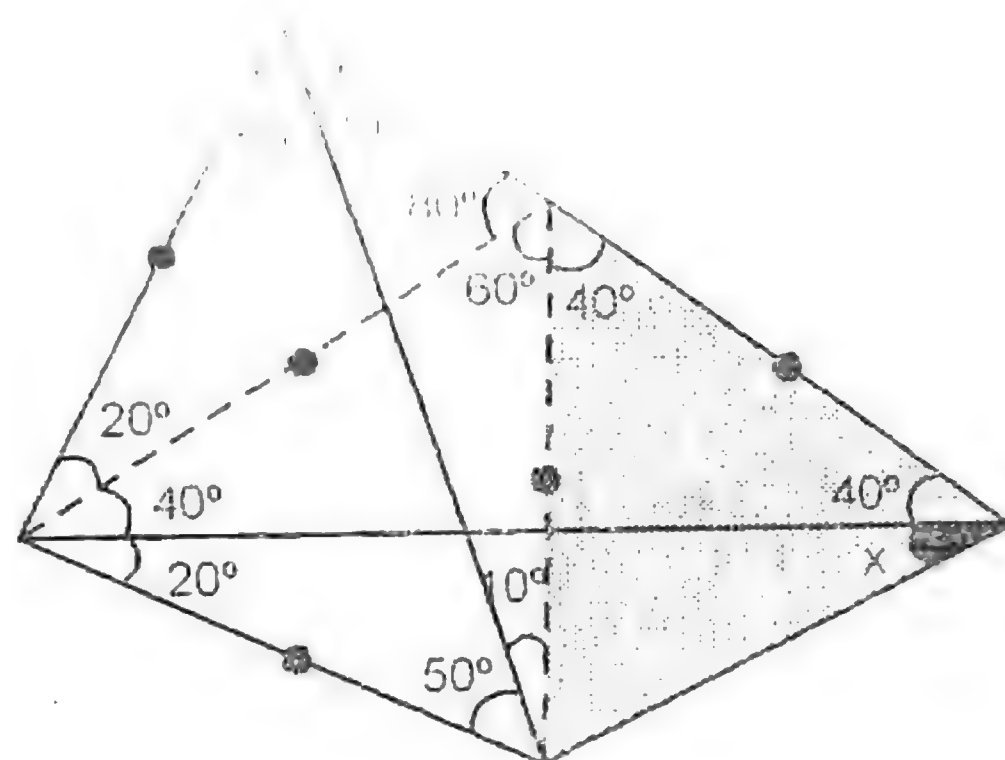


Paso N° 2: Ahora observamos en la figura que tenemos un triángulo equilátero.



Paso N° 1:

Entonces se observa que tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple

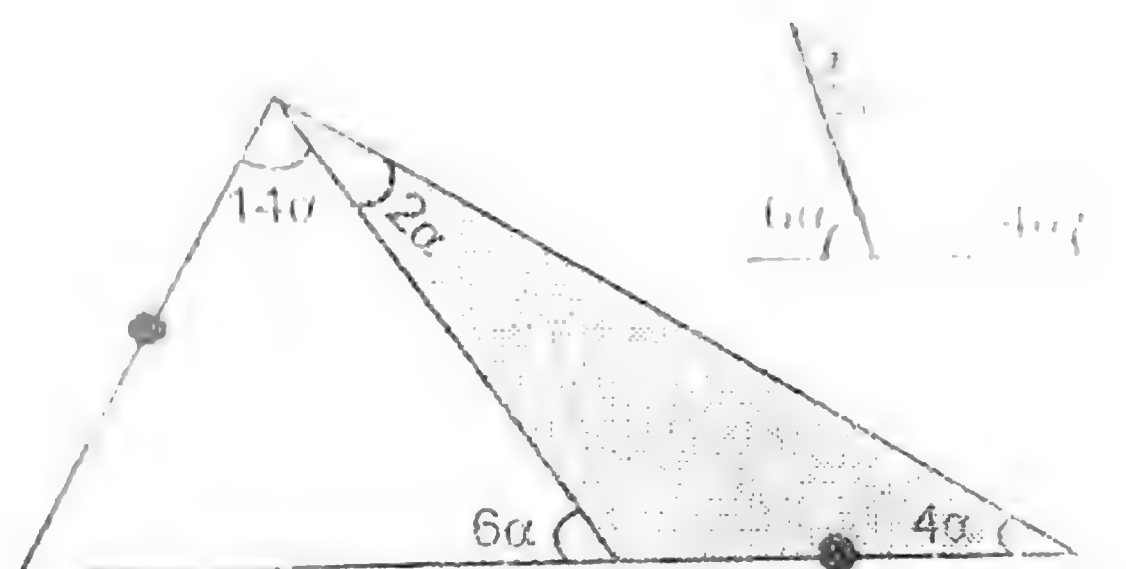


$$x + 40^\circ = 70^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

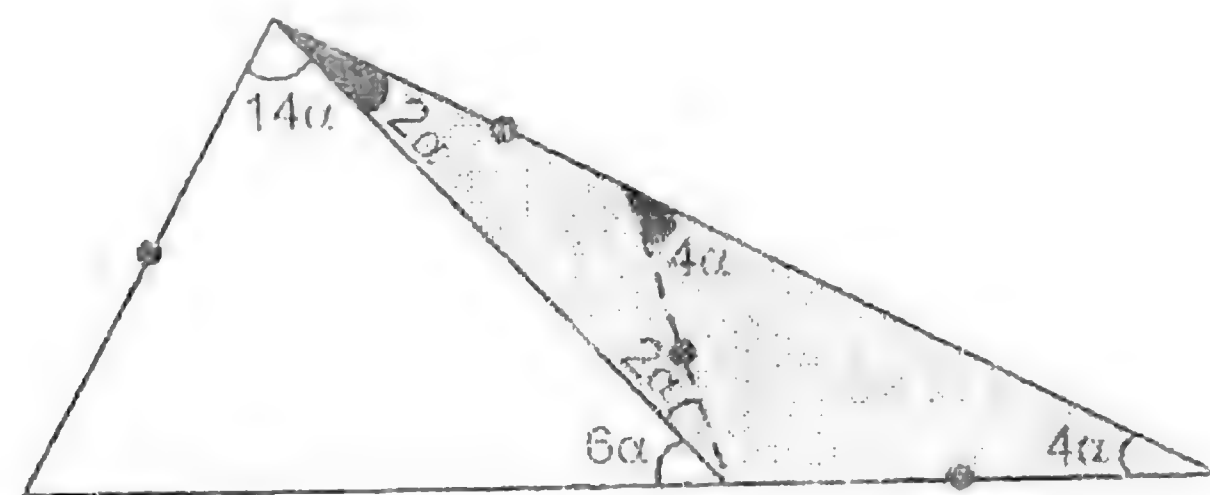
Solución N° 58

De la figura observamos



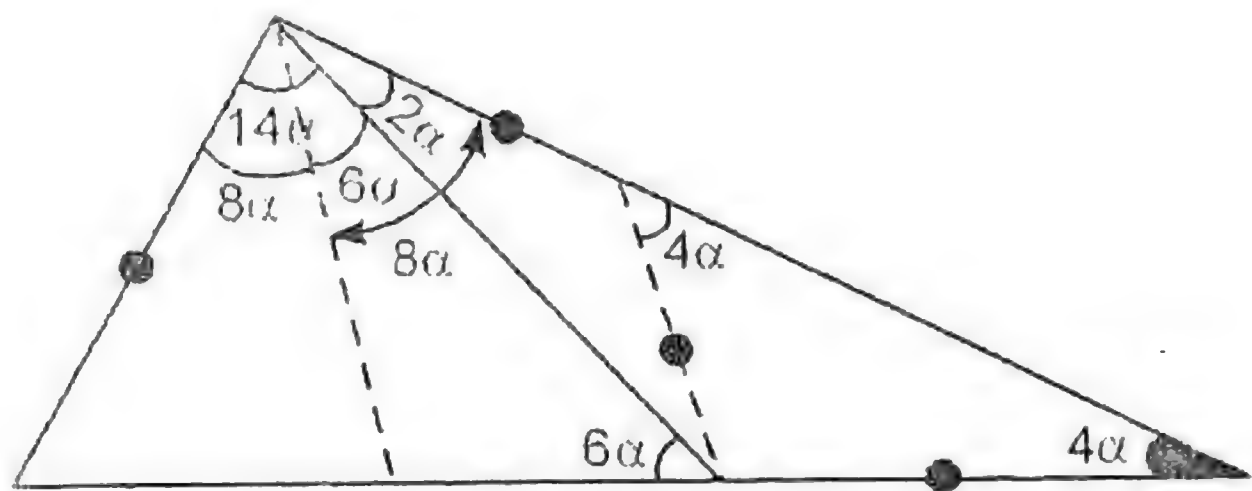
Paso N° 1:

Tenemos un triángulo donde existe ángulos en la relación de uno a dos, entonces realizaremos el siguiente trazo.

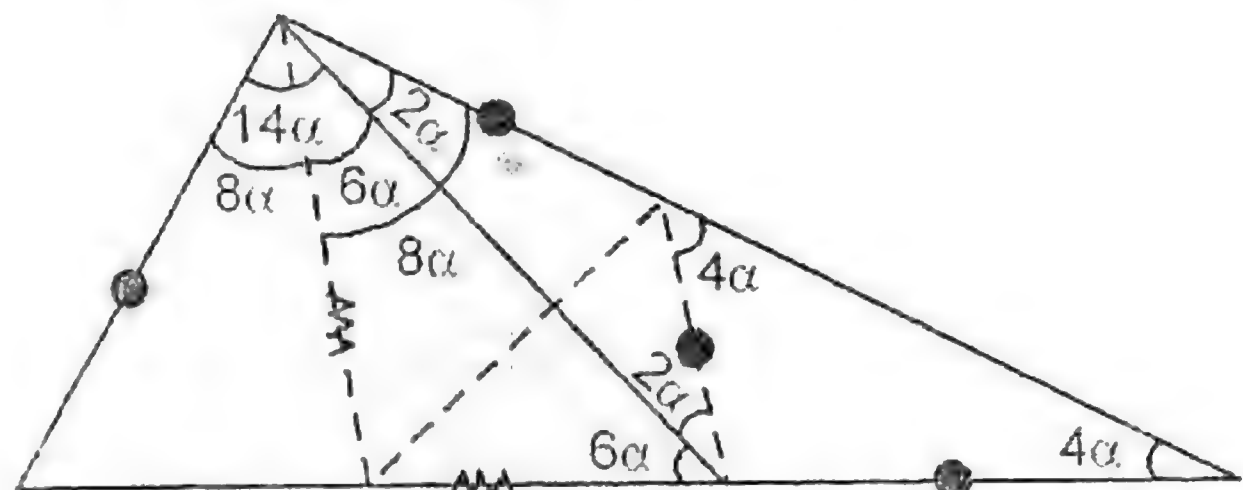


Paso N° 2:

Se construye triángulos congruentes, para ello hacemos el siguiente trazo.

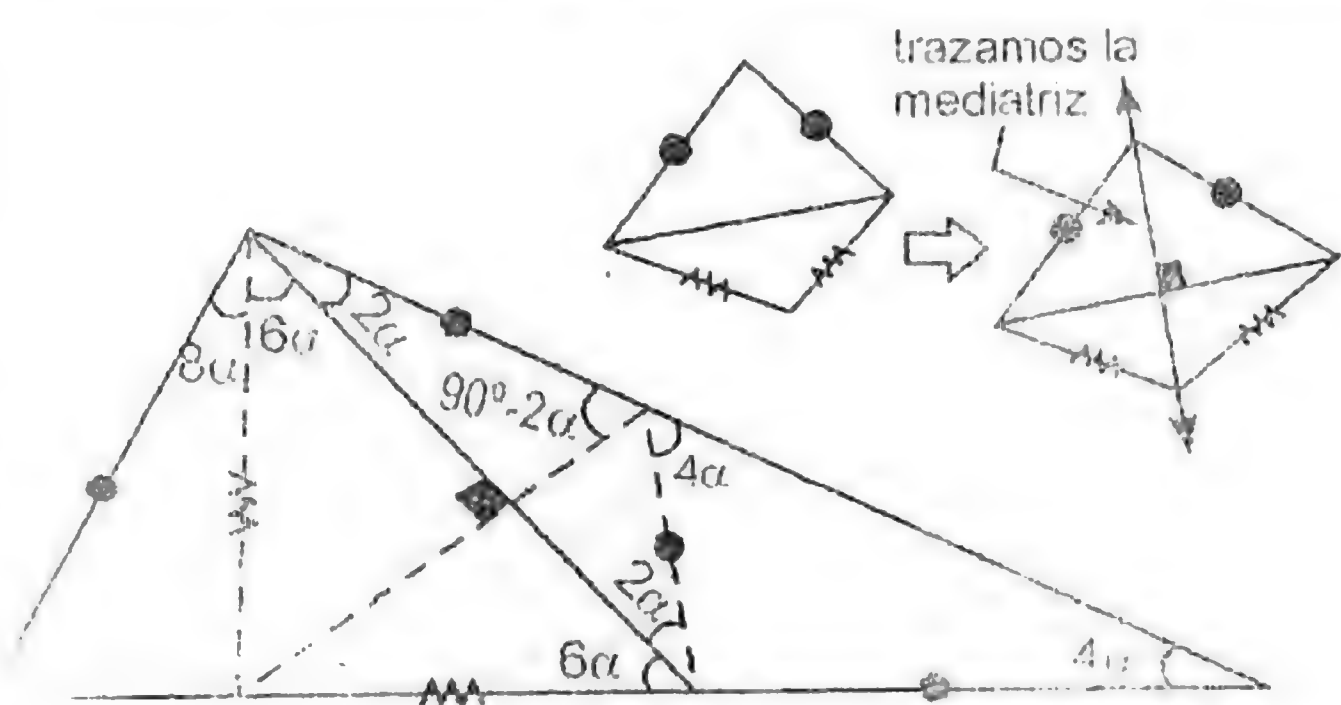


Con ello generamos triángulos isósceles:

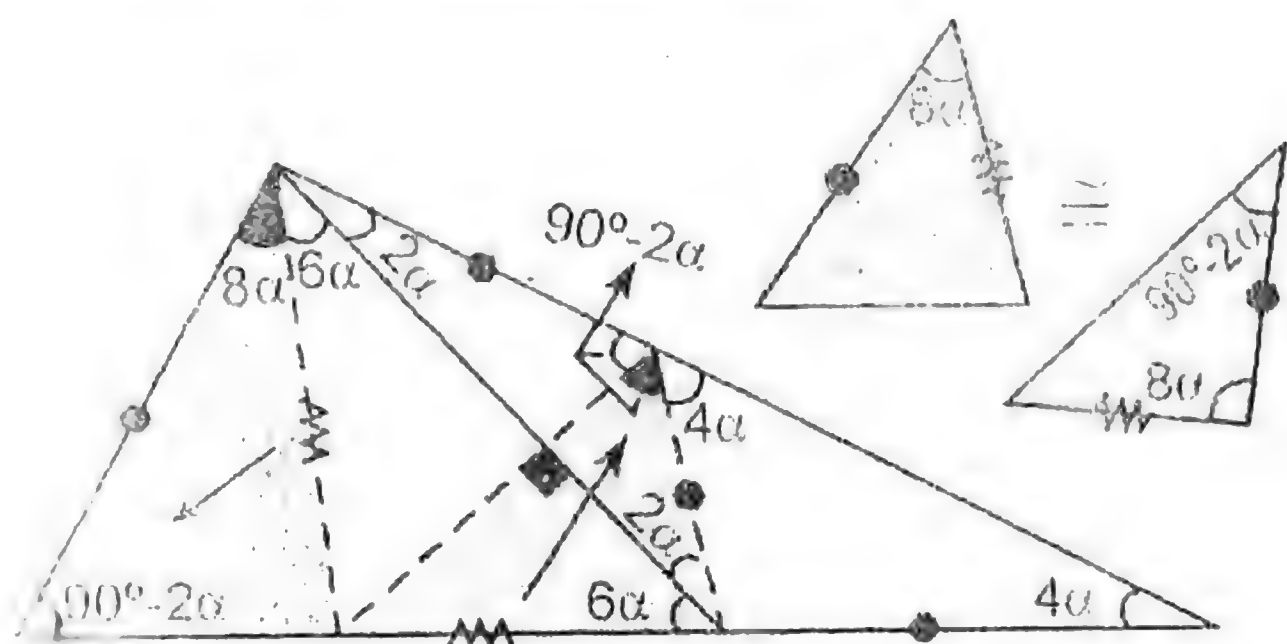


Paso N° 3:

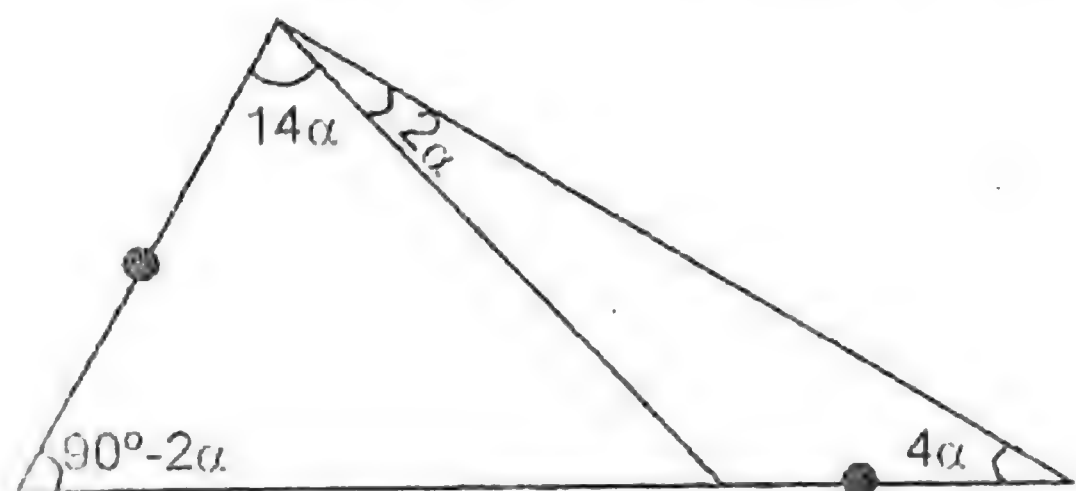
También se cumple la propiedad de la mediatriz.



Paso N° 4: Ahora en la figura se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



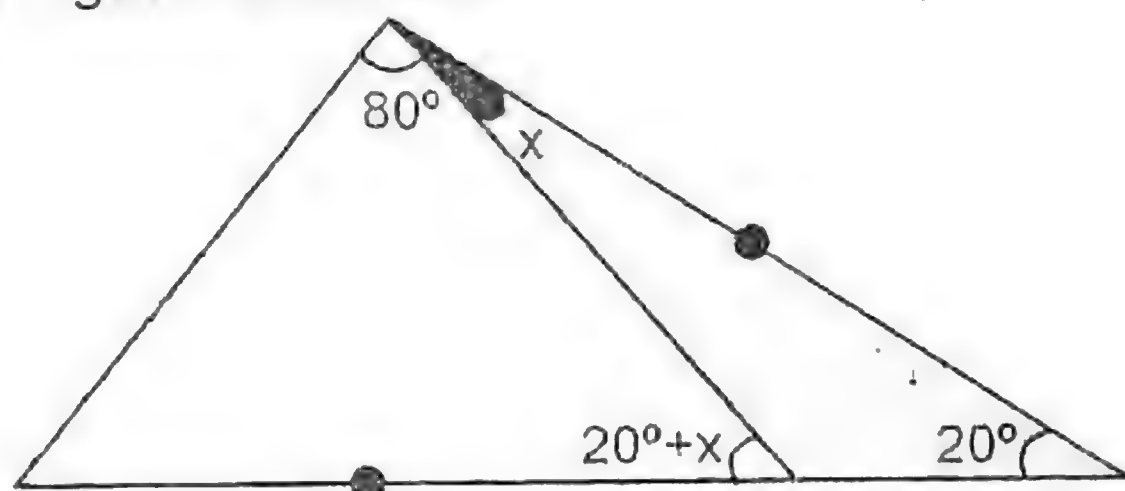
Luego se observa en la figura total se cumple:



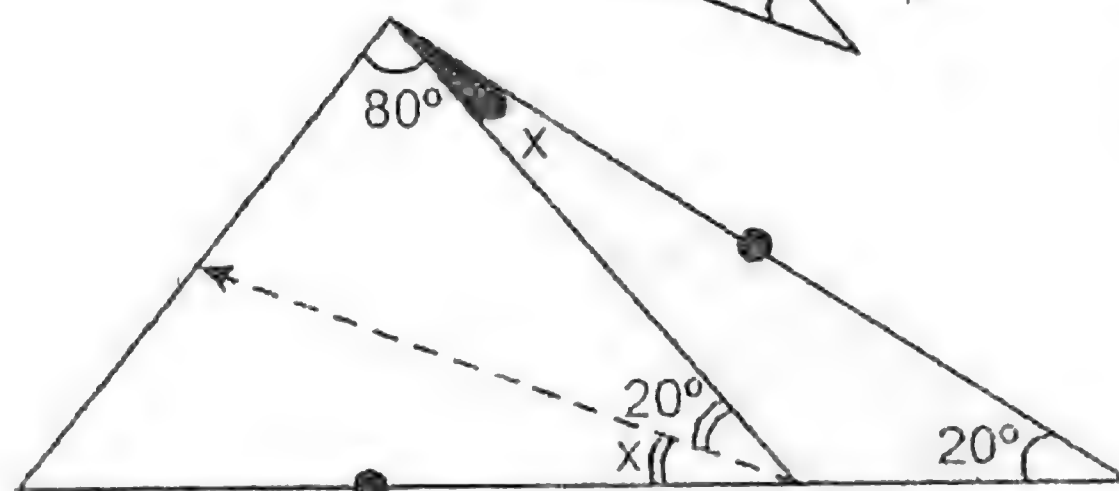
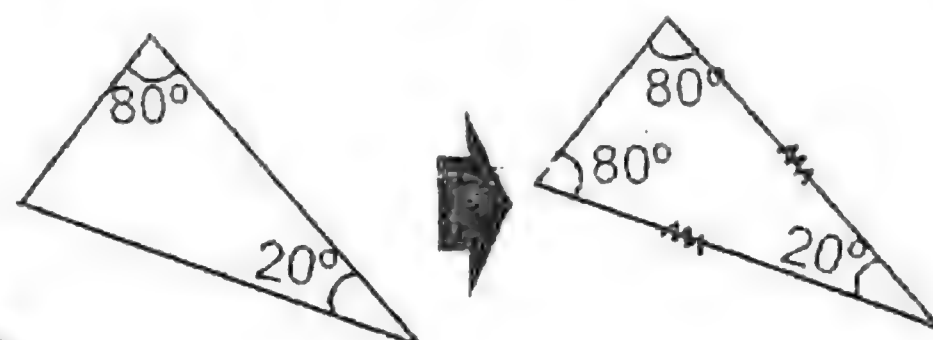
$$\begin{aligned} 90^\circ - 2\alpha + 14\alpha + 2\alpha + 4\alpha &= 180^\circ \\ 18\alpha &= 90^\circ \\ \alpha &= 5^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 59

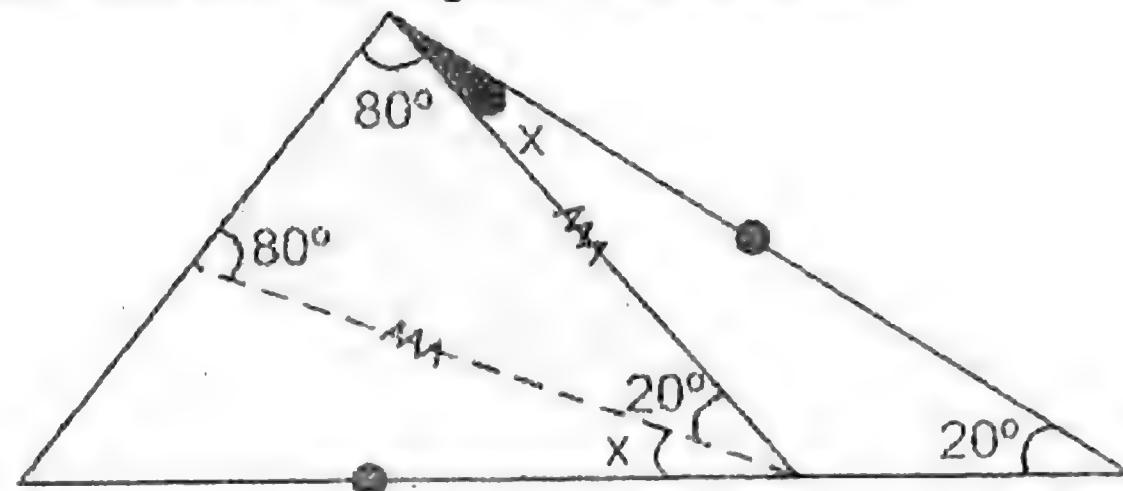
Se la figura tenemos:



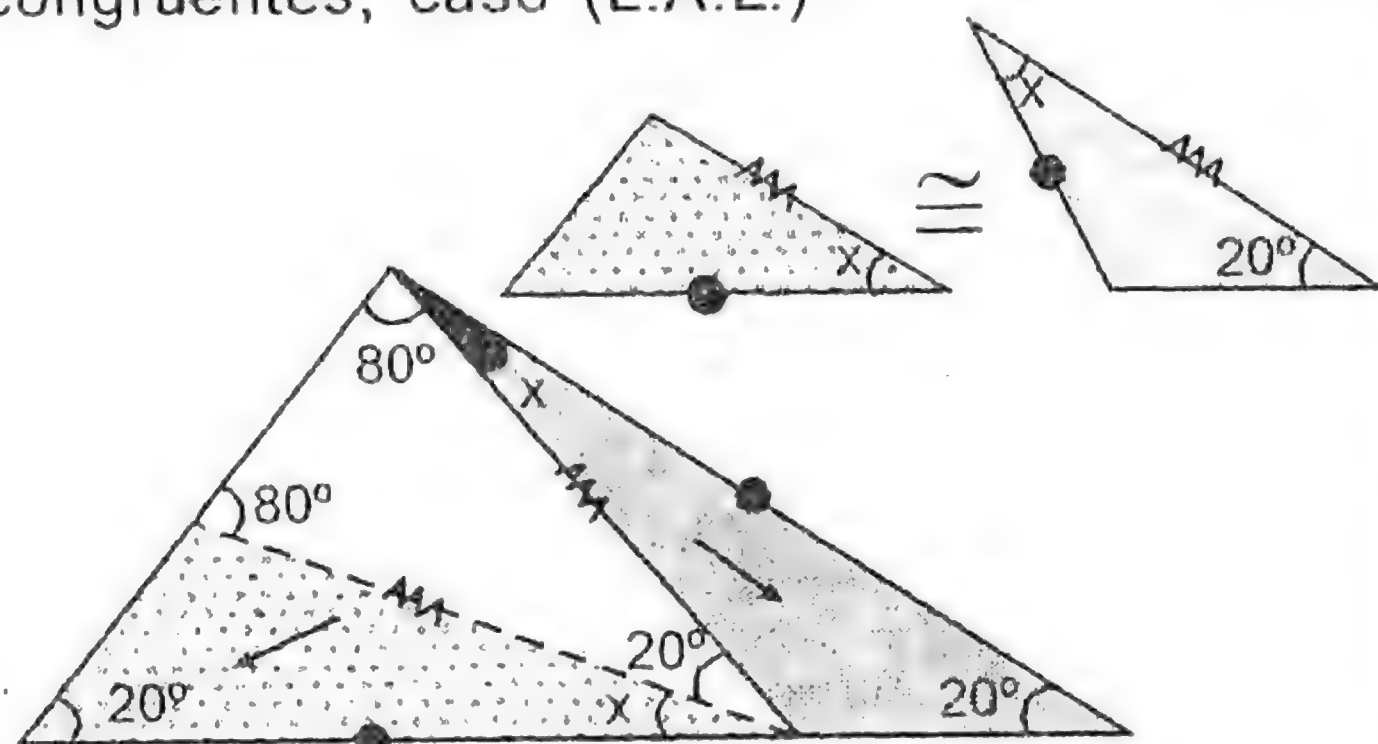
Paso N° 1: Como tenemos lados iguales en forma alternada, buscamos en la figura triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



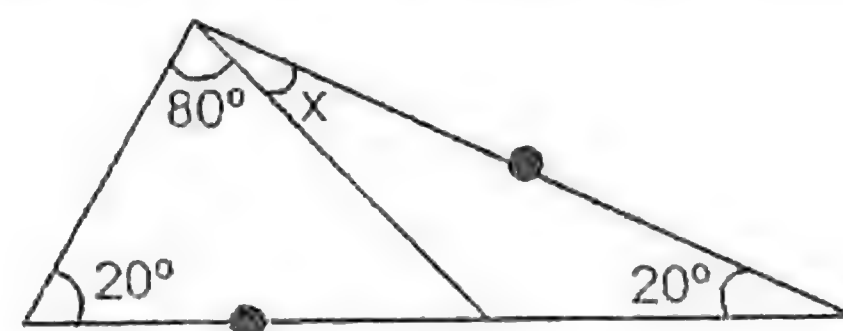
Se obtiene un triángulo isósceles:



Paso N° 2: Luego se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



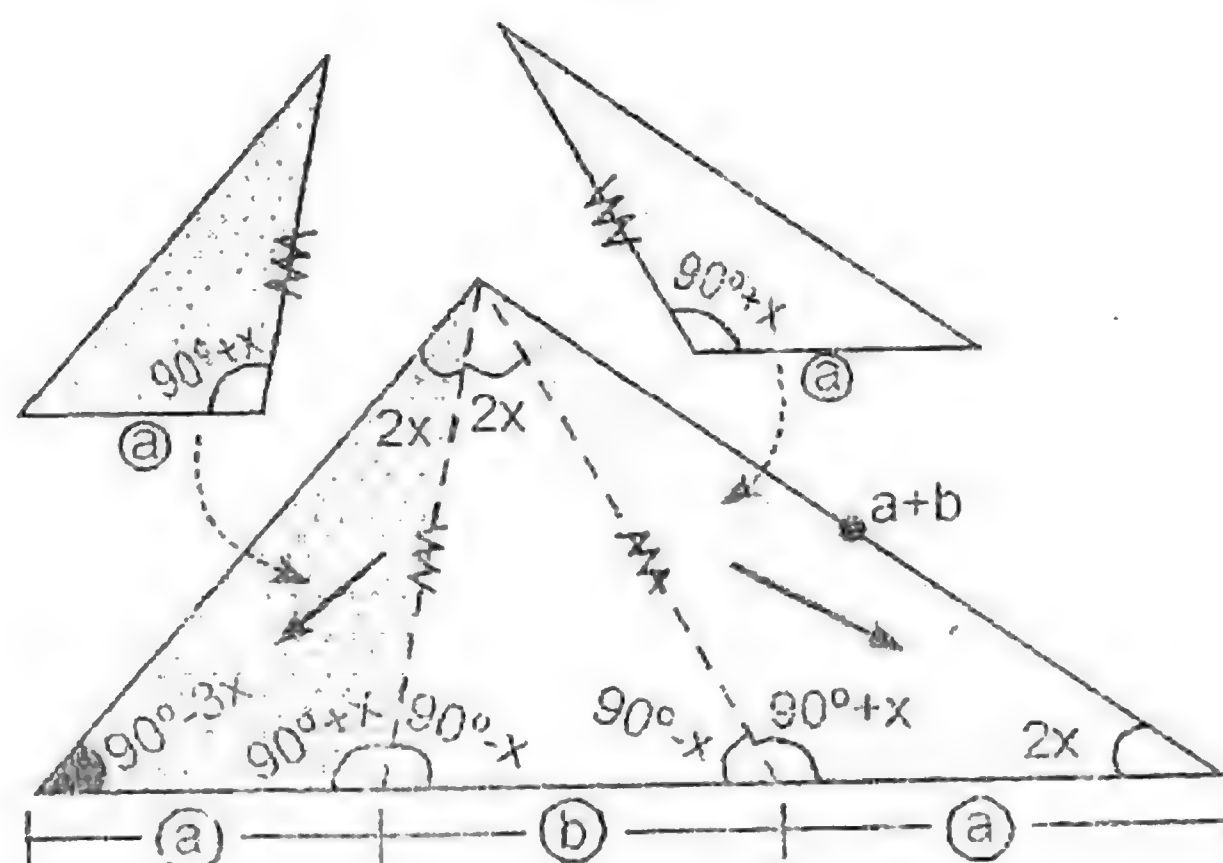
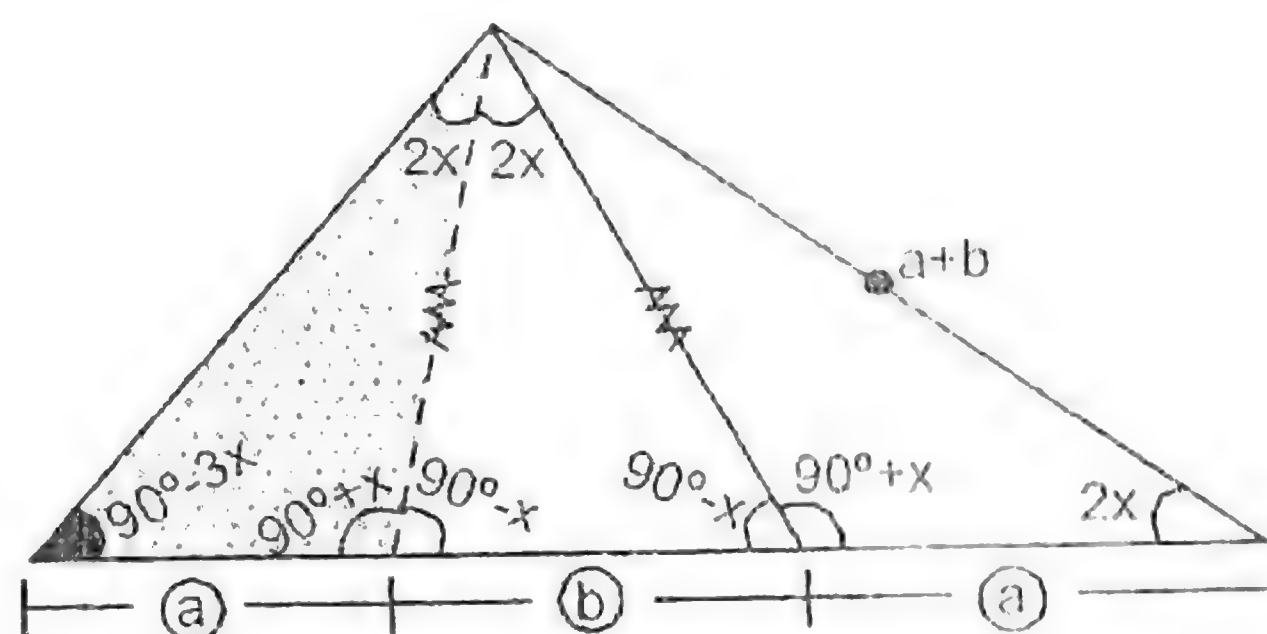
Paso N° 3: En la figura total, se observa:



$$\begin{aligned} 20^\circ + 80^\circ + x + 20^\circ &= 180^\circ \\ x &= 60^\circ \end{aligned}$$

Paso N° 3:

Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)



99

Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

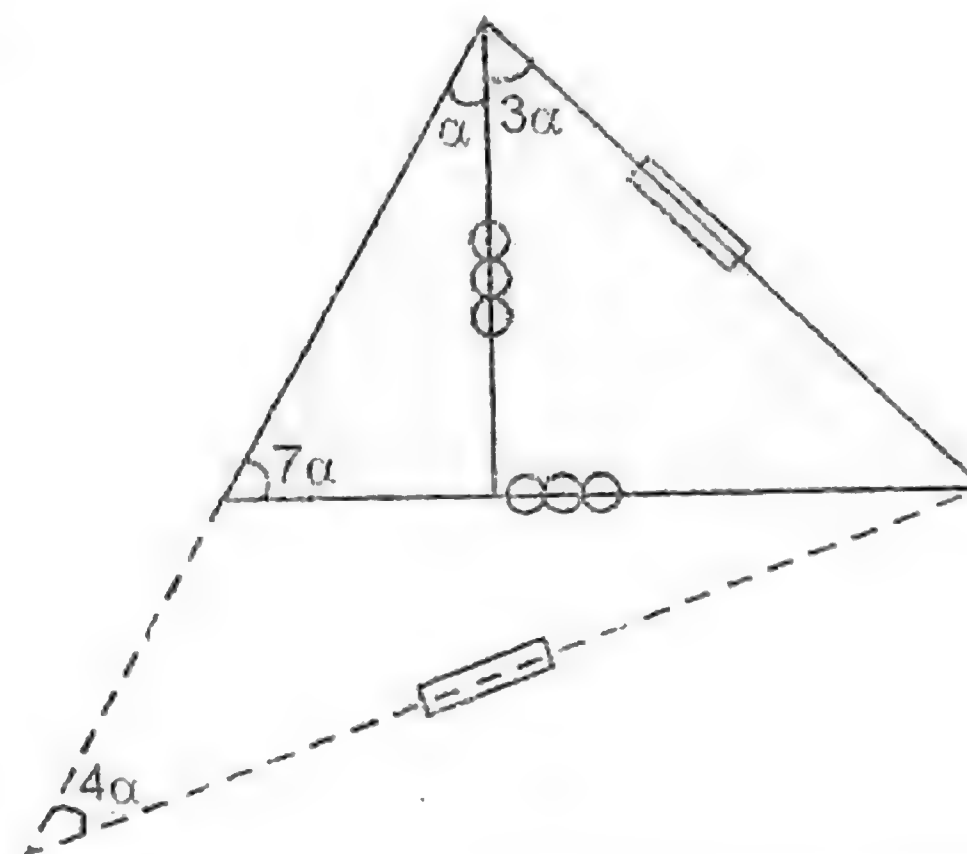
$$90^\circ - 3x = 2x$$

$$90^\circ = 5x$$

$$180^\circ = x$$

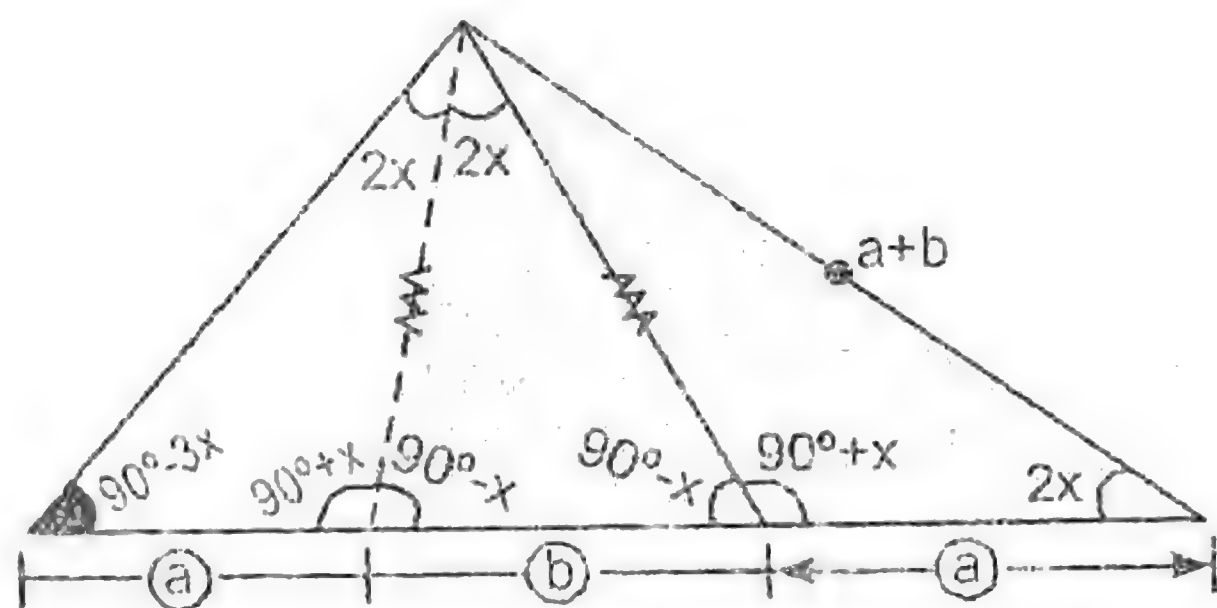
Solución N° 61:

Paso N° 1: Aquí realizamos el siguiente trazo; Formamos un triángulo isósceles para obtener lados iguales de la siguiente manera: Aplicando el quinto criterio de construcción:



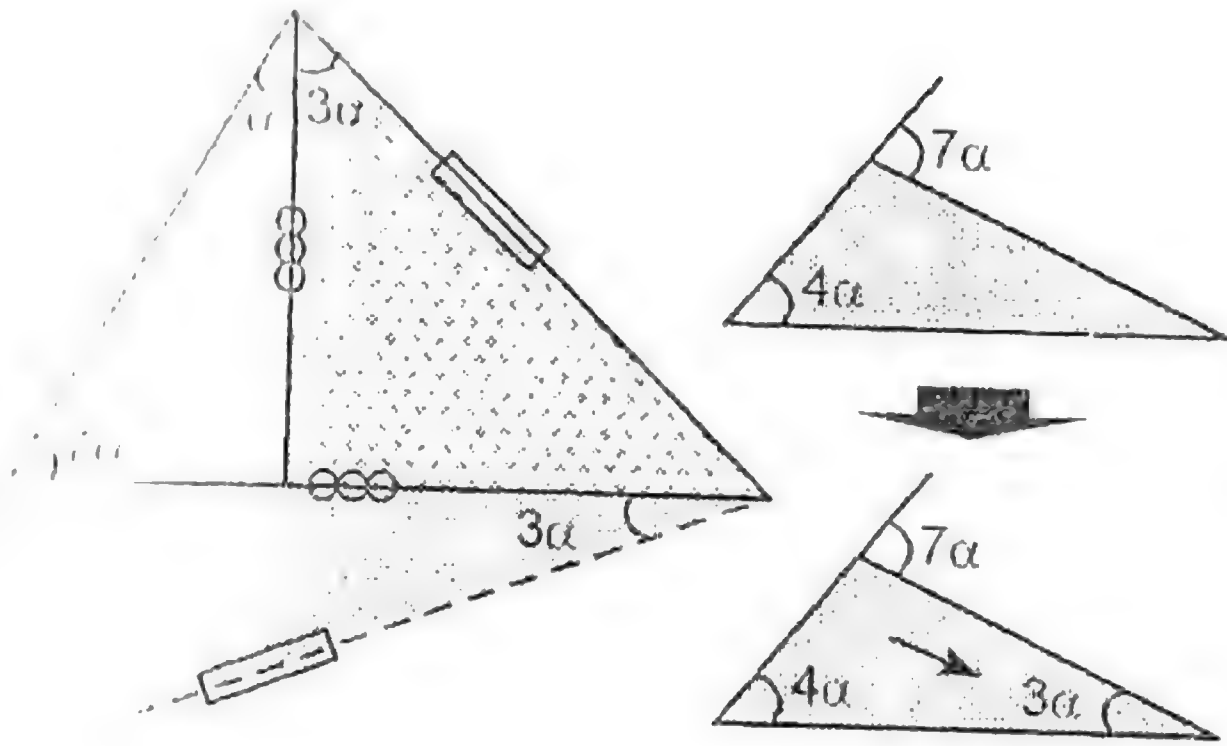
Paso N° 2:

Identificamos los lados iguales de la figura:

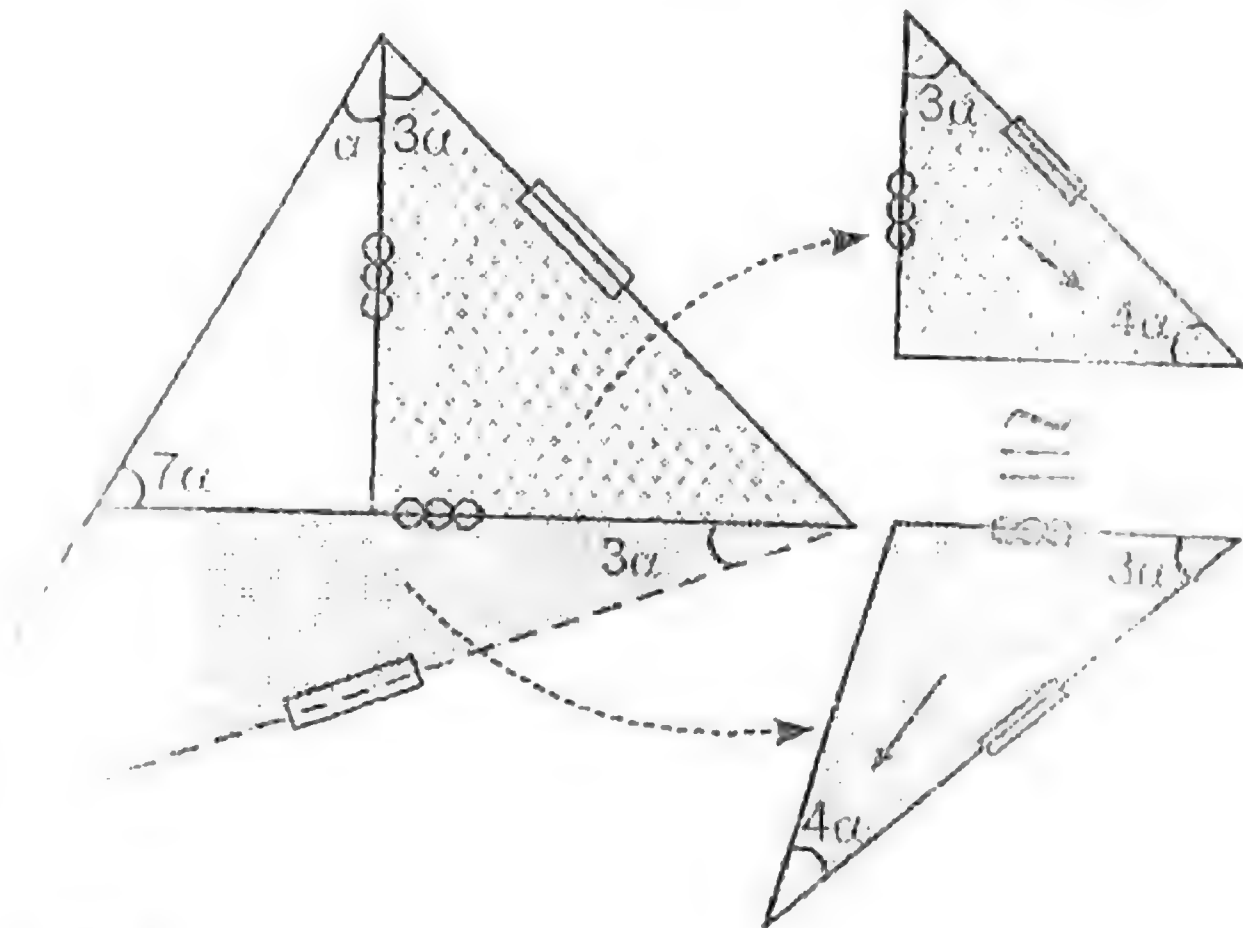


Una mente que ha recibido información matemática durante cierto tiempo, es una mente que razona para siempre de otra manera. (El autor)

También se observa:

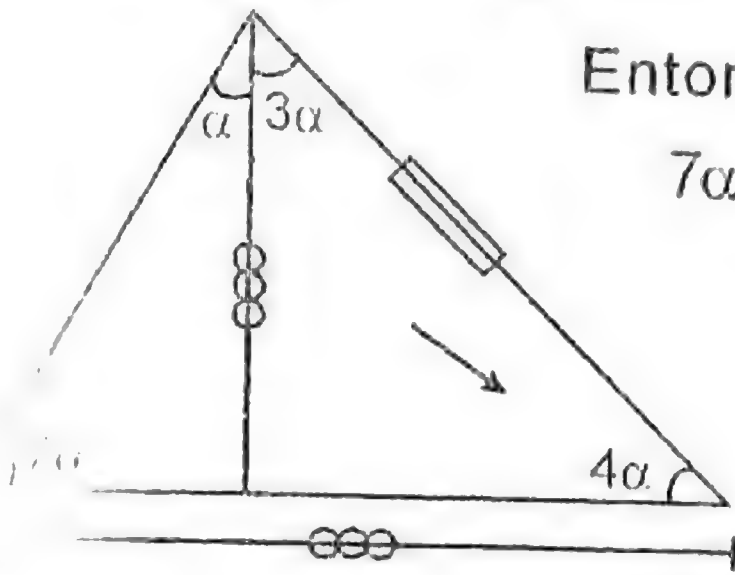


Paso N° 2: Ahora se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 3:

El principio de congruencia "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



Entonces se cumple:

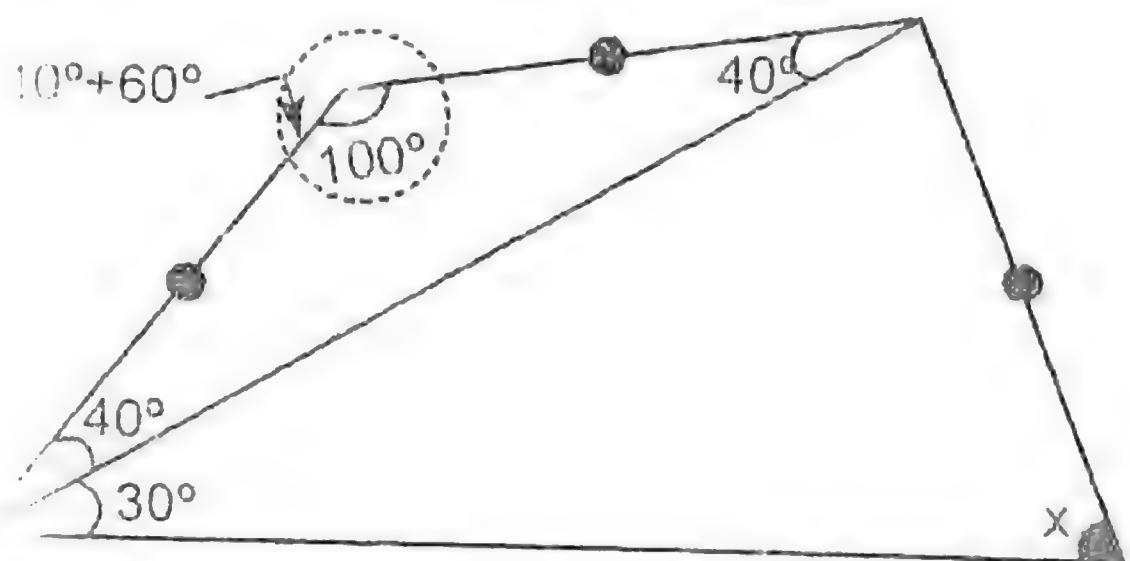
$$7\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$15\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 12^\circ$$

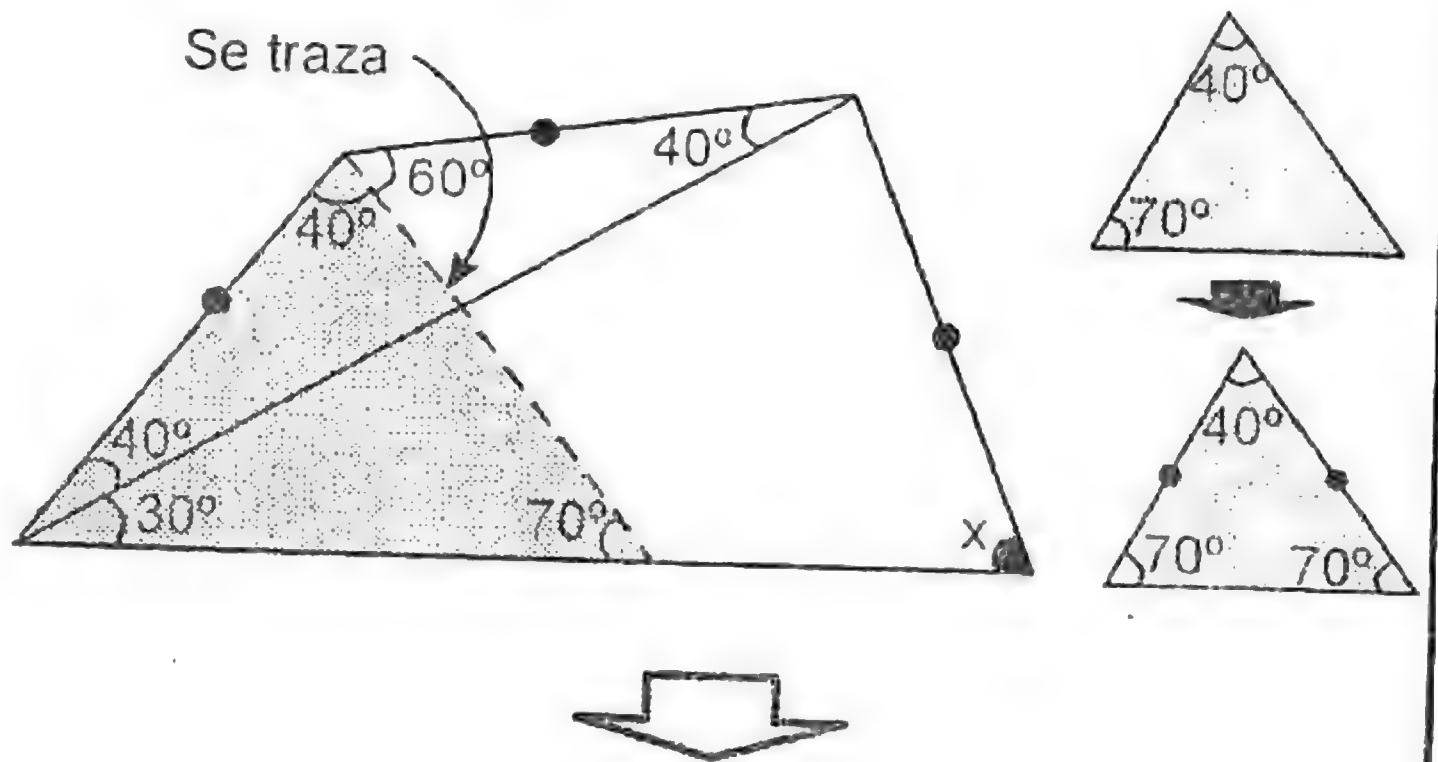
Añadición N° 62

En la figura, tenemos:



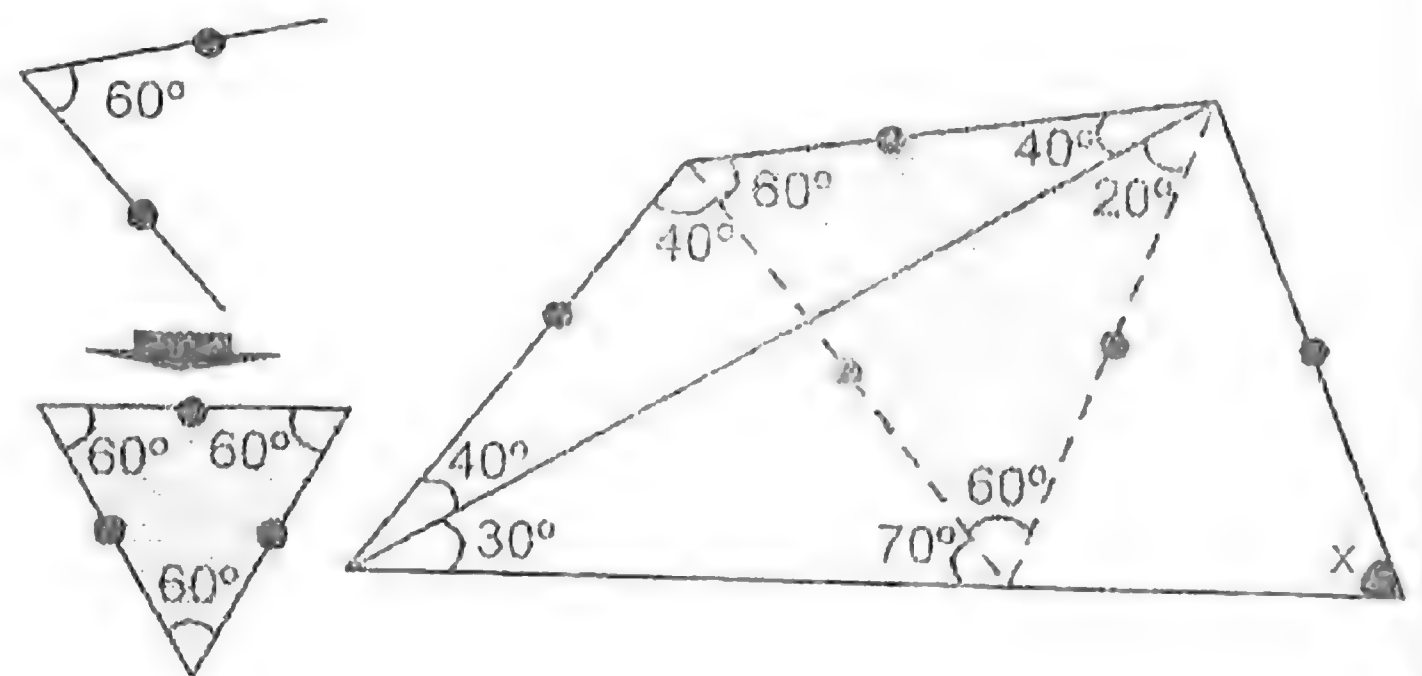
Paso N° 1:

Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



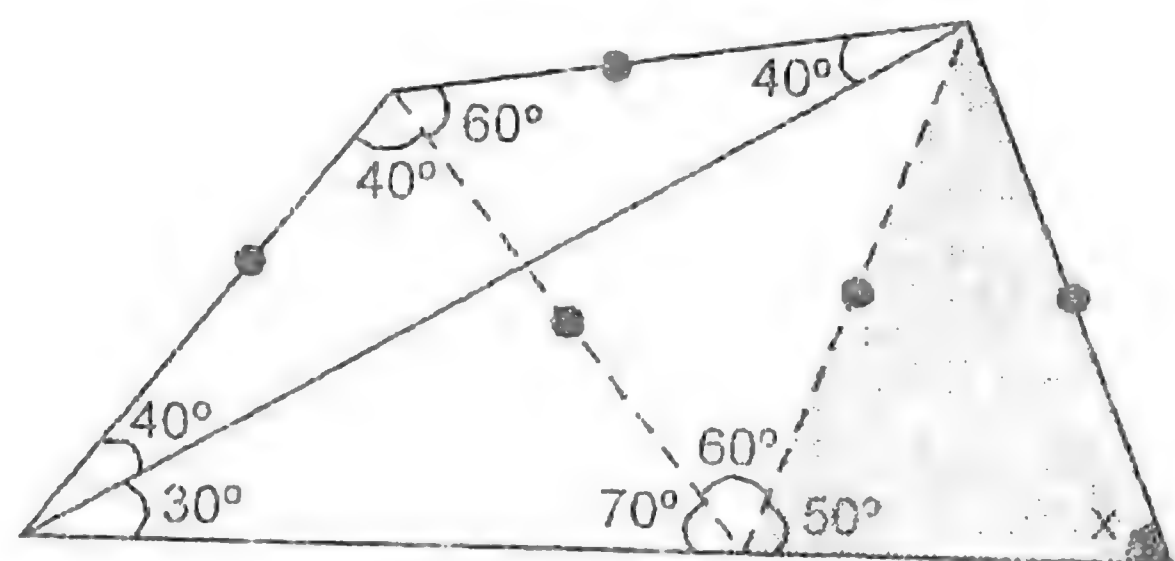
Paso N° 2:

En la figura mostrada se observa un triángulo equilátero.



Paso N° 3:

Finalmente se obtiene un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

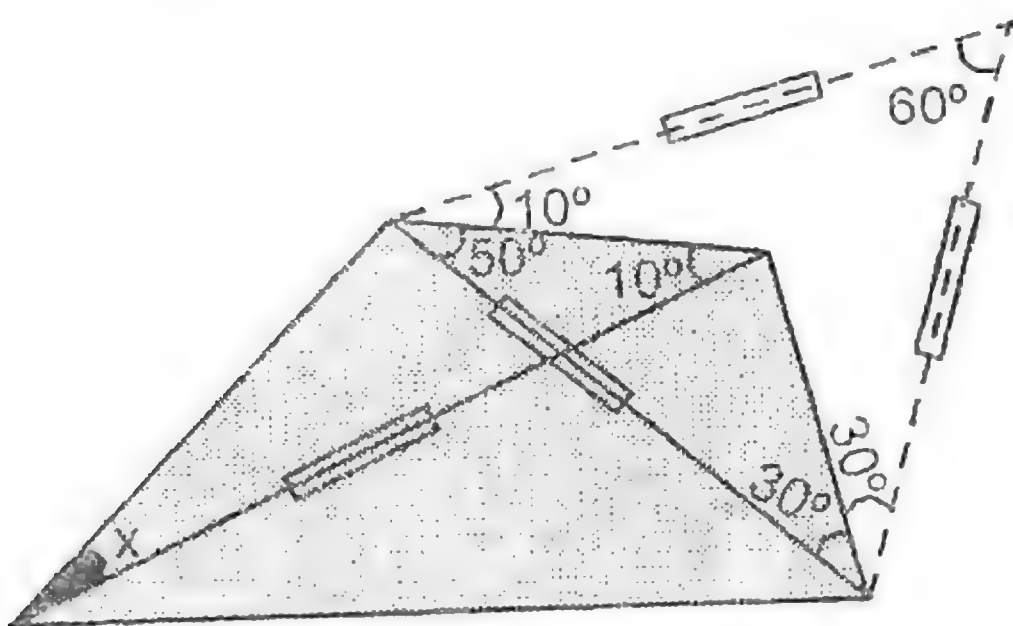


$$\therefore x = 50^\circ$$

Solución N° 63

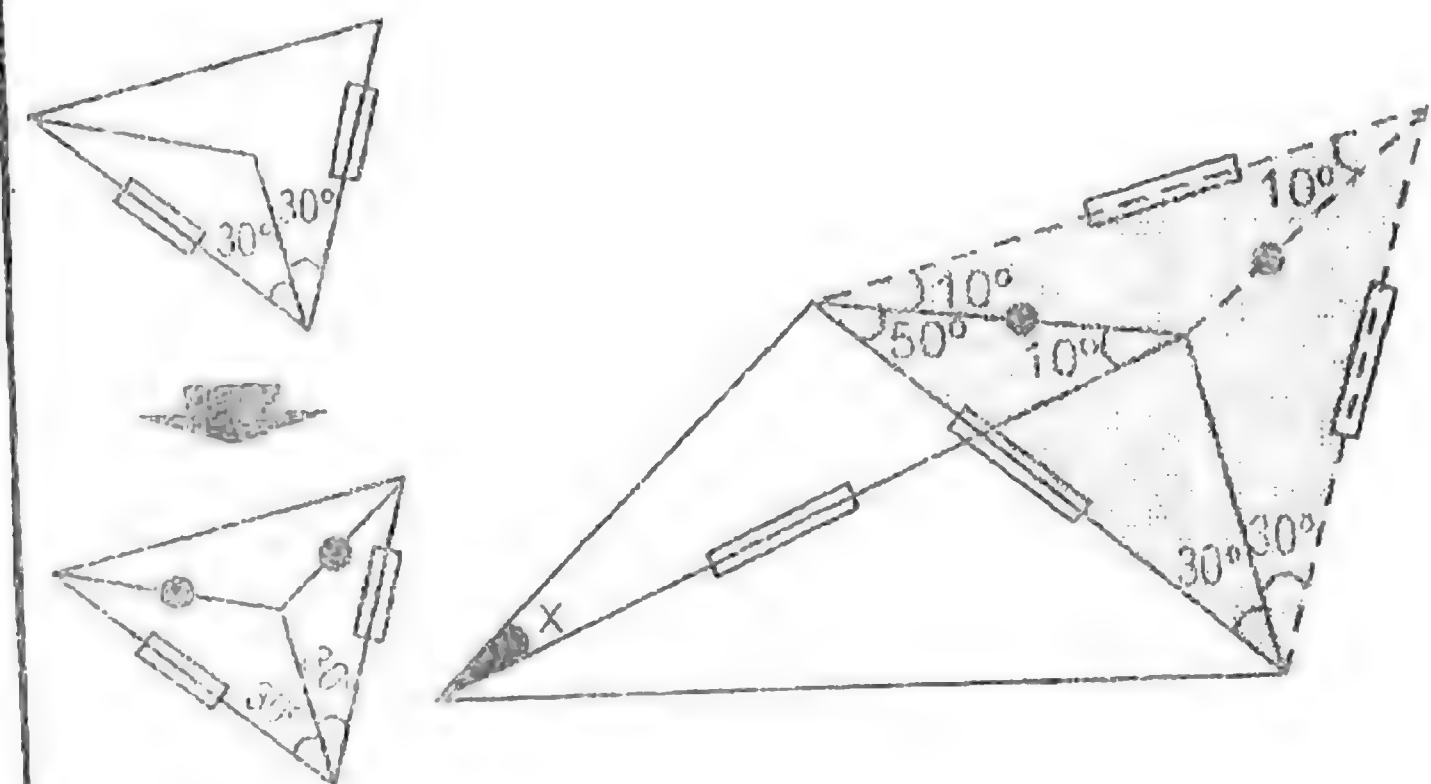
Paso N° 1:

Realizamos el siguiente trazo, construimos un triángulo equilátero; con ello tenemos lados y ángulos iguales.



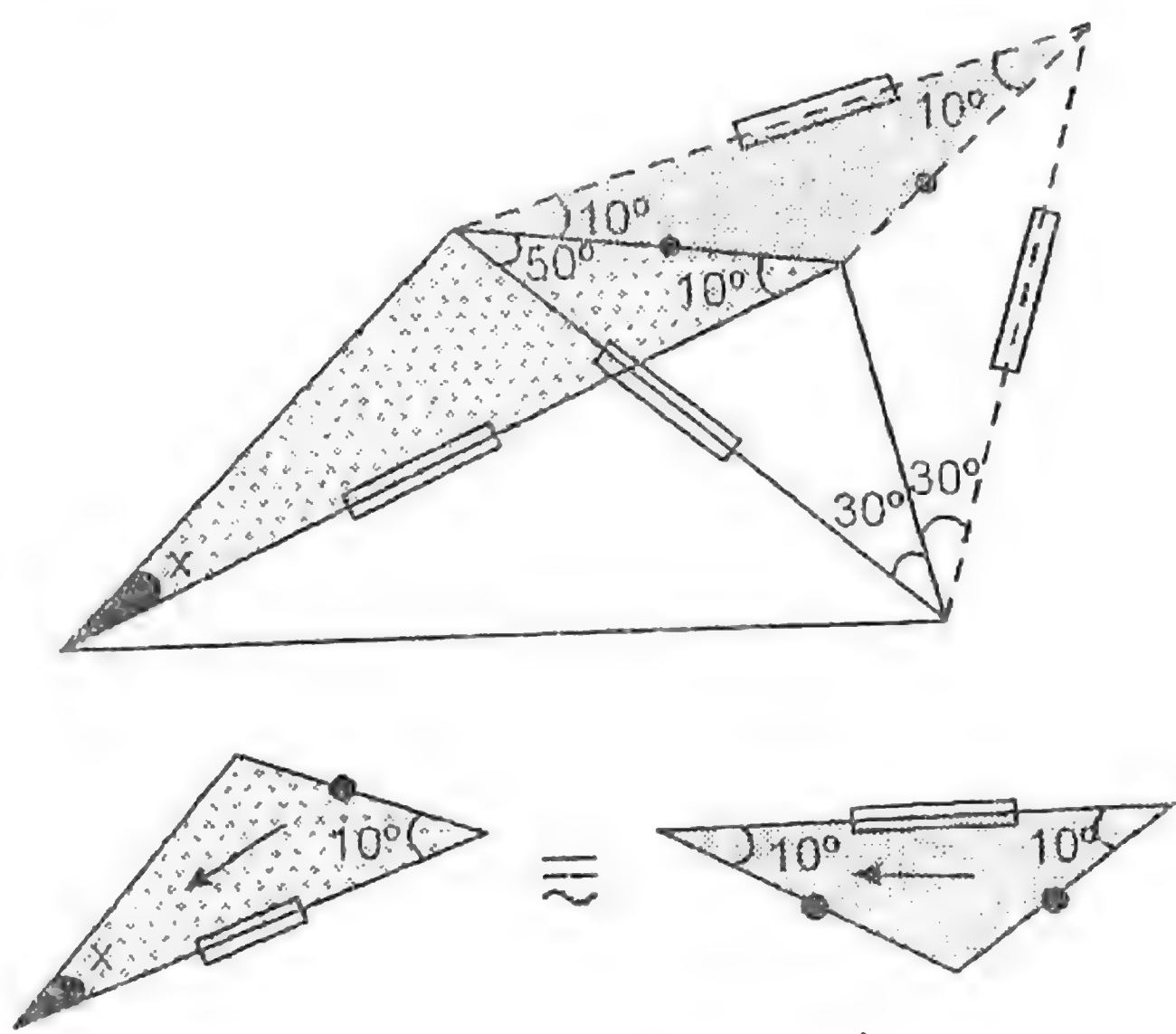
Paso N° 2:

De la figura se observa que se cumple la propiedad de la mediatriz.



Paso N° 3:

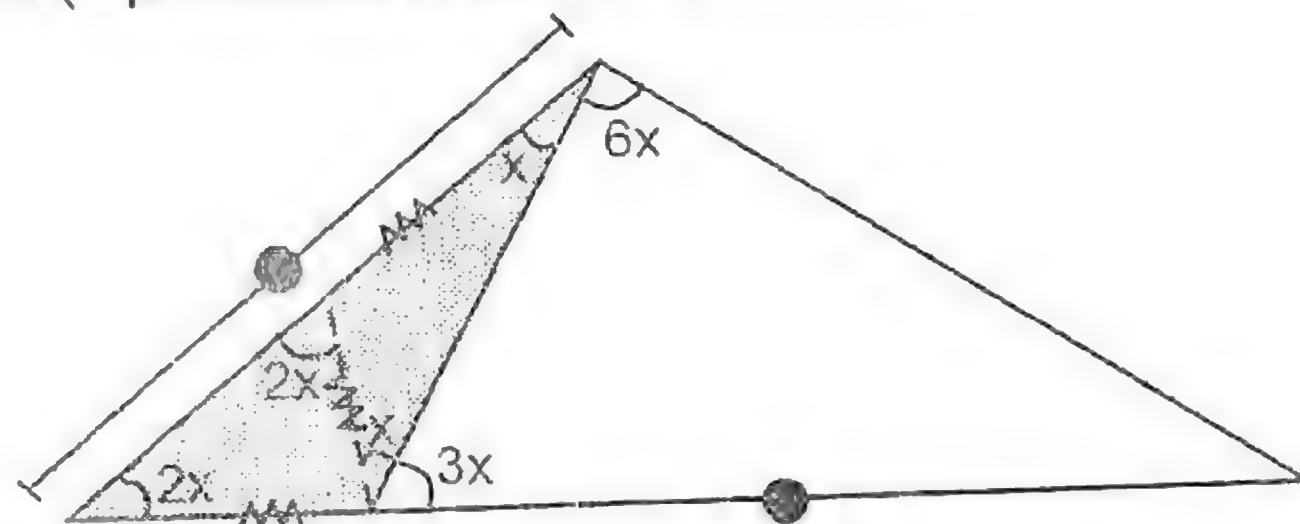
Se obtiene dos triángulos que son congruentes, caso (L.A.L.).



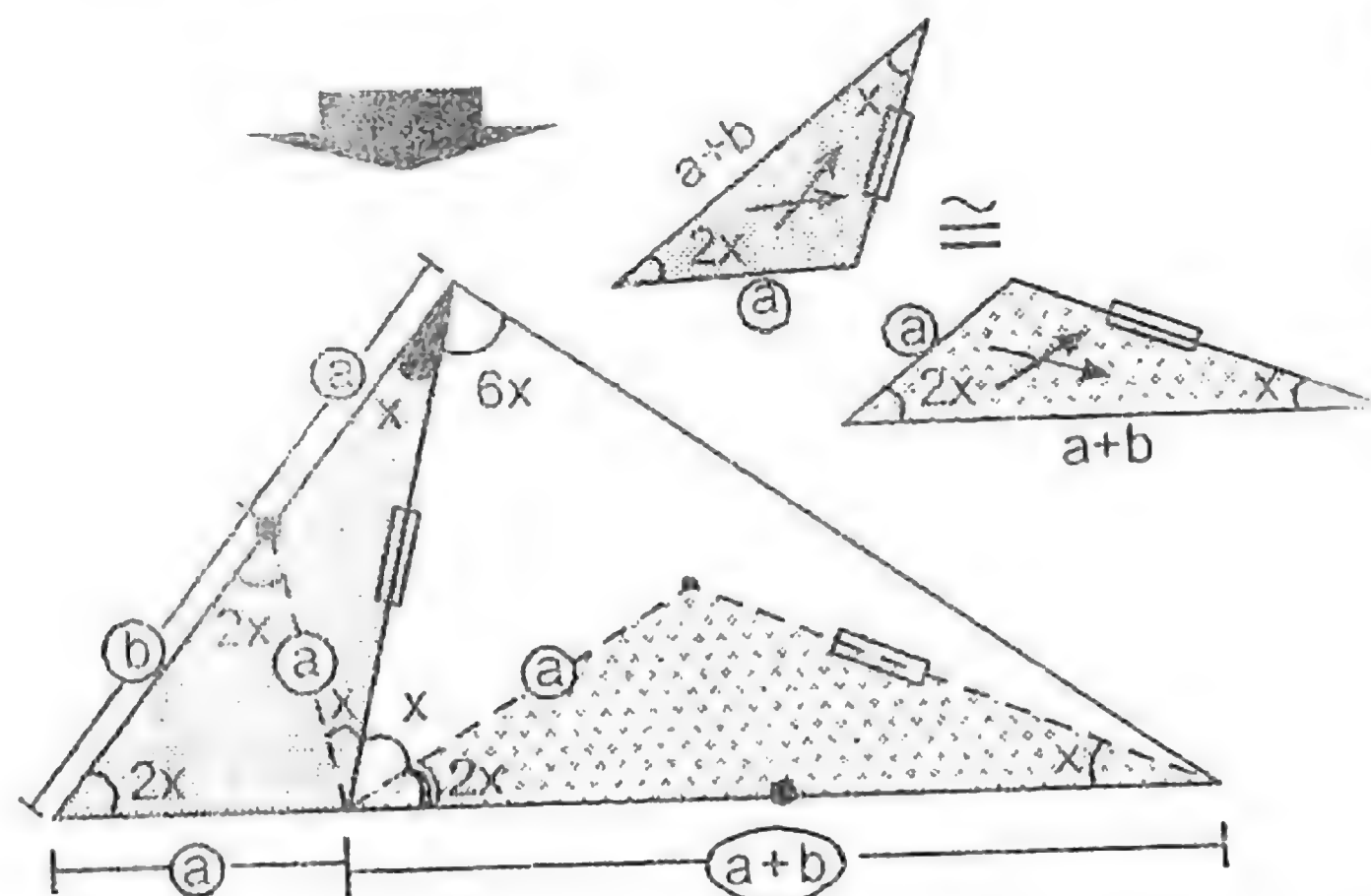
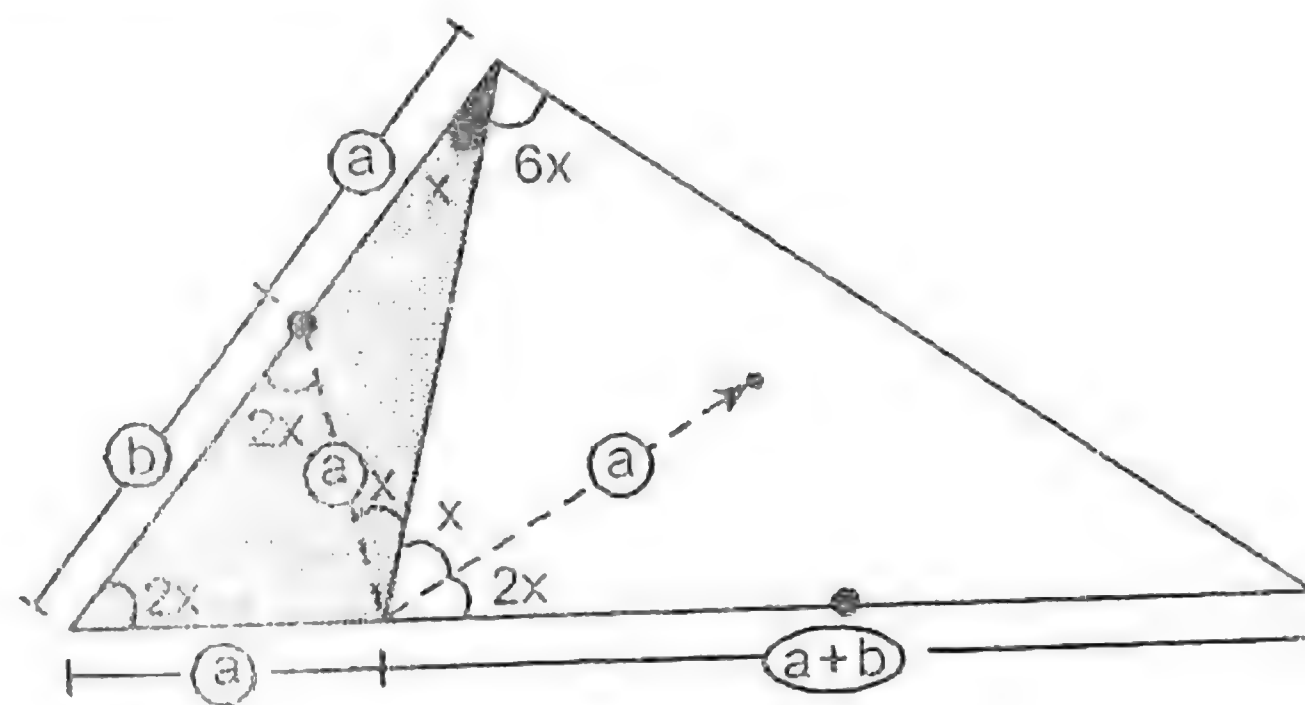
$$\therefore x = 10^\circ$$

Solución N° 64

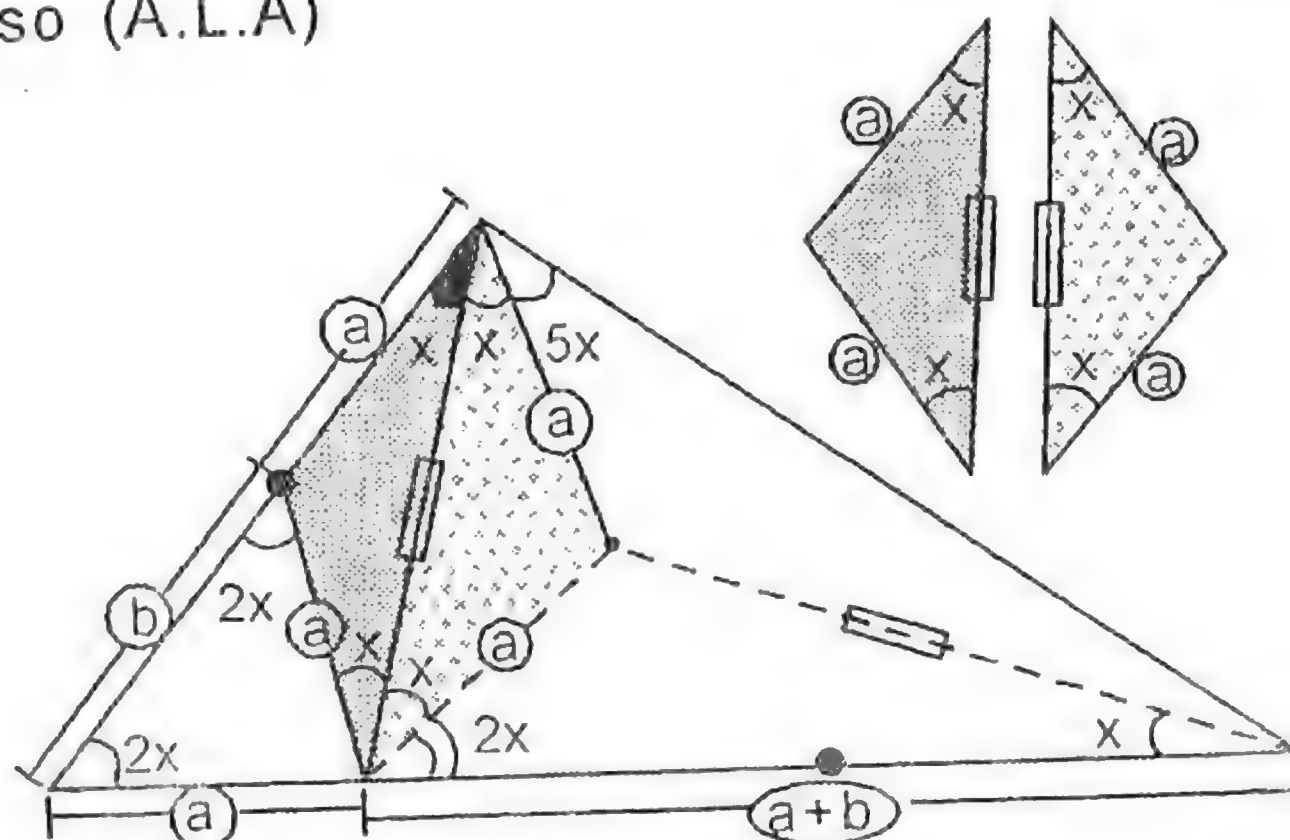
Paso N° 1: En la figura, se observa triángulo sombreado; con ángulos en la relación de dos a uno (Aplicamos el primer criterio de construcción)



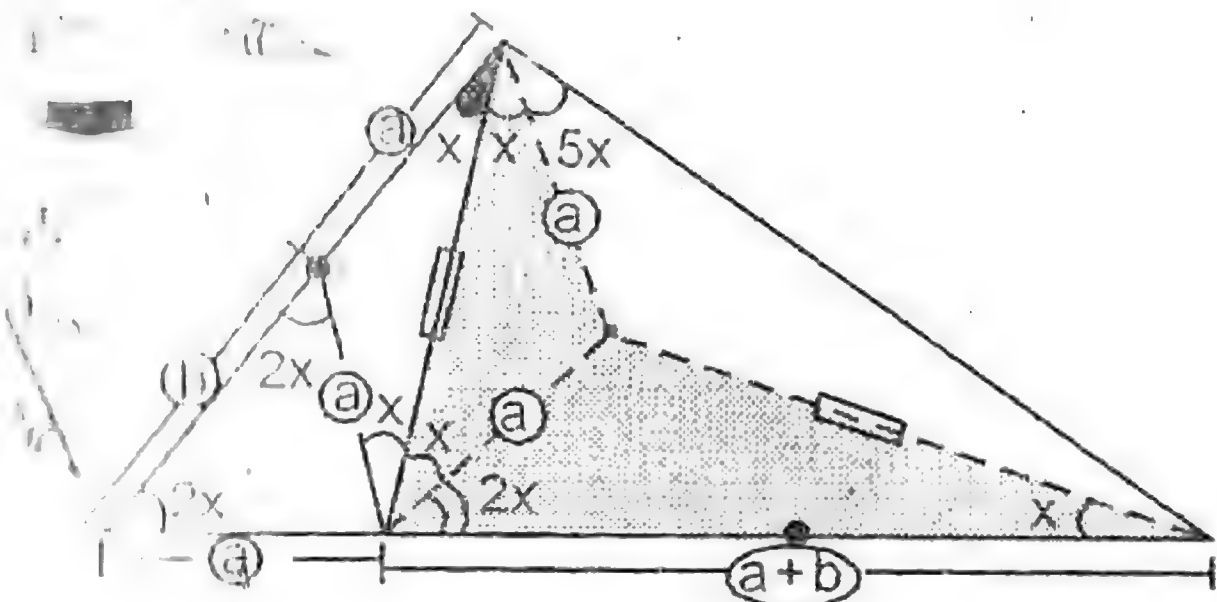
Paso N° 2: Observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscamos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción.



Paso N° 3: Luego realizamos otro trazo para obtener dos nuevos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)

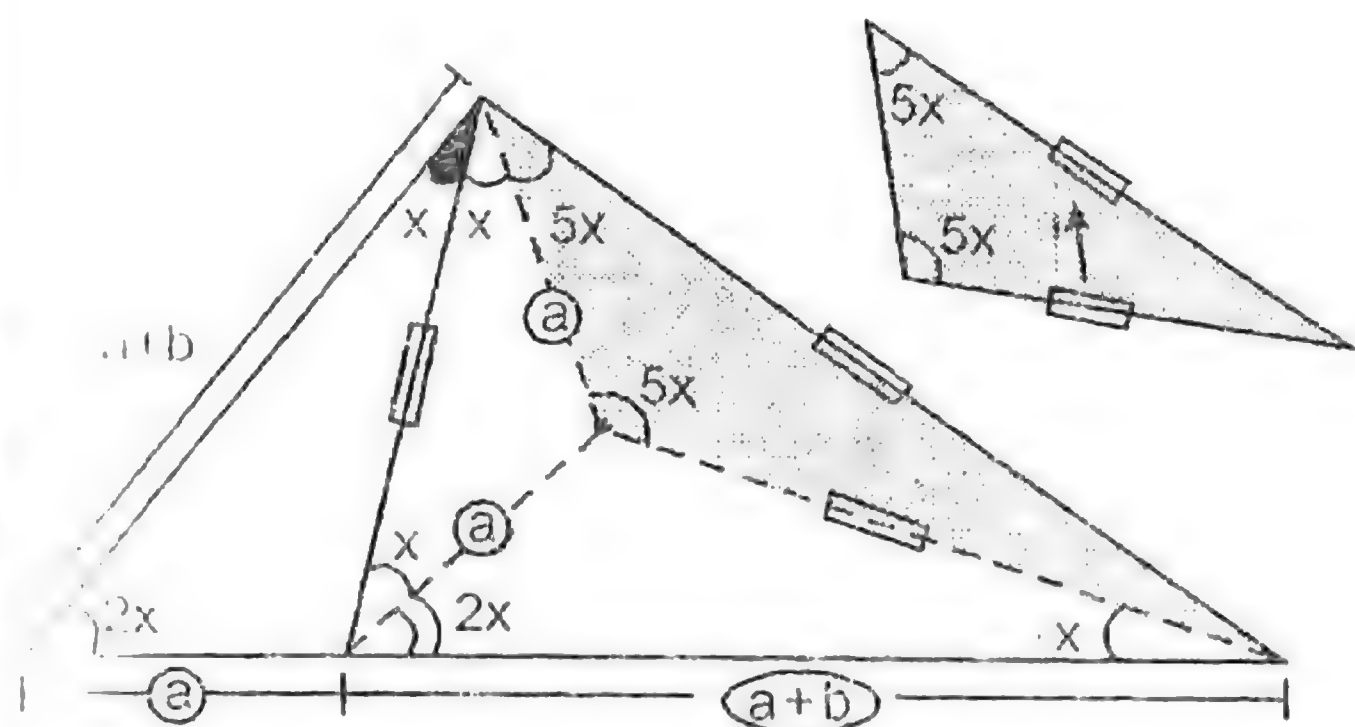


Paso N° 4: El paso anterior se obtiene un triángulo concavo donde se cumple:



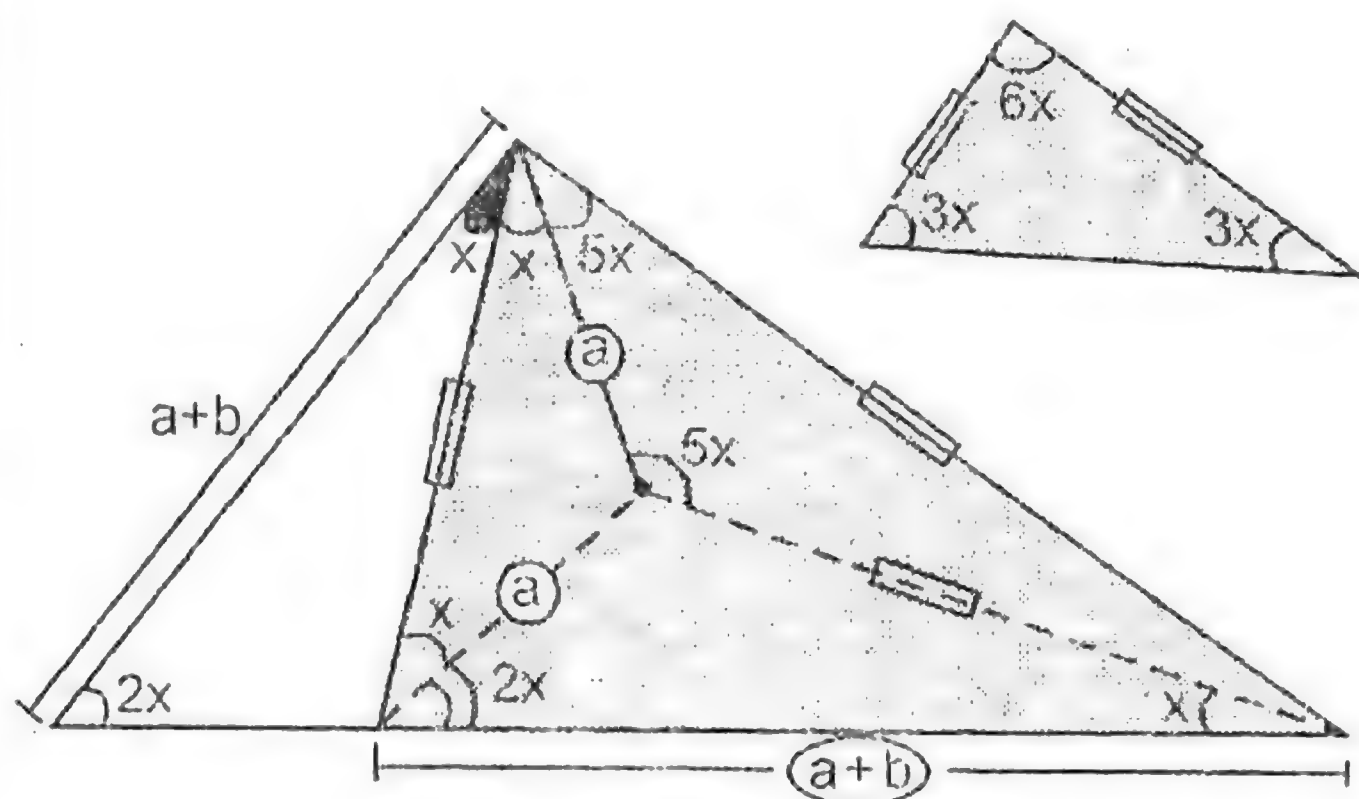
Paso N° 5:

Se obtiene un nuevo triángulo isósceles de la siguiente manera:



Paso N° 6:

Finalmente tenemos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:

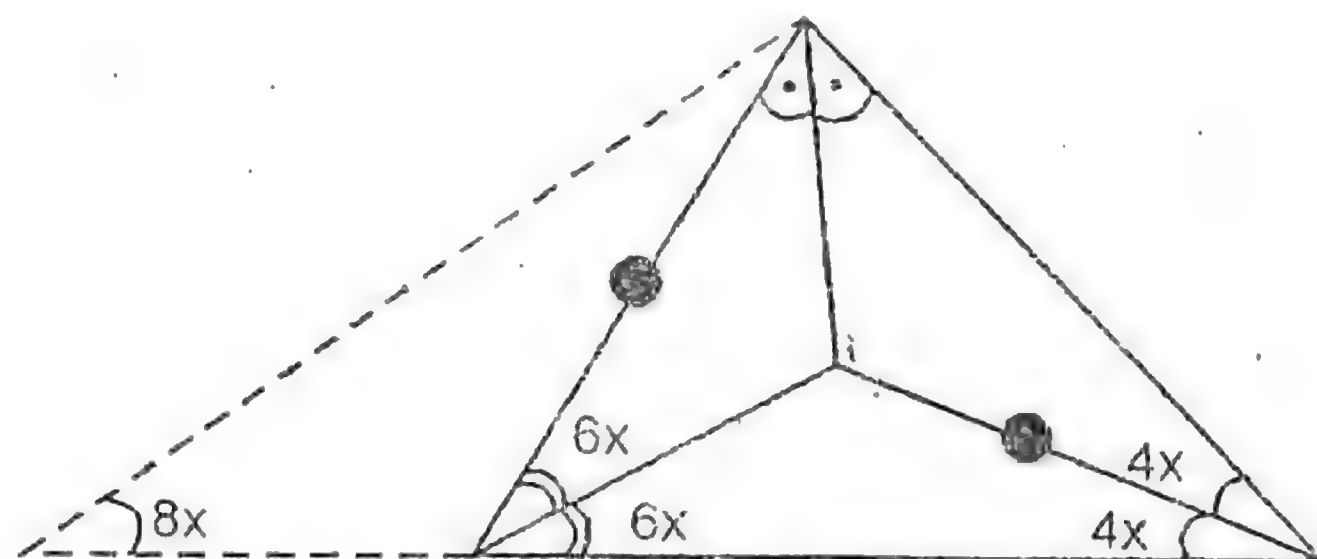


$$\begin{aligned} 3x + 6x + 3x &= 180^\circ \\ 12x &= 180^\circ \\ x &= 15^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 65

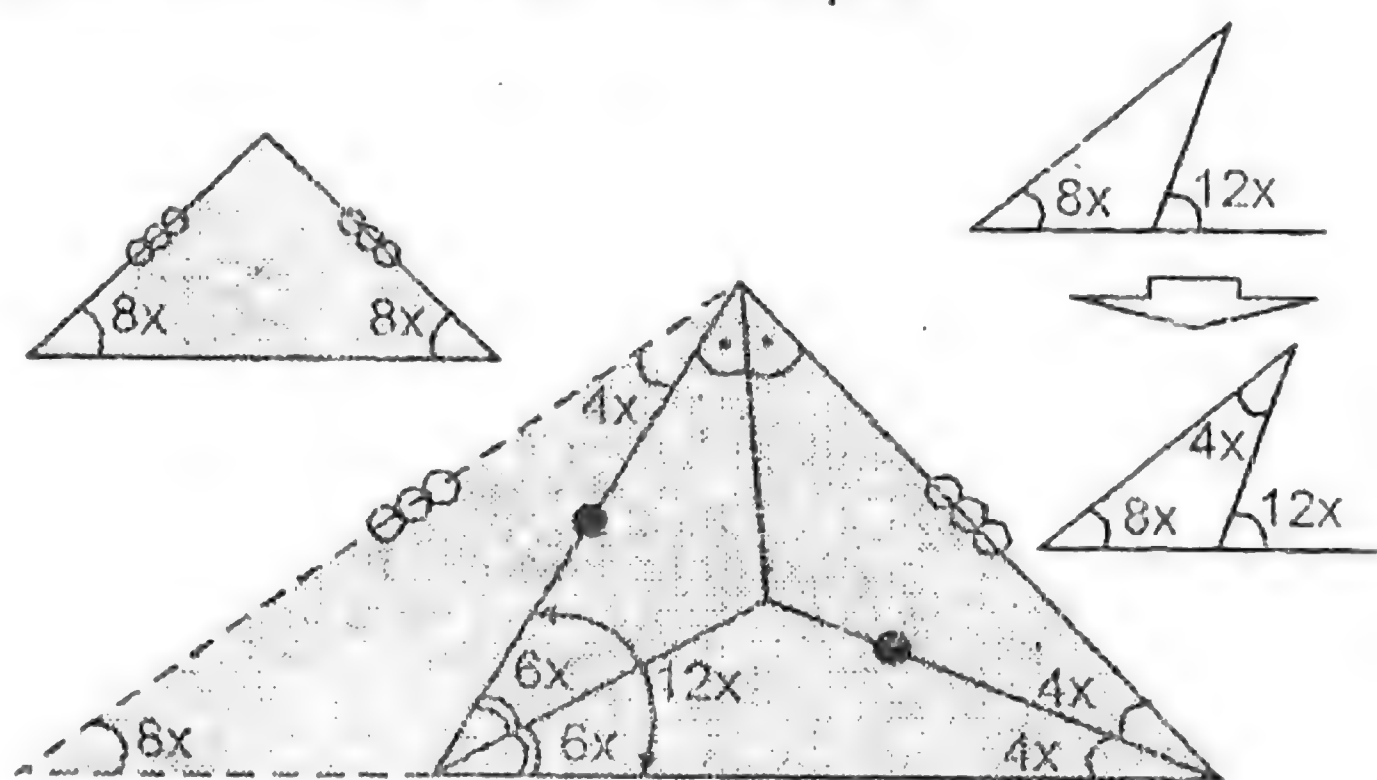
Paso N° 1:

Como observamos lados iguales en forma alternada, buscamos obtener triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



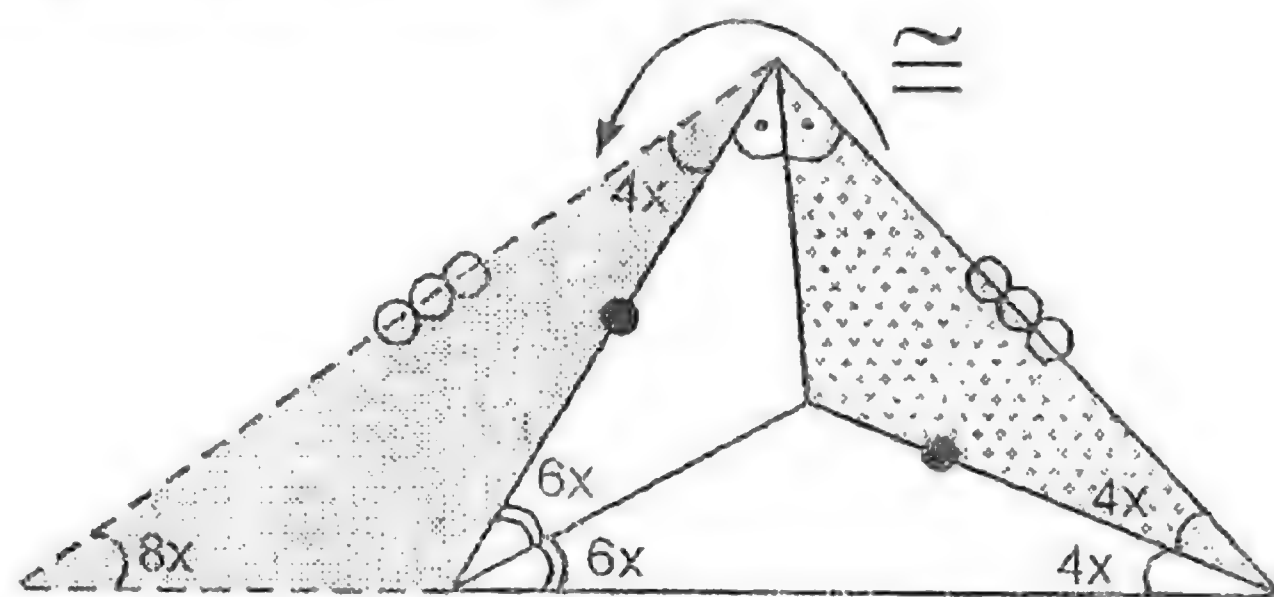
Paso N° 2:

El trazo realizado es para obtener un triángulo isósceles en donde se cumple:

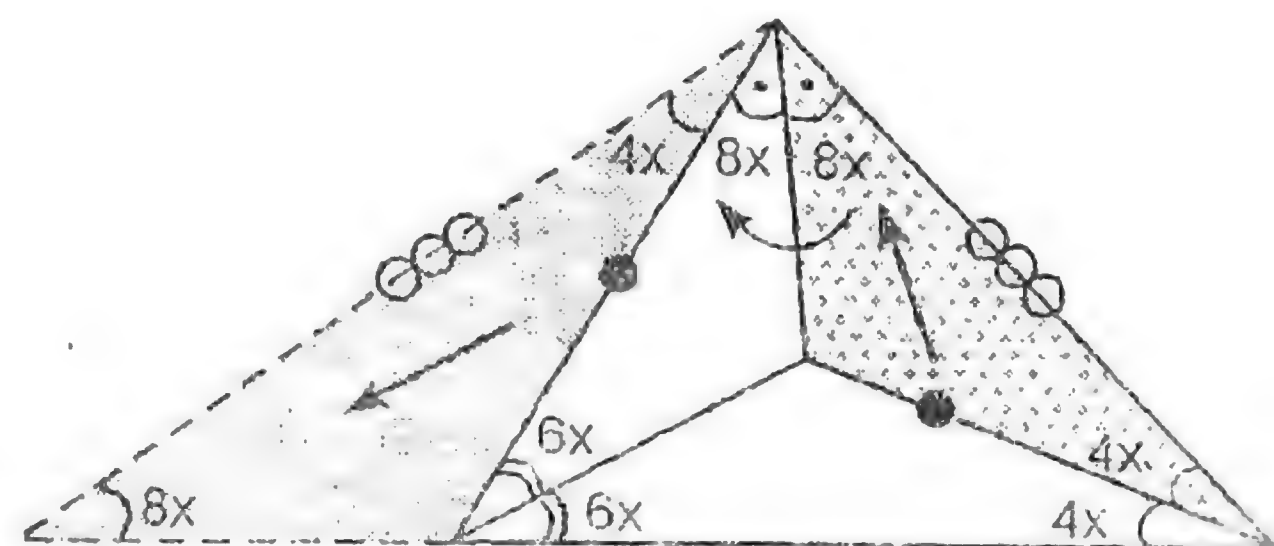


Paso N° 3:

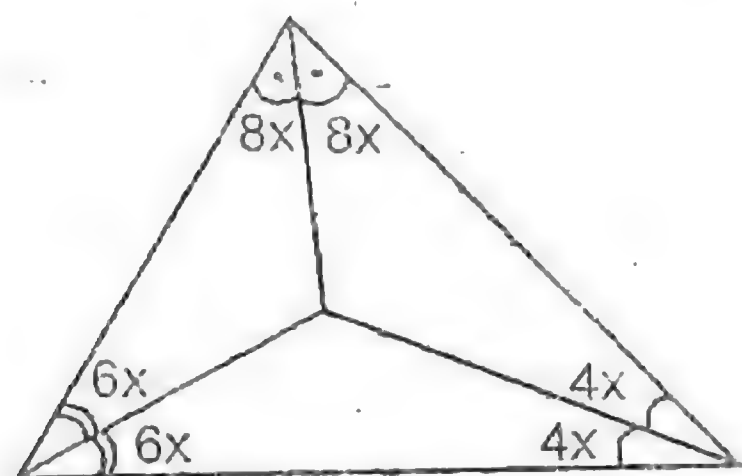
Ahora se observa que tiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



Paso N° 4: Finalmente se obtiene:



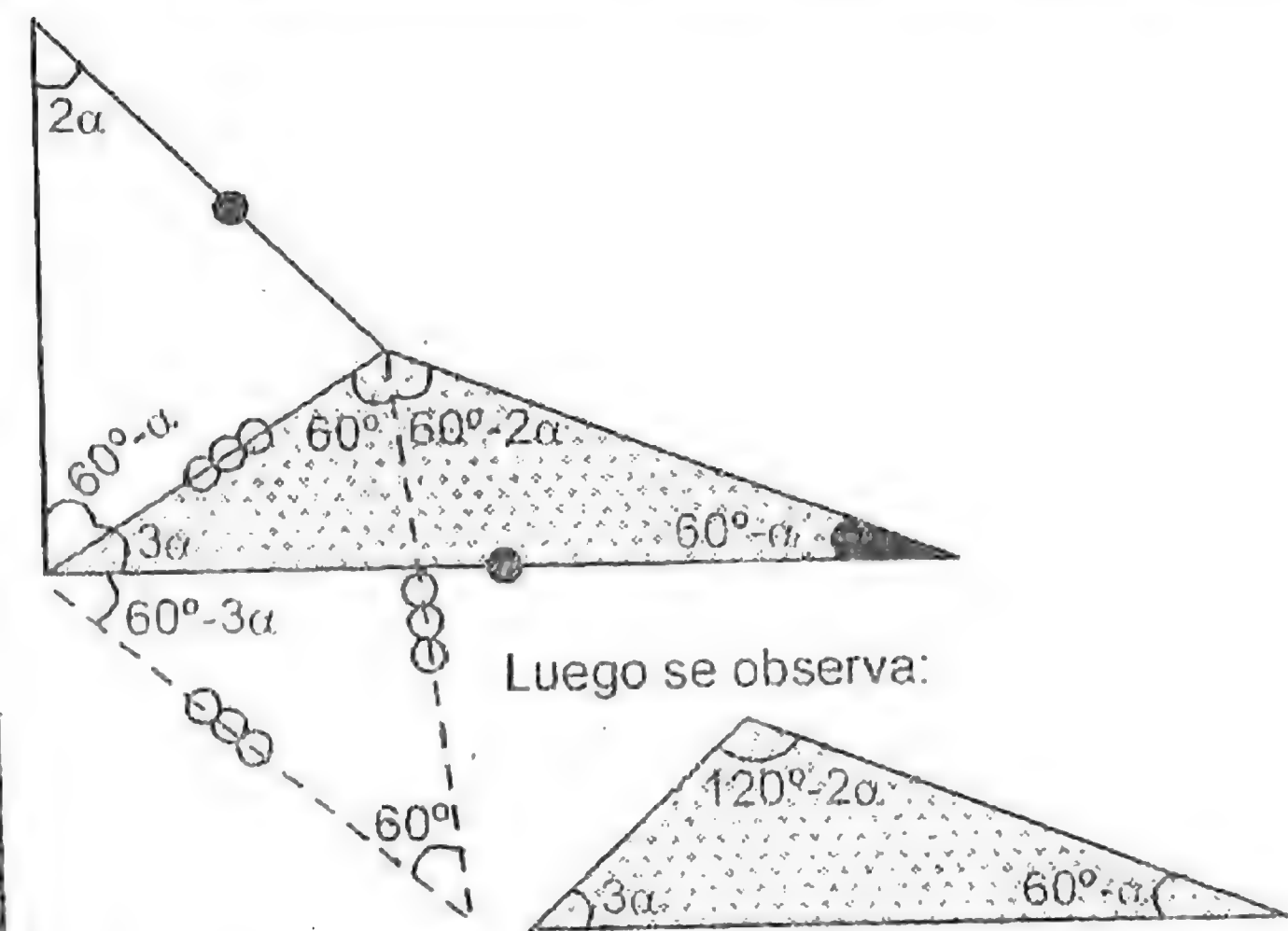
$$\begin{aligned} 12x + 16x + 8x &= 180^\circ \\ 36x &= 180^\circ \\ x &= 5^\circ \end{aligned}$$

Solución N° 66

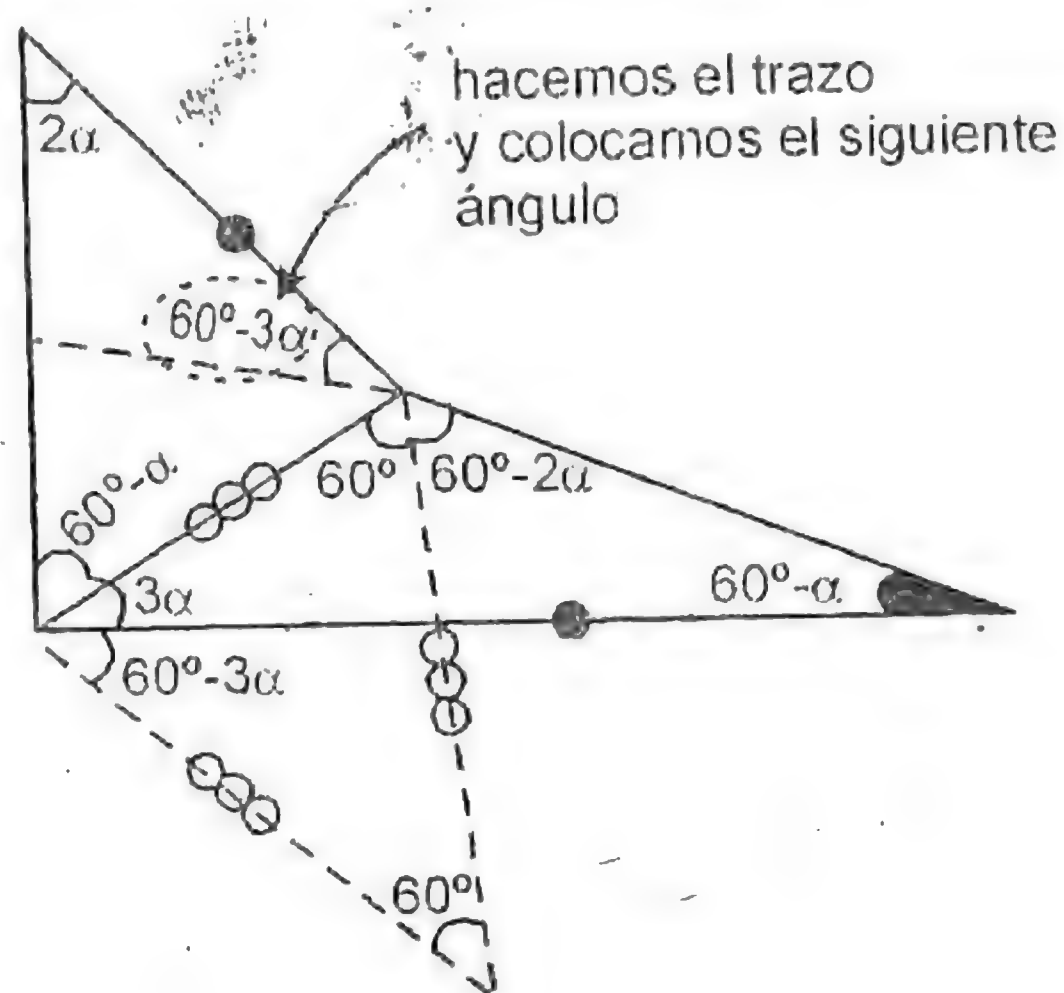
Como observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscaremos en la figura triángulos que sean congruentes realizando los siguientes trazos.

Paso N° 1:

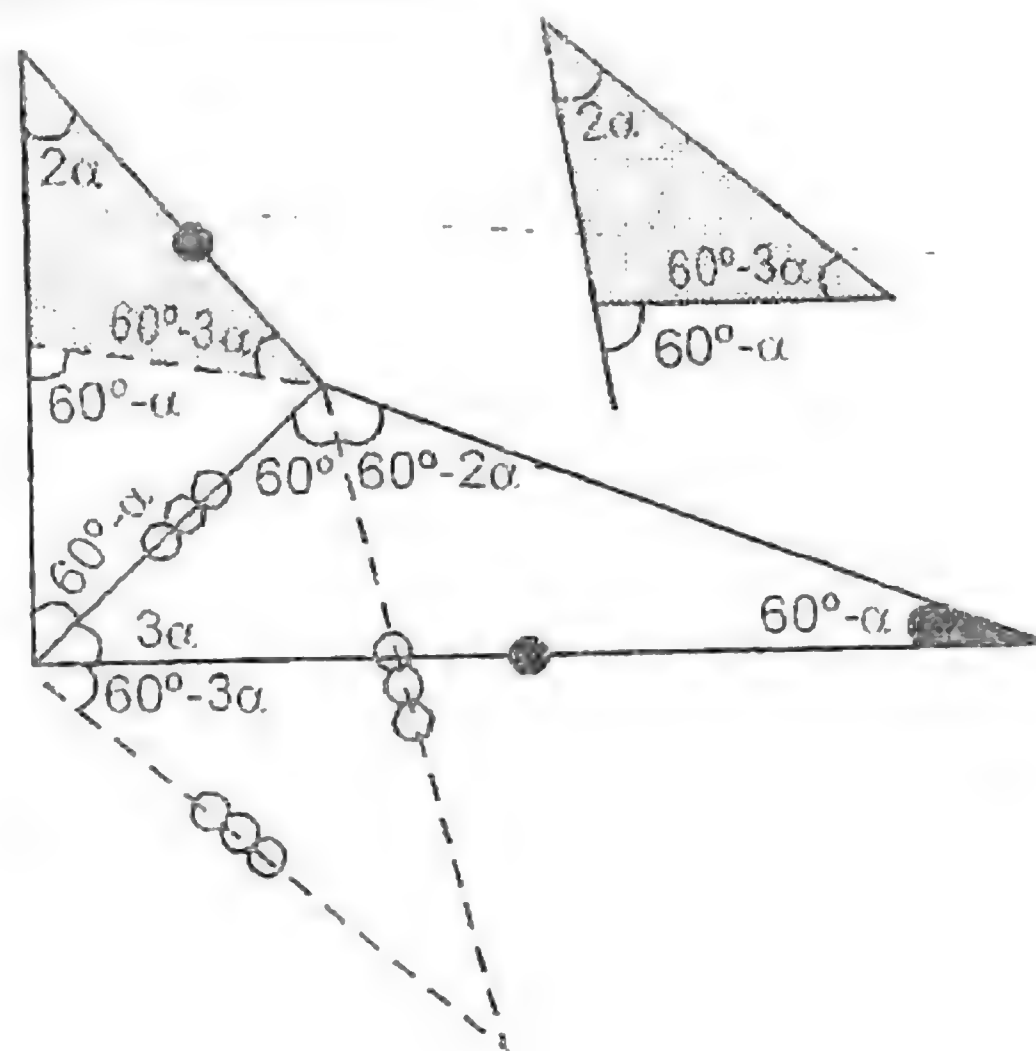
Trazamos un triángulo equilátero de la siguiente manera para conseguir lados y ángulos iguales.



Paso N° 2: Ahora realizamos el siguiente trazo y conseguimos la siguiente figura.

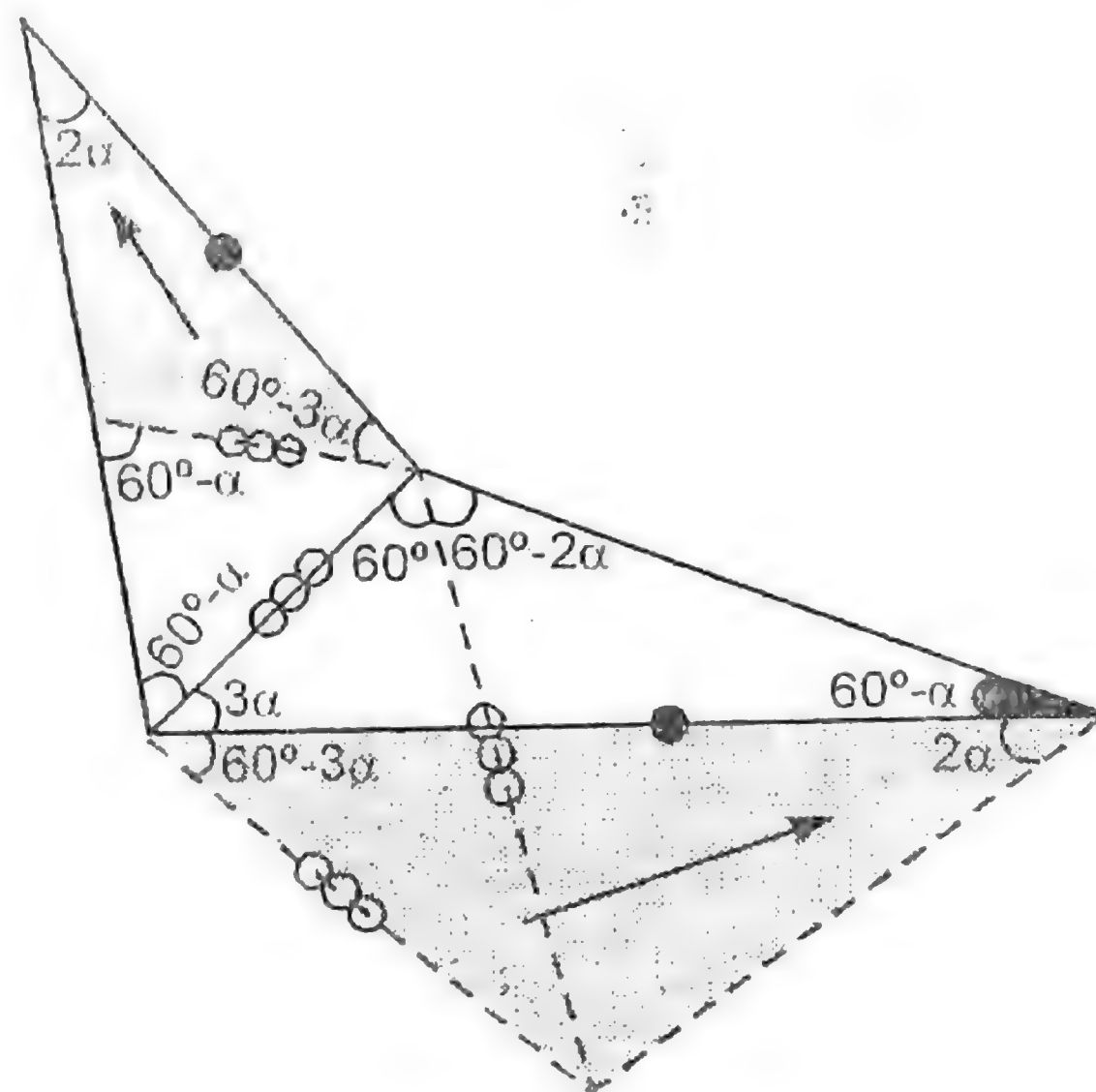
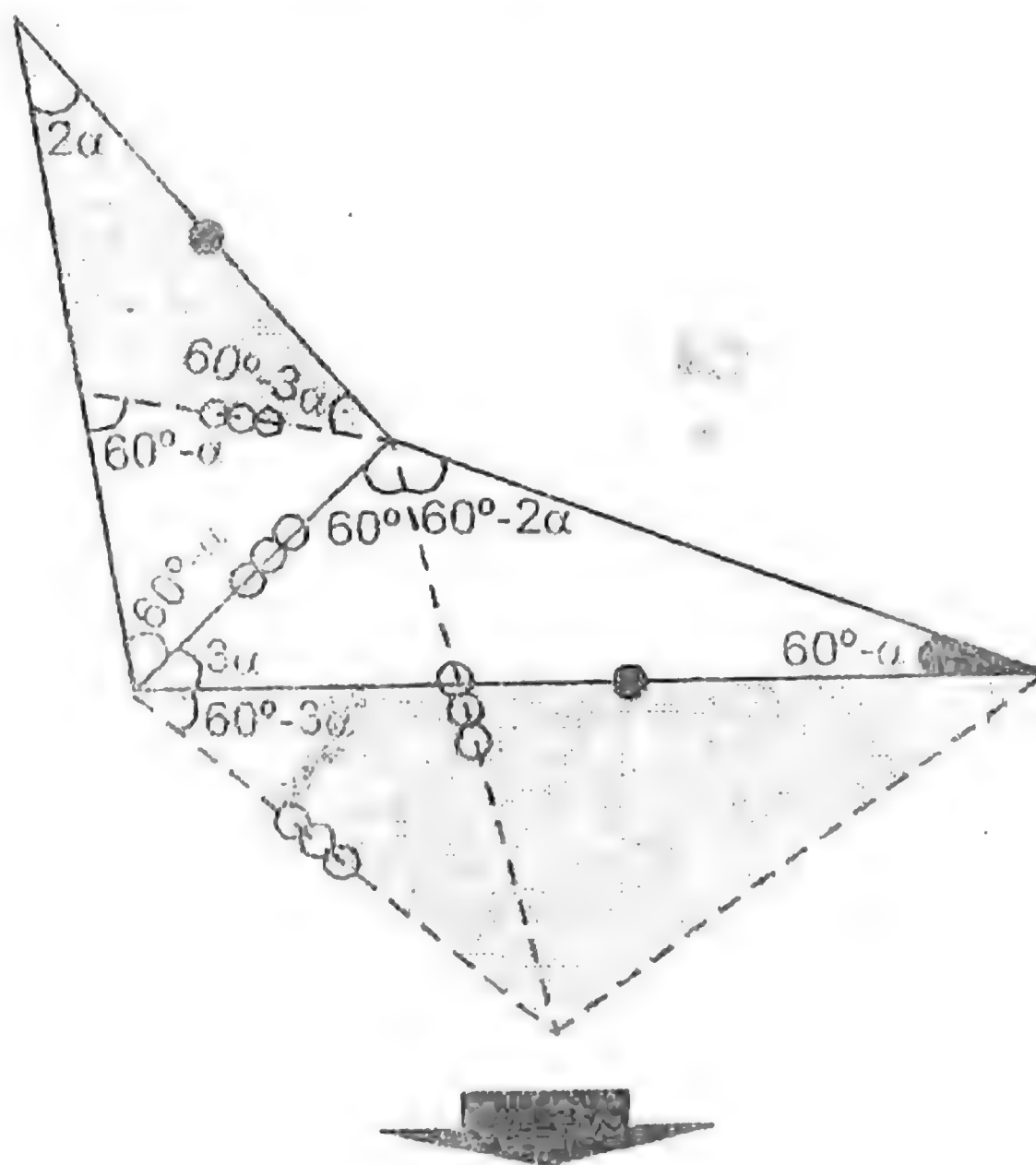


Con ella obtenemos:



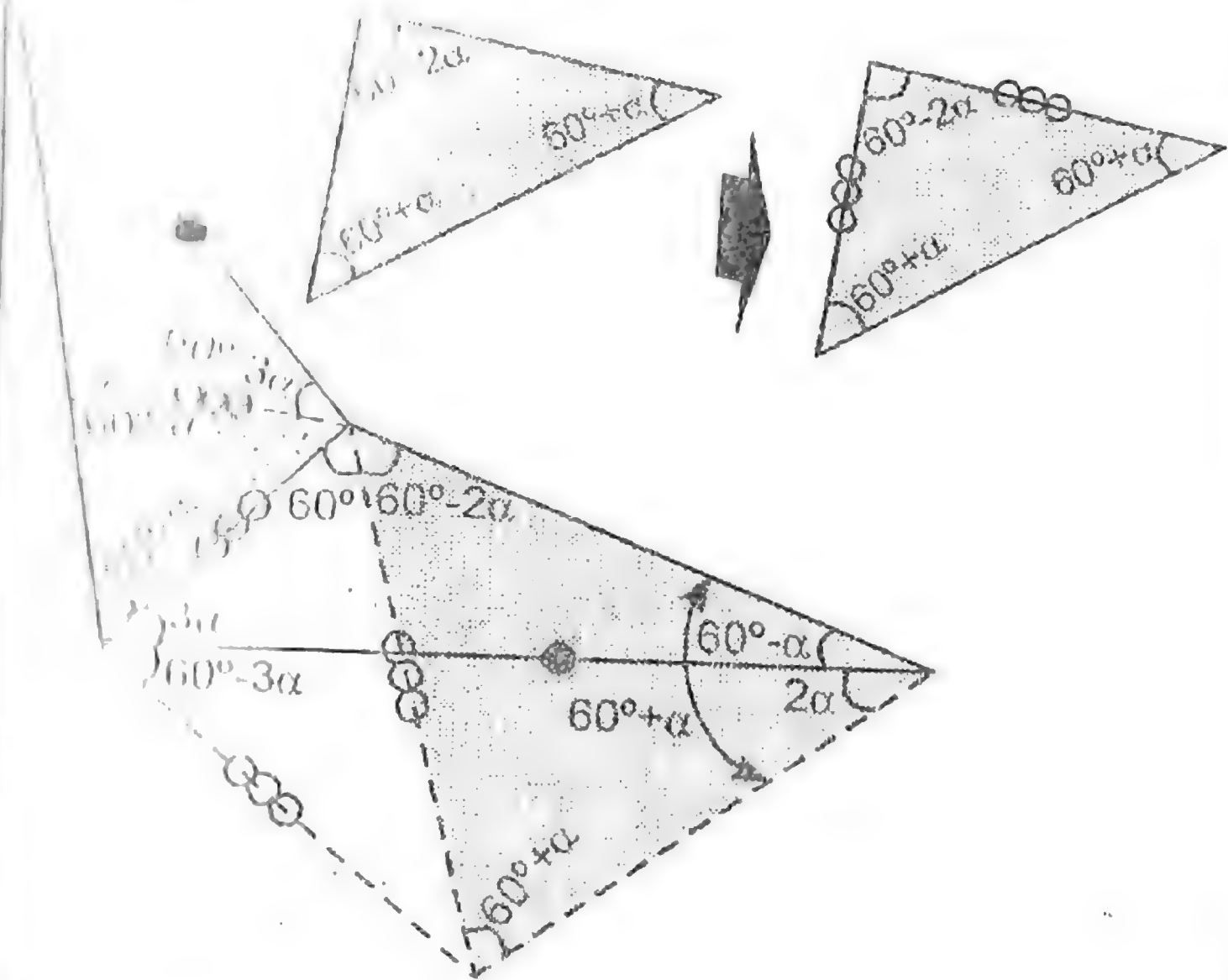
Paso N° 3:

Observamos en la figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)



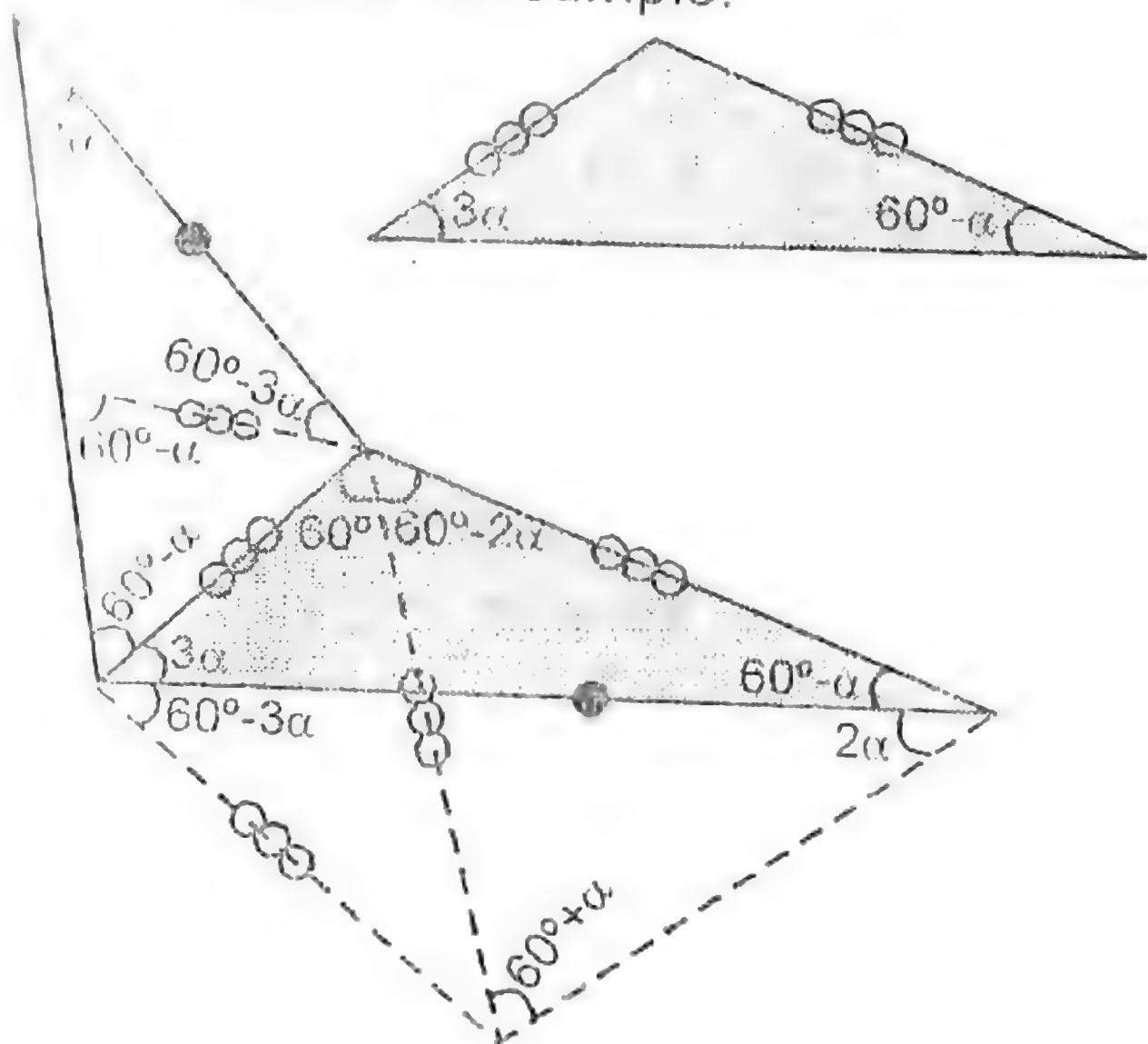
Paso N° 1:

Como se observa en la figura que tenemos un triángulo isósceles.



Paso N° 5:

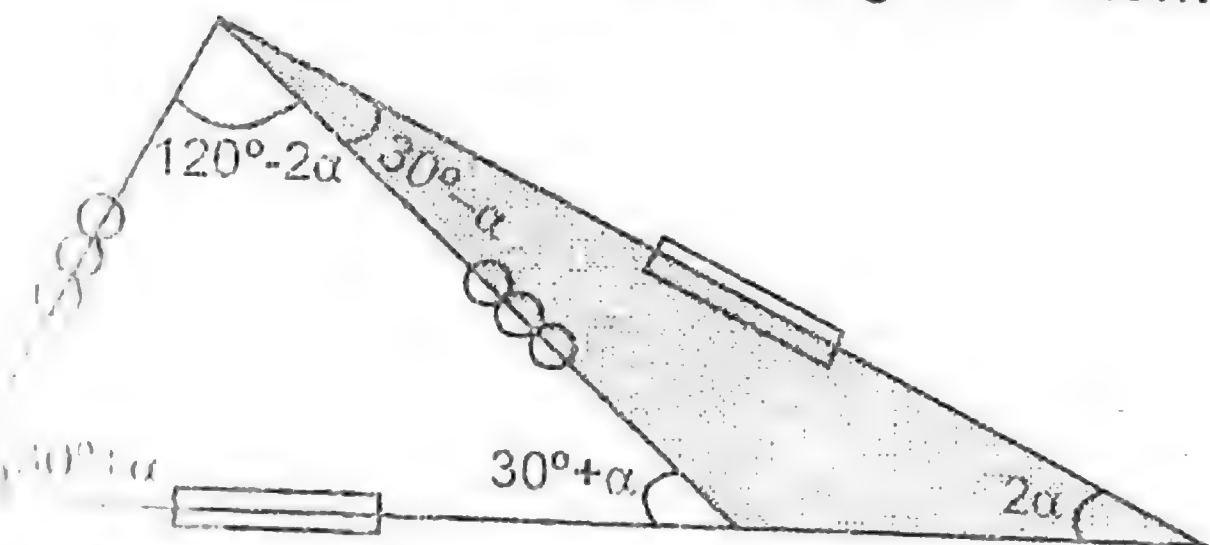
Finalmente tenemos un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:



$$\begin{aligned} \Rightarrow 3\alpha &= 60^\circ - \alpha \\ 4\alpha &= 60^\circ \\ \alpha &= 15^\circ \end{aligned}$$

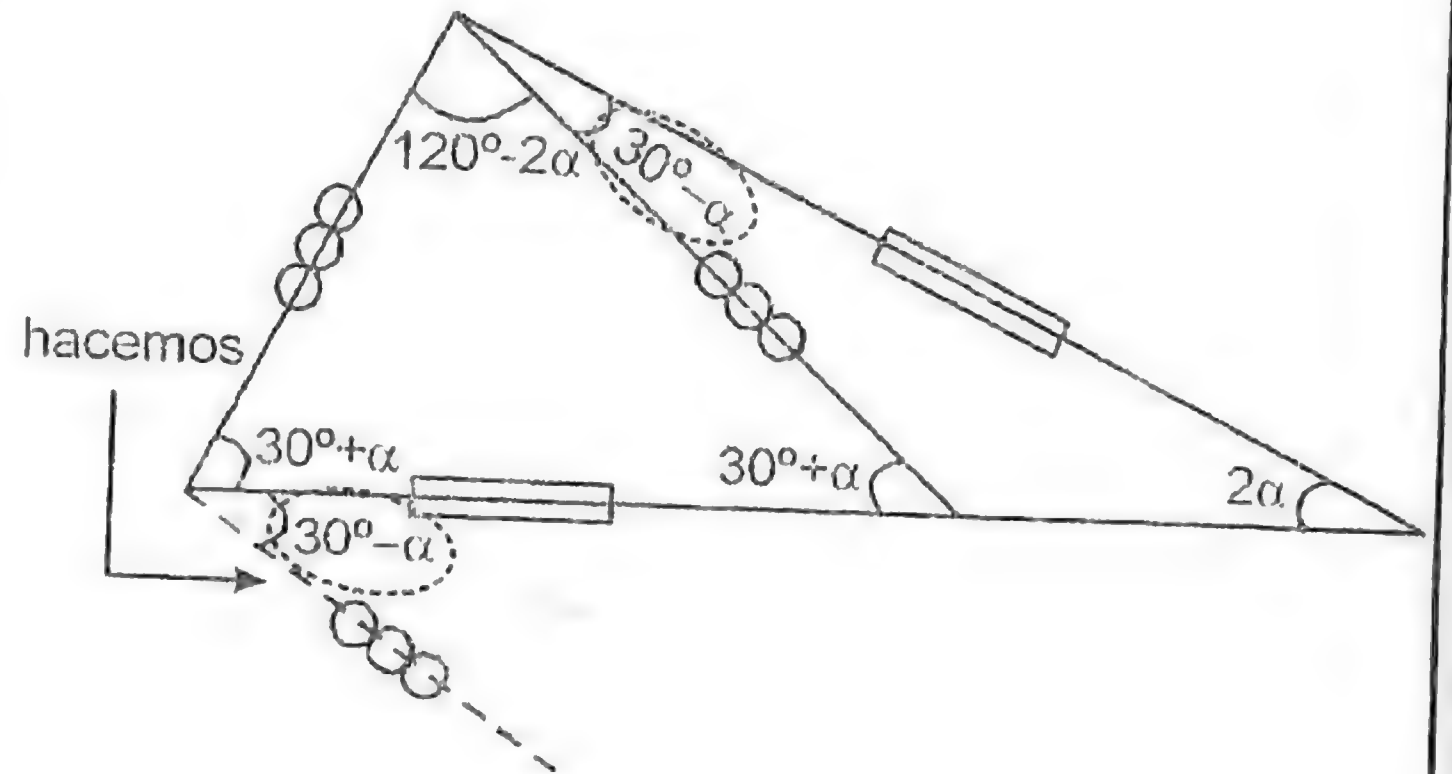
Solución N° 167

En la figura completamos los ángulos internos.

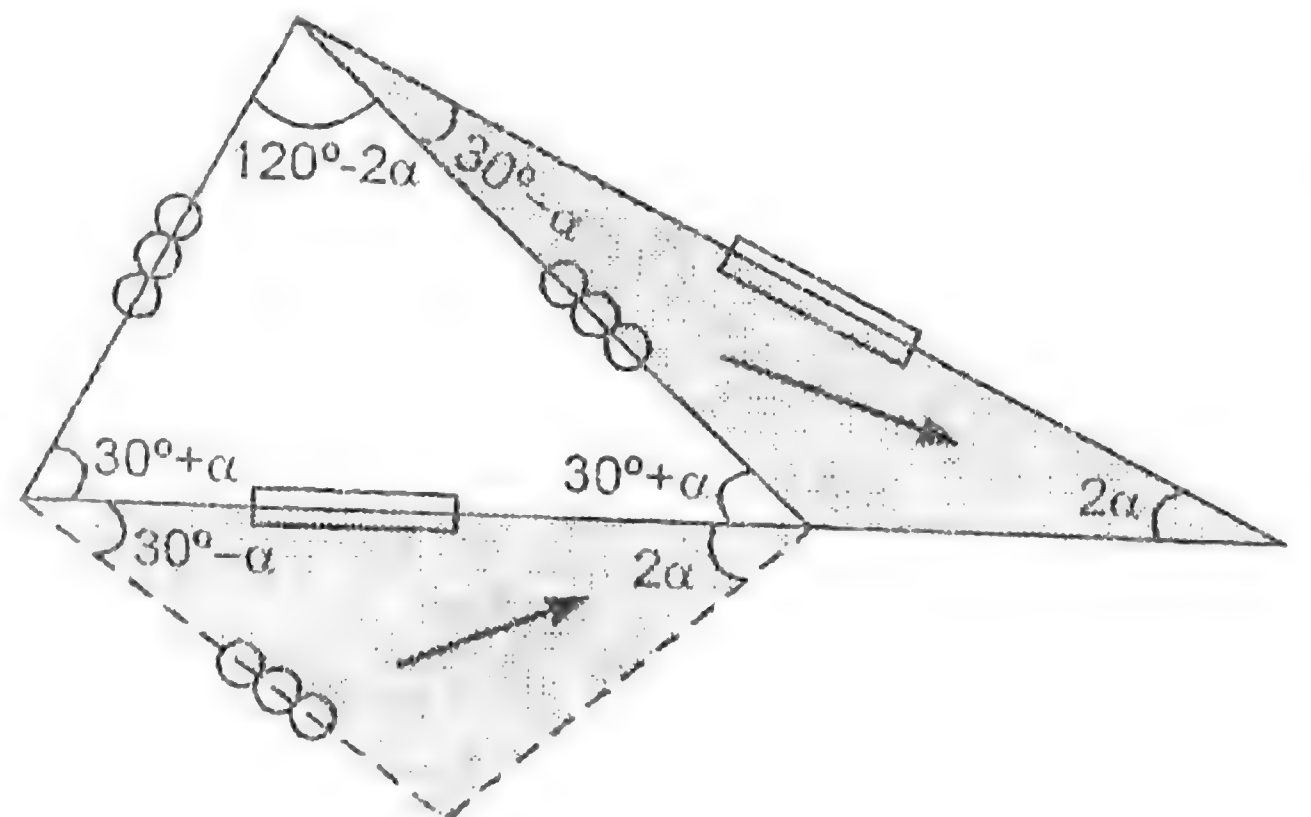


Paso N° 1:

Como se tiene en la figura lados iguales en forma alternada, entonces, buscamos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.

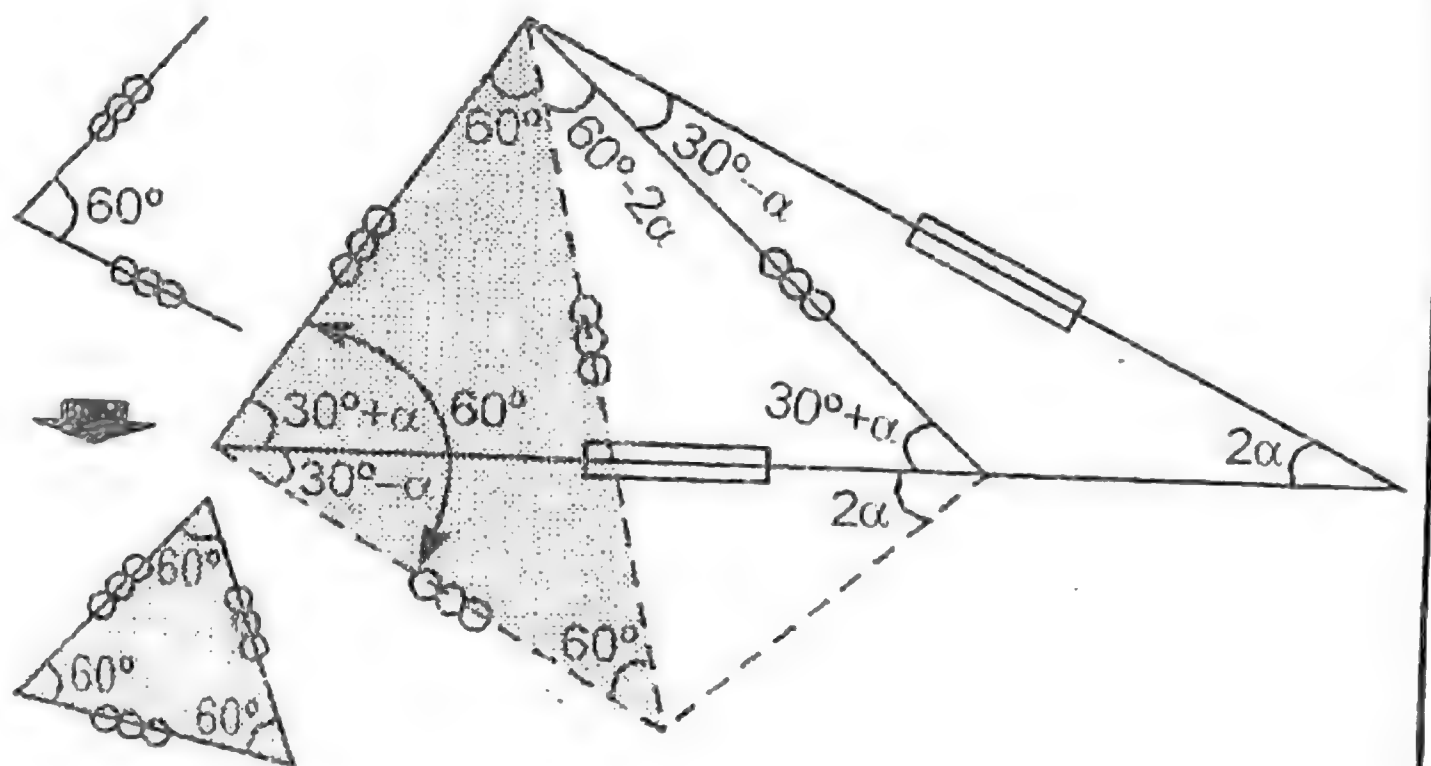


Aquí obtenemos dos triángulos congruentes; caso (L.A.L)



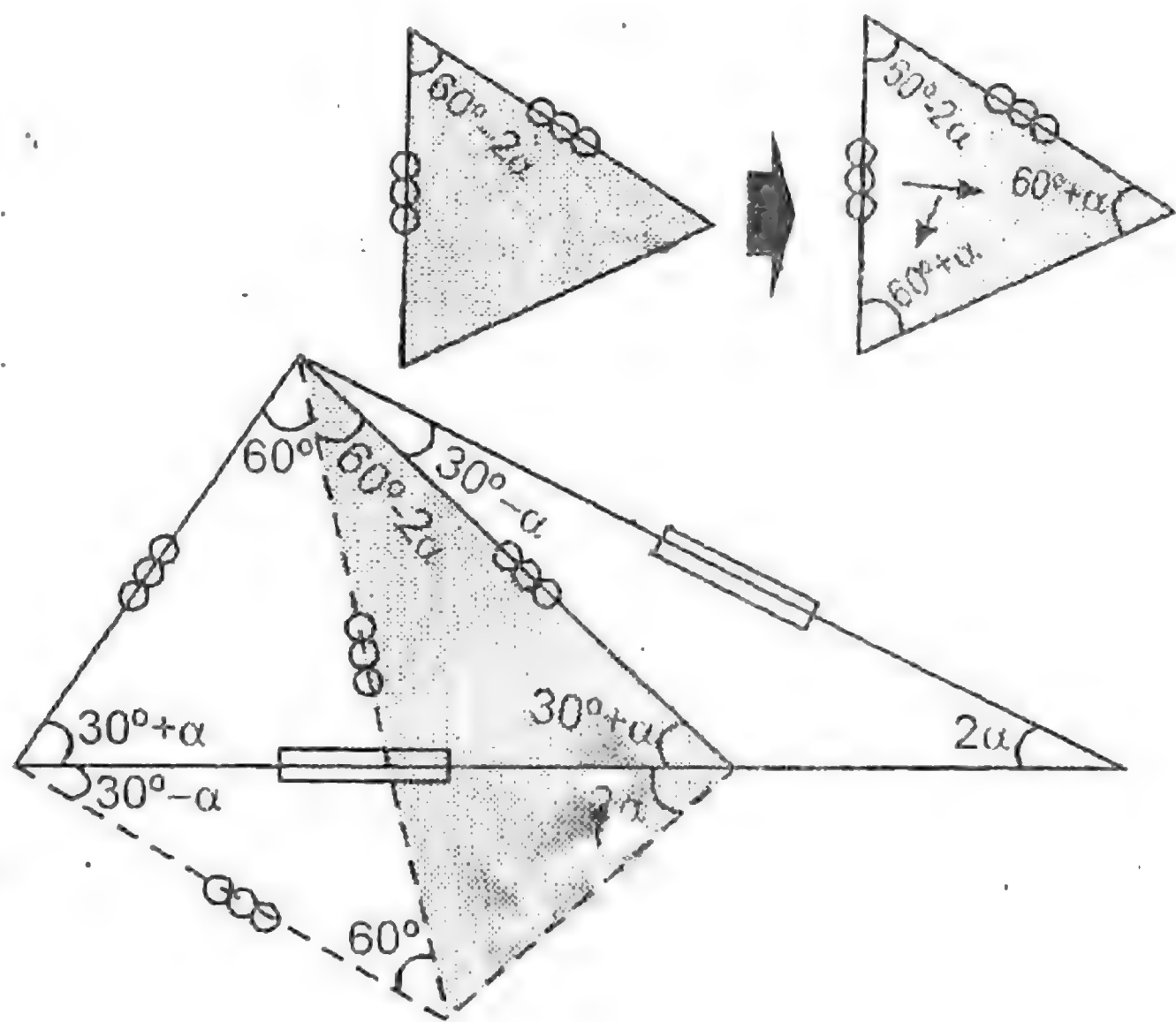
Paso N° 2:

Ahora observamos en la figura un triángulo equilátero.



Lo que vivamente imaginamos, ardientemente deseamos, sinceramente creemos y entusiastamente emprendemos, inevitablemente sucederá.

Paso N° 3: Ahora se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



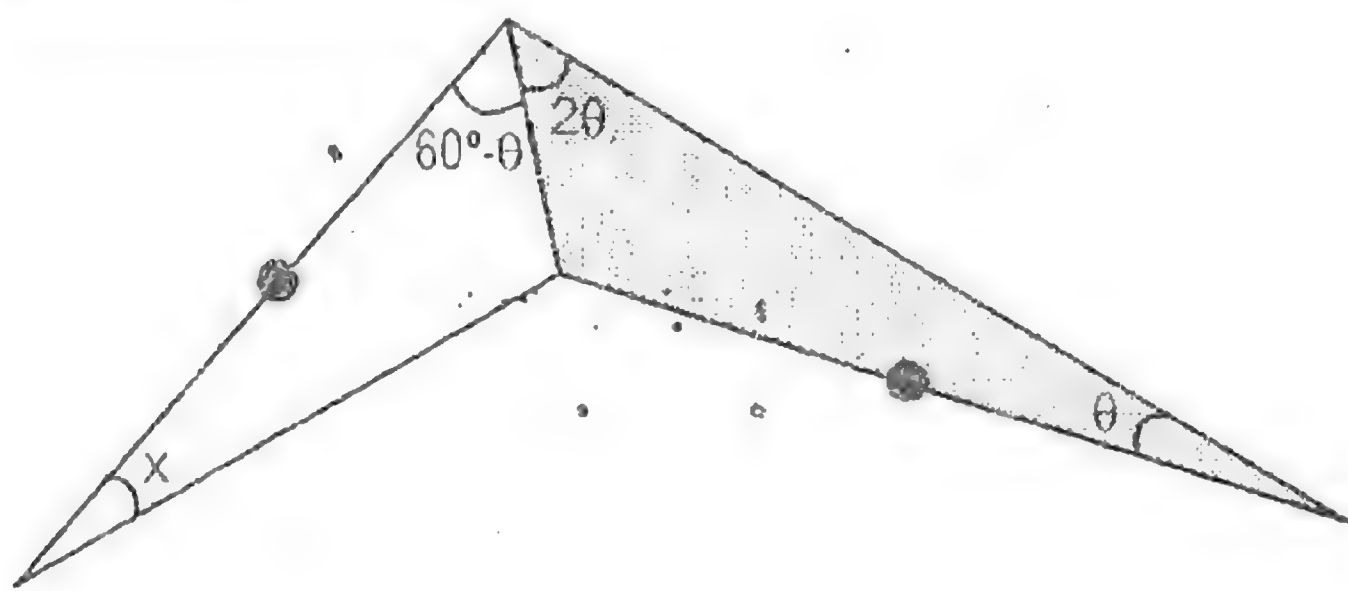
∴ de la figura:

$$30^\circ + \alpha + 2\alpha = 60^\circ + \alpha$$

$$2\alpha = 30^\circ$$

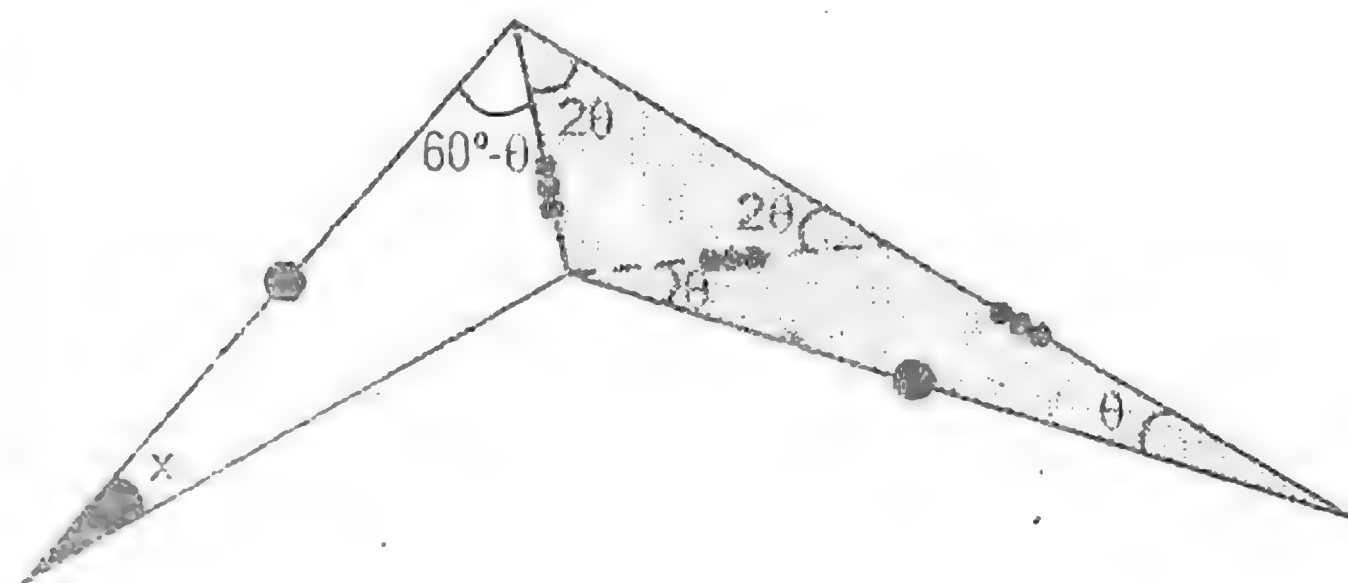
$$\alpha = 15^\circ$$

Solución N° 68



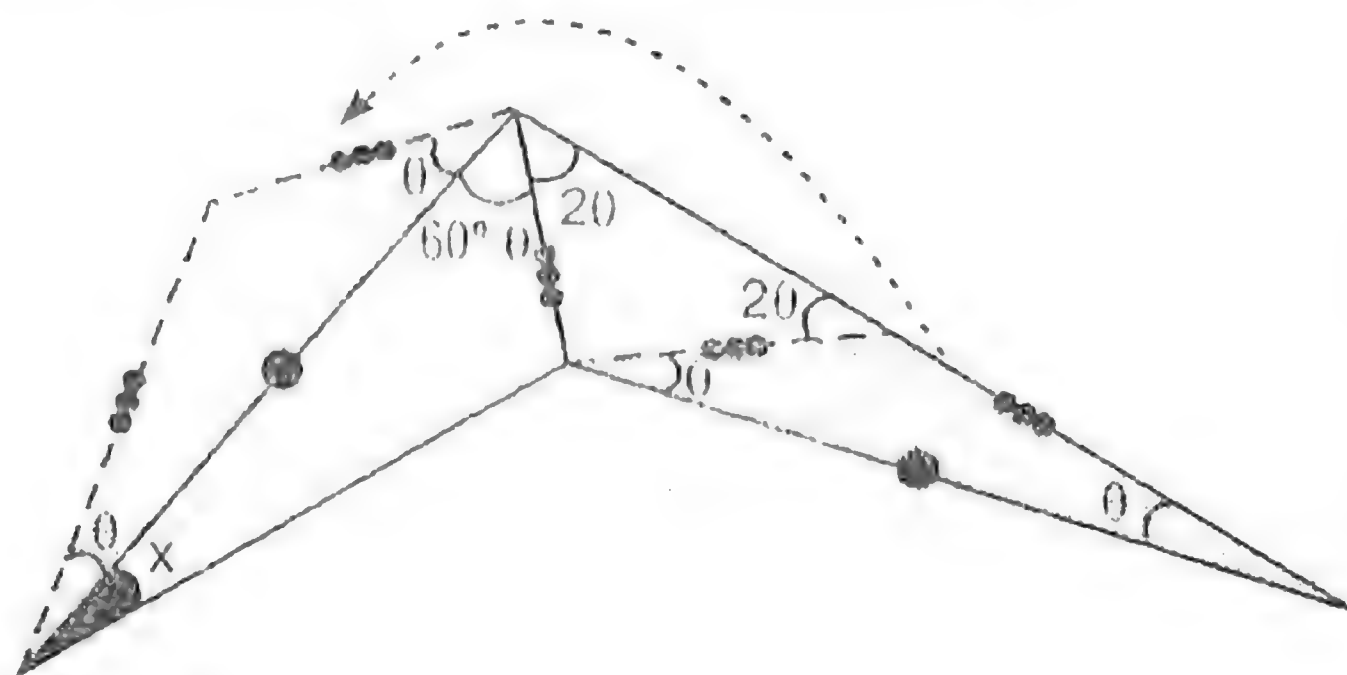
Paso N° 1:

En la figura observamos ángulos en la relación de dos a uno, entonces realizamos el siguiente trazo (Primer criterio de construcción).



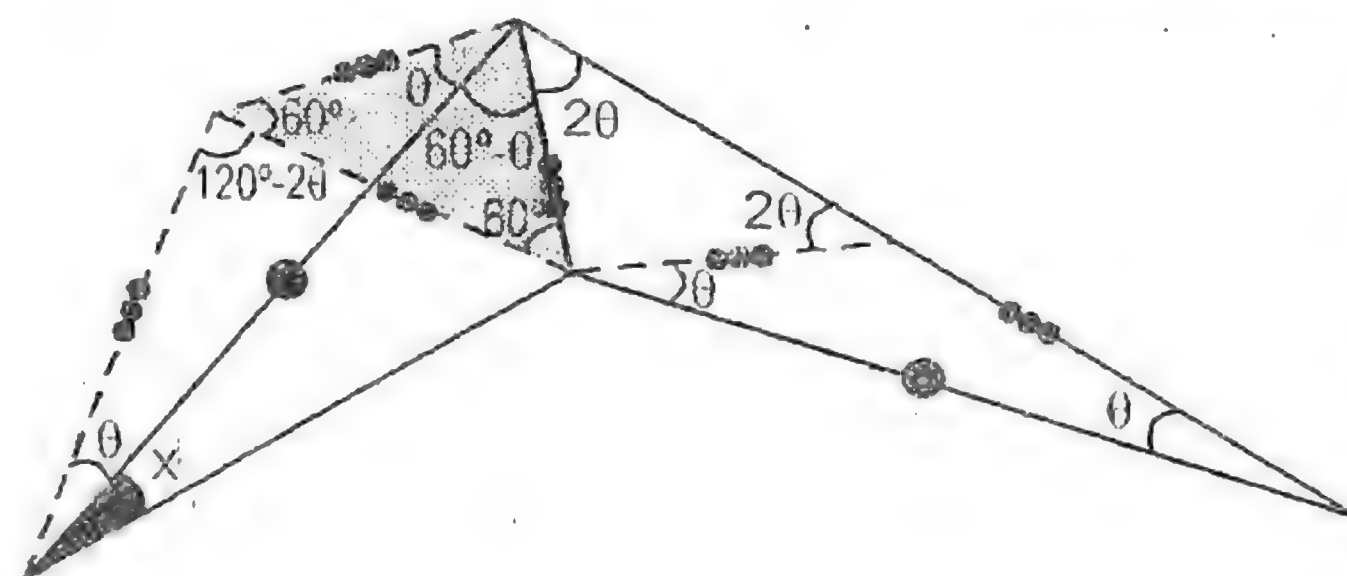
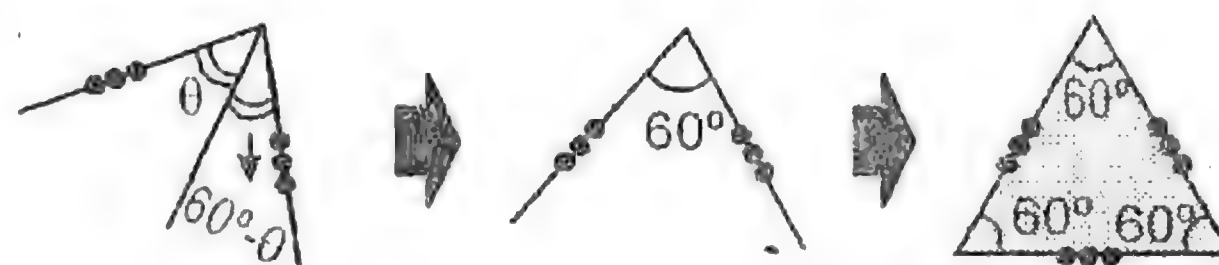
Paso N° 2:

Ahora como observamos lados iguales en forma alternada, entonces formamos triángulos congruentes de la siguiente manera.

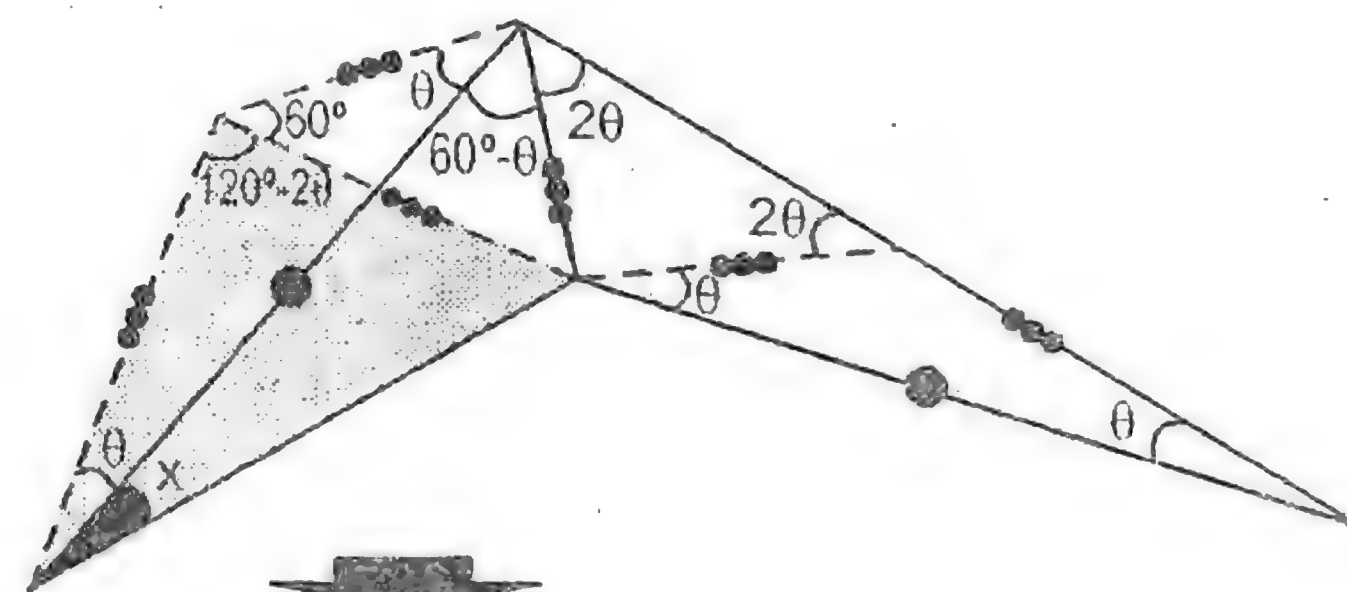


Paso N° 3:

Con el trazo realizado se observa que se ha obtenido un triángulo equilátero.



Paso N° 4: Luego tenemos un triángulo isósceles, donde se cumple:

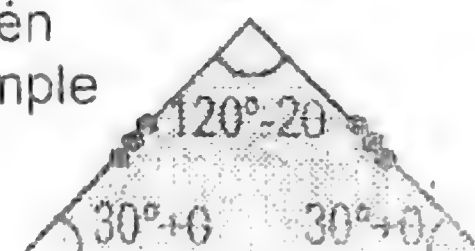


En la figura:

$$\therefore x + \theta = 30^\circ + \theta$$

$$x = 30^\circ$$

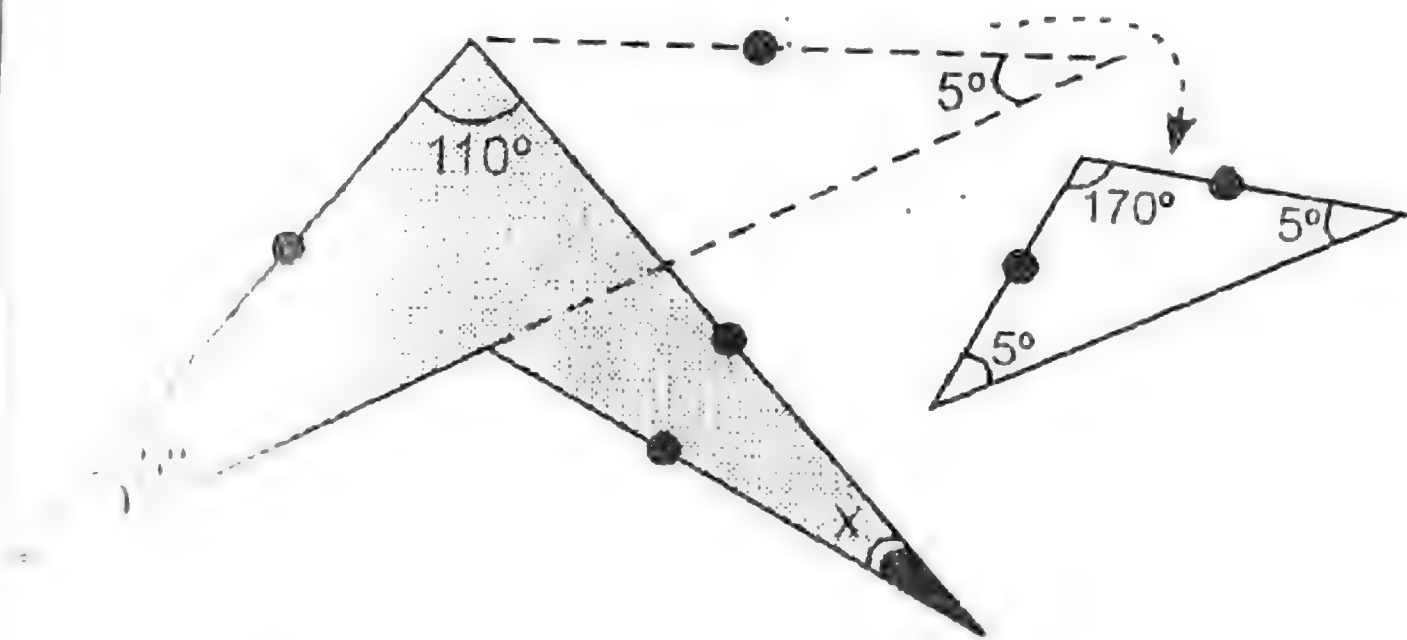
También se cumple



Solución N° 69

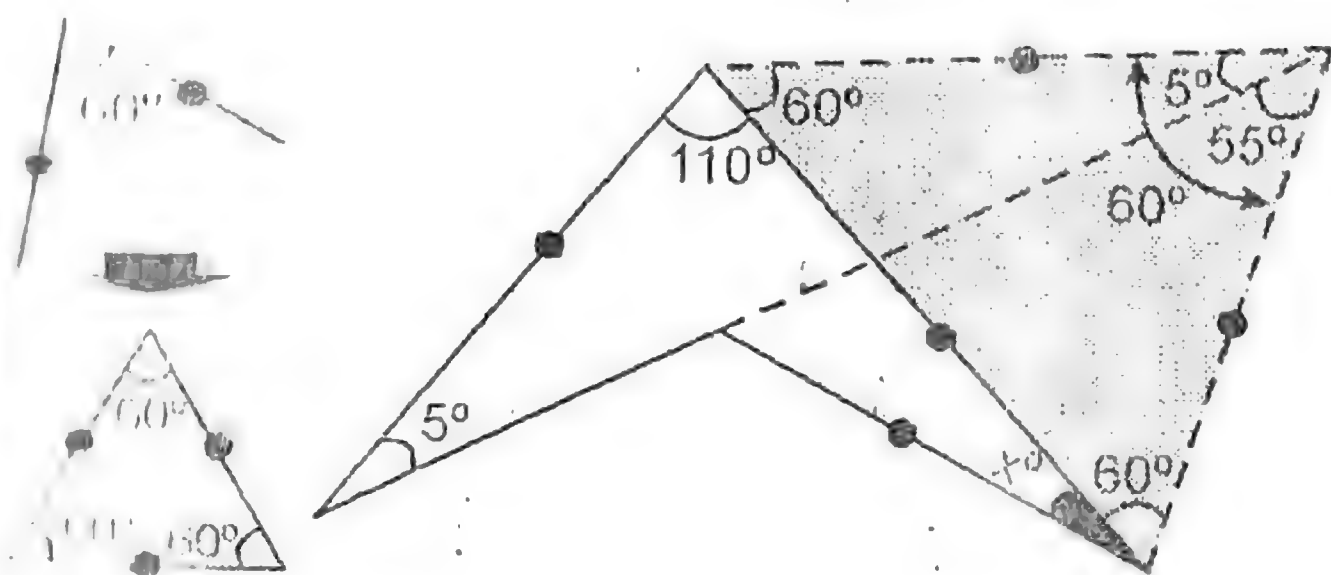
Paso N° 1:

En la figura se observa que podemos obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo: el sexto criterio de construcción.



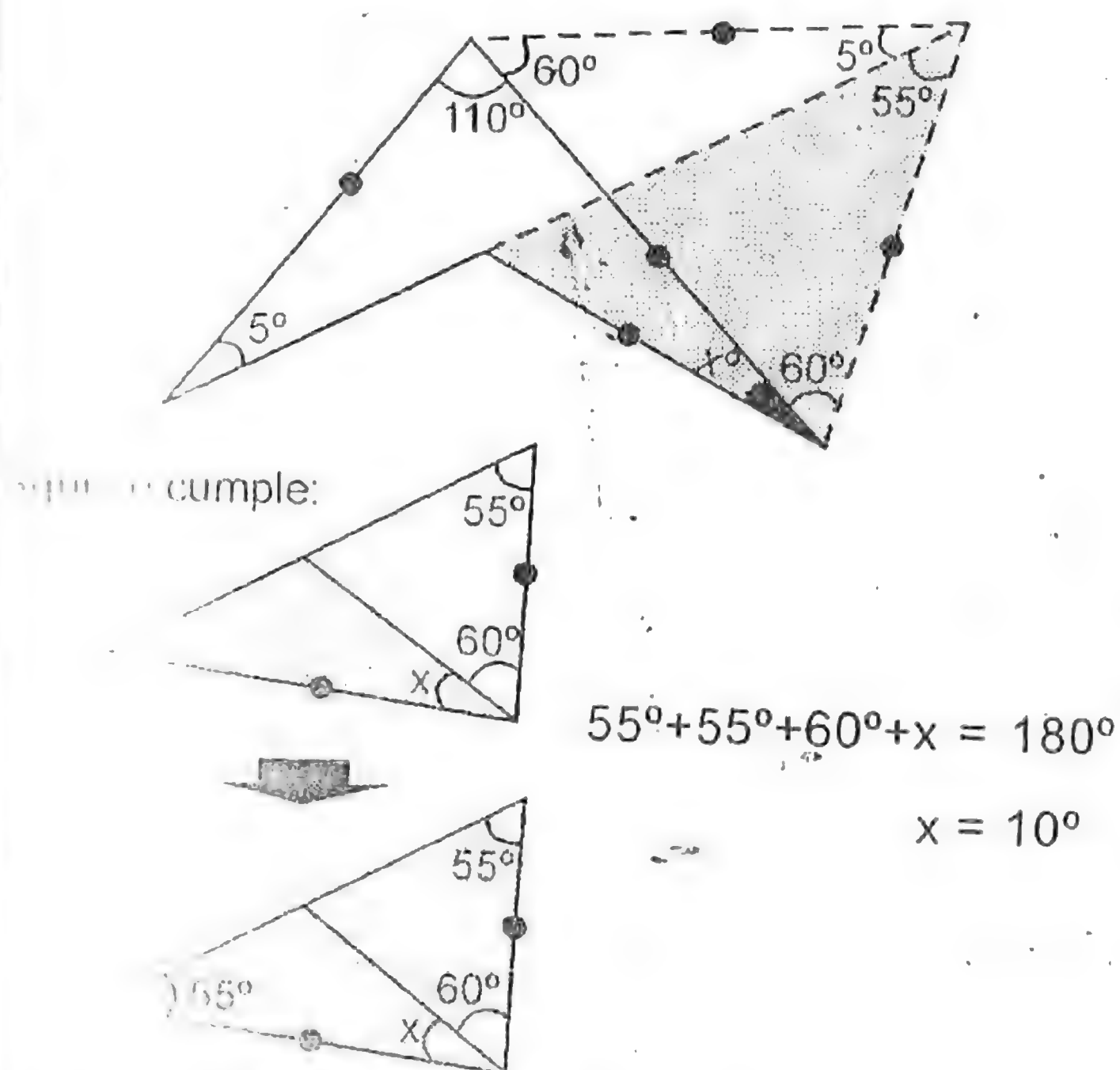
Paso N° 2:

Con el trazo realizado se observa que obtenemos un ángulo de 60° y también lados iguales donde se cumple la siguiente propiedad.



Paso N° 3:

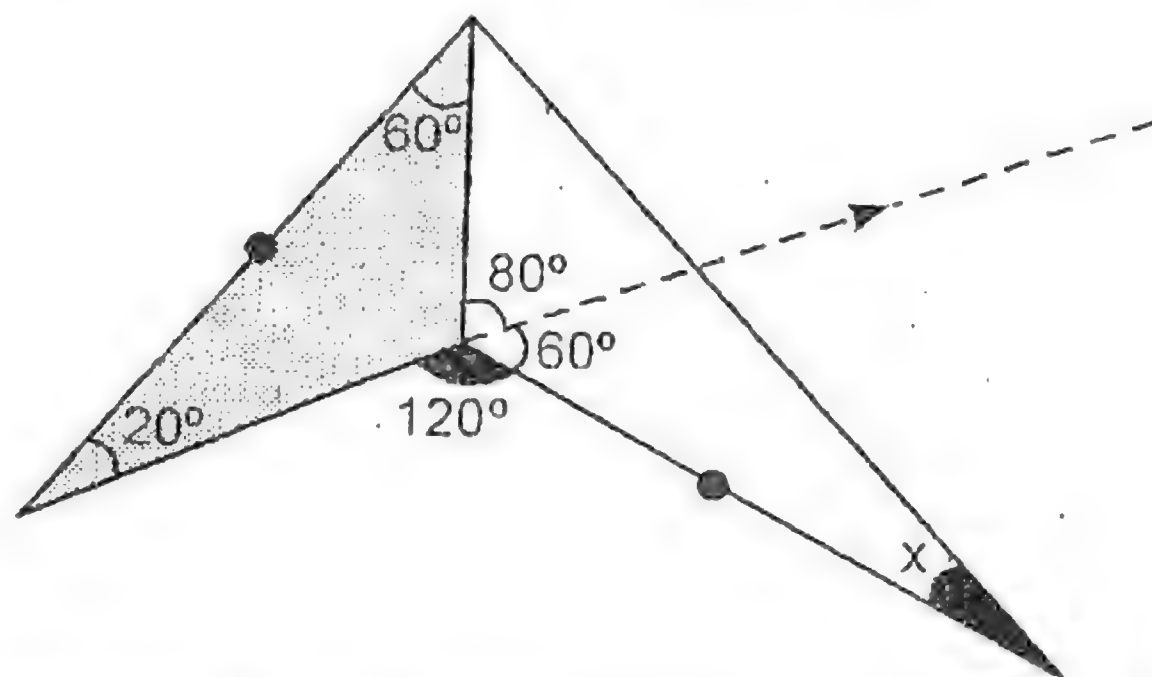
ahora observamos un triángulo isósceles en la figura sombreada.



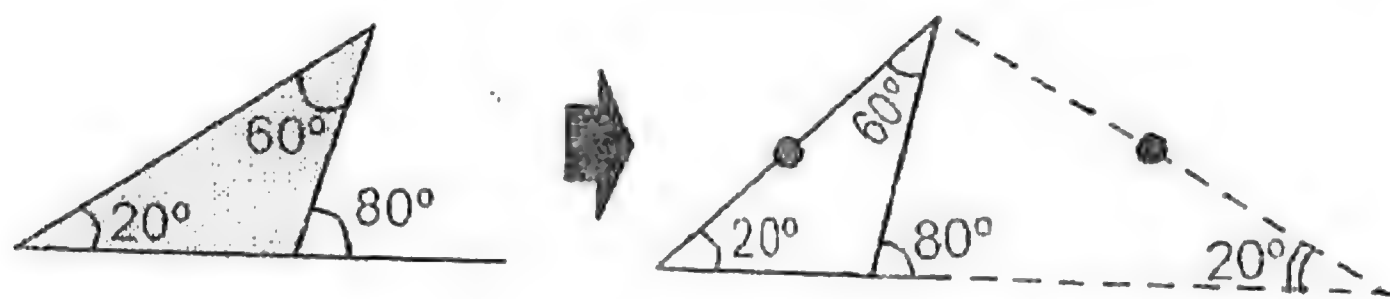
Solución N° 70

Paso N° 1:

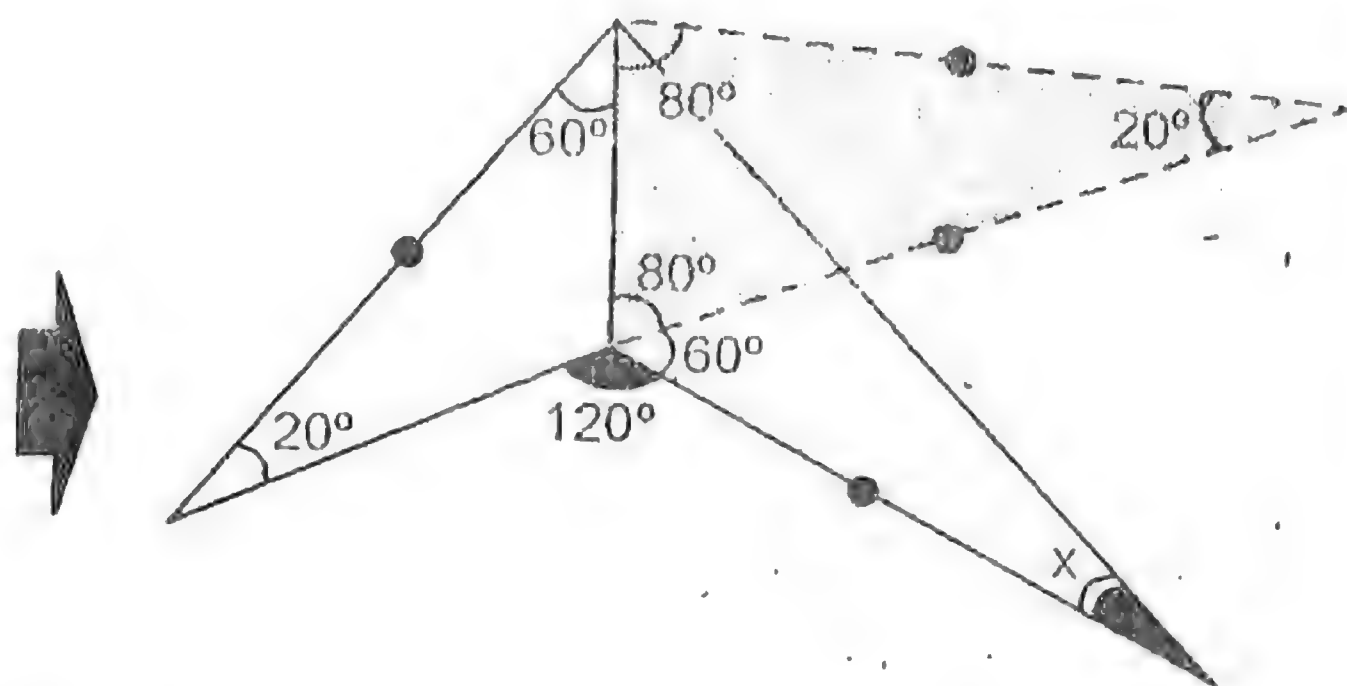
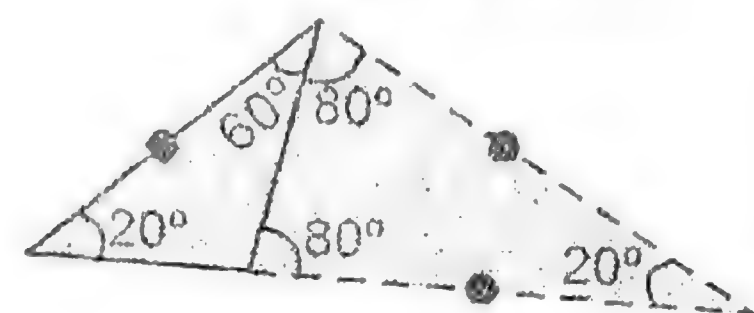
En la figura mostrada se observa:



Se realiza el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles (Sexto criterio de construcción)

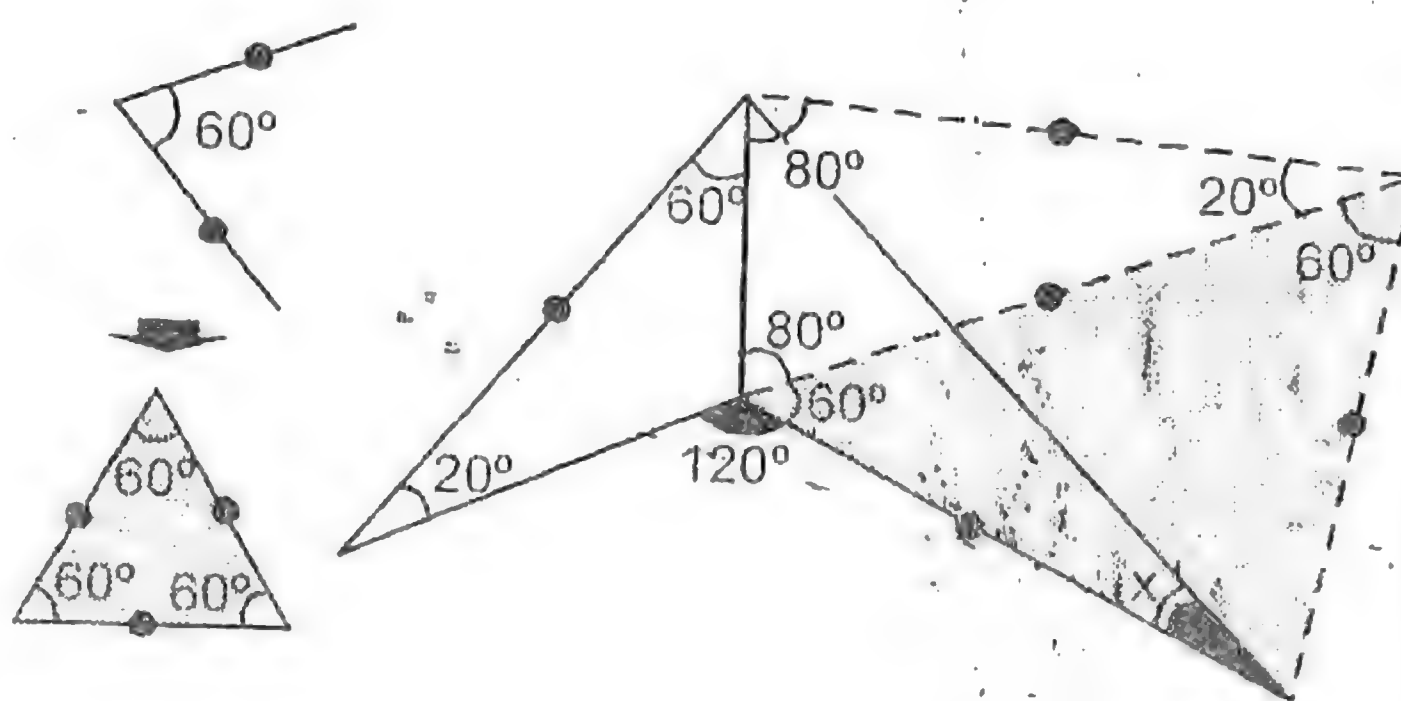


También se obtiene



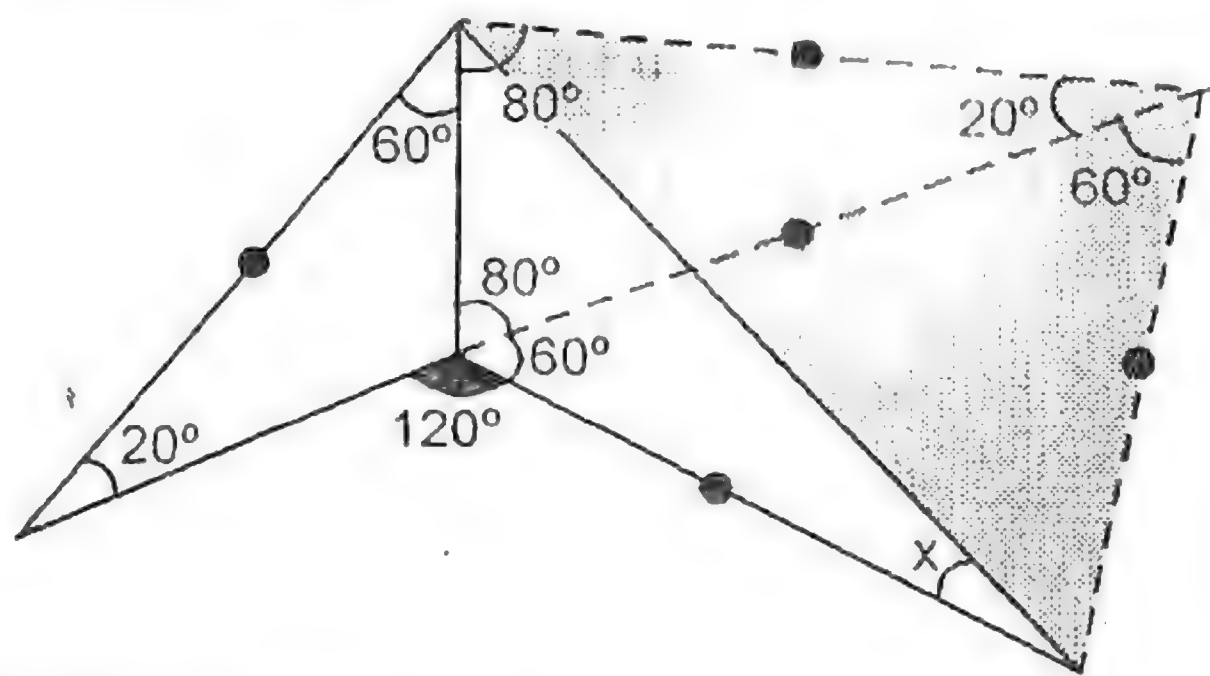
Paso N° 2:

Con el trazo realizado se observa que obtiene un triángulo equilátero en la figura sombreada.

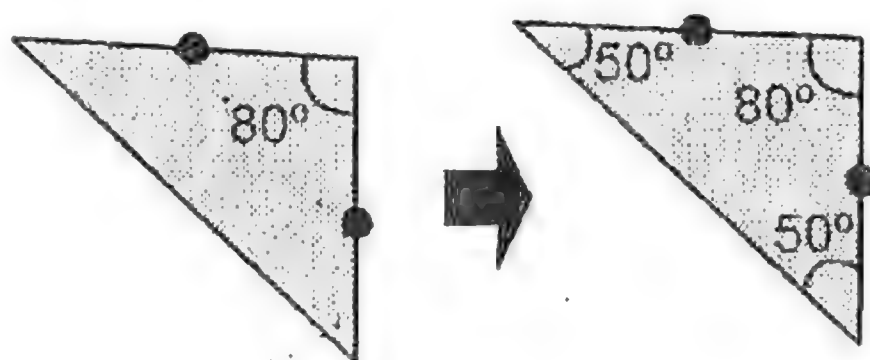


Paso N° 3:

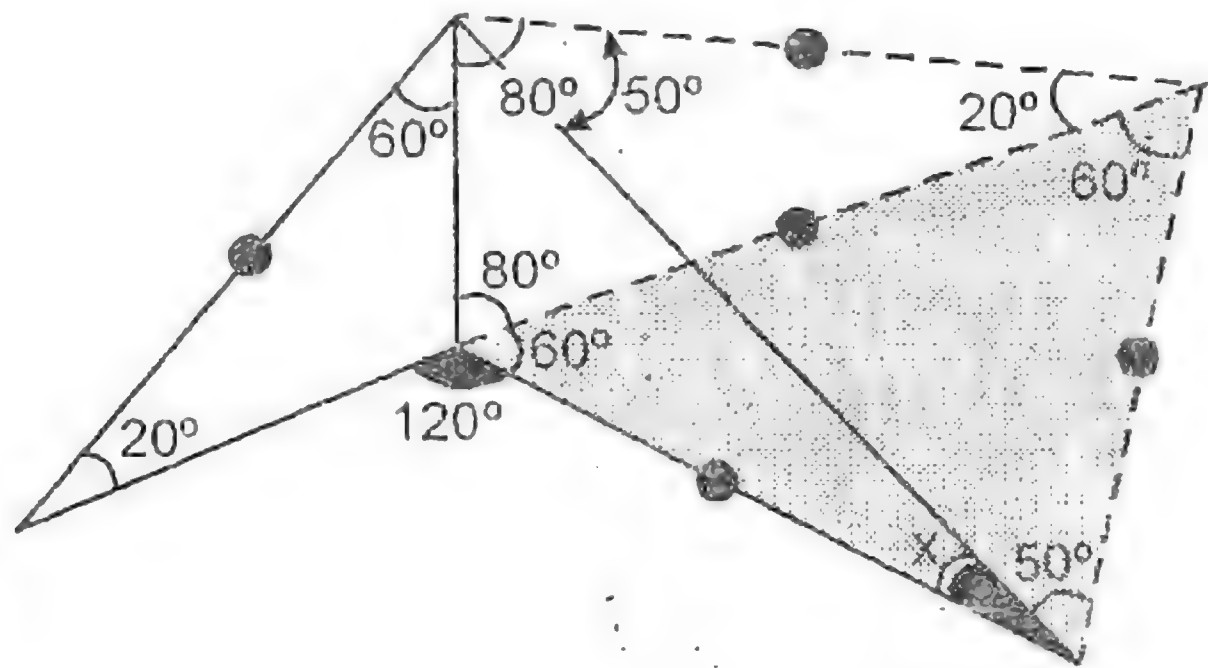
Ahora observamos que se tiene en la figura un nuevo triángulo isósceles.



Aquí se cumple:



Paso N° 4: Se obtiene un nuevo triángulo isósceles, donde cumple:



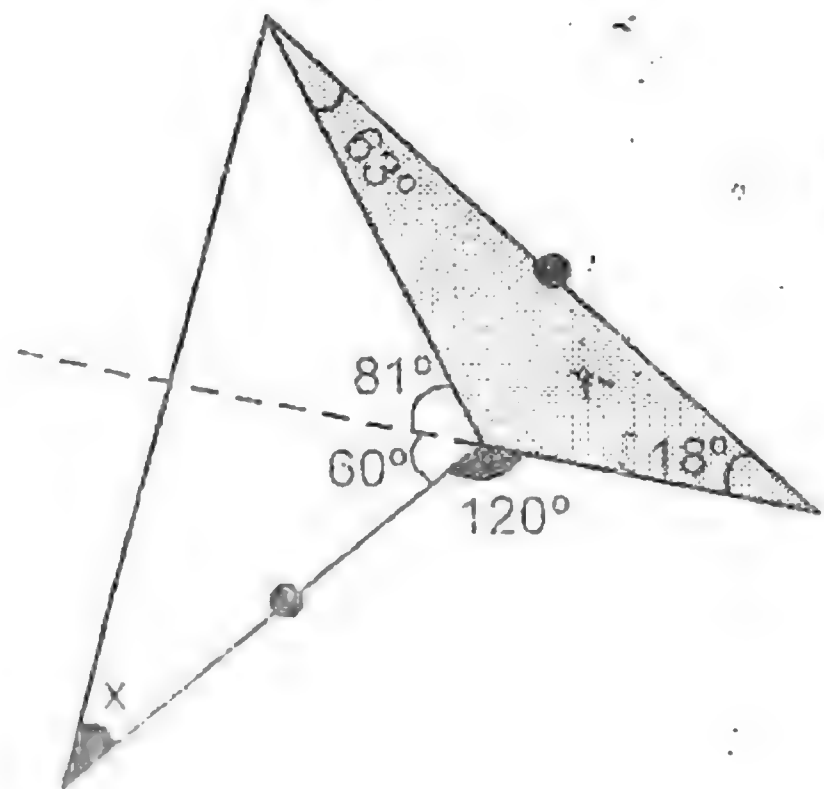
En la figura se observa:

$$x + 50^\circ = 60^\circ$$

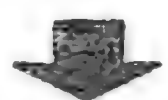
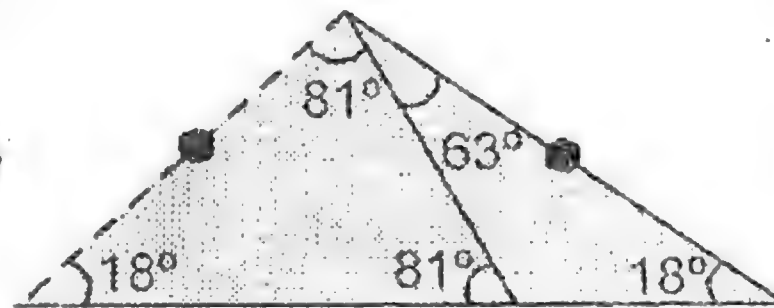
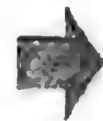
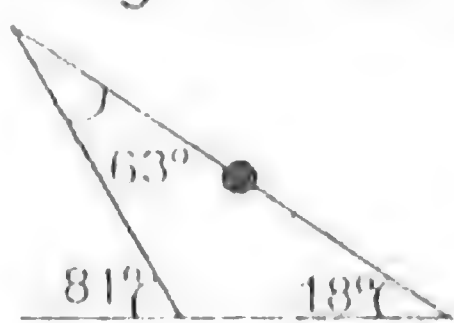
$$x = 10^\circ$$

Solución N° 71

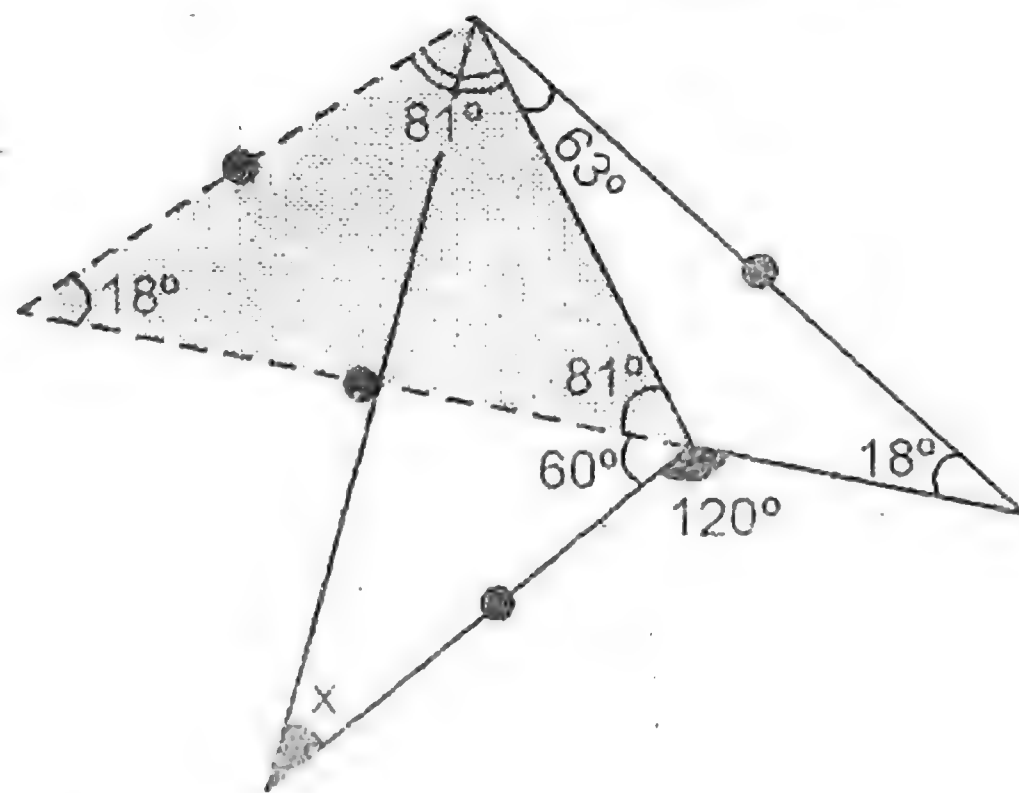
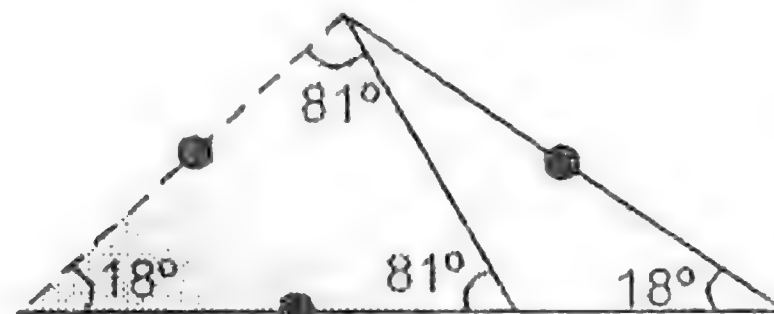
En la figura mostrada se observa:



Paso N° 1: En la siguiente figura se realizará el sexto criterio de construcción, para encontrar triángulos isósceles:

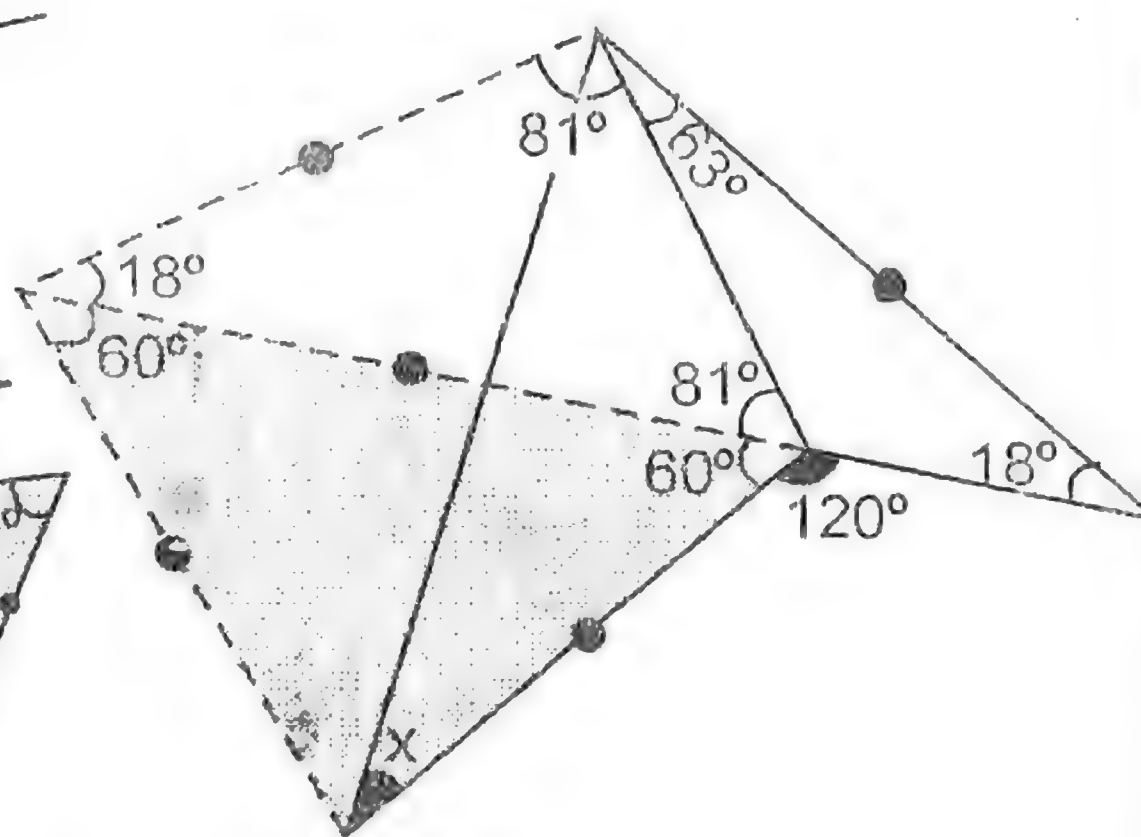
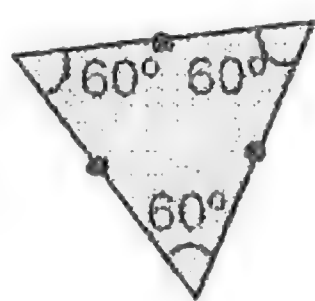


También se obtiene



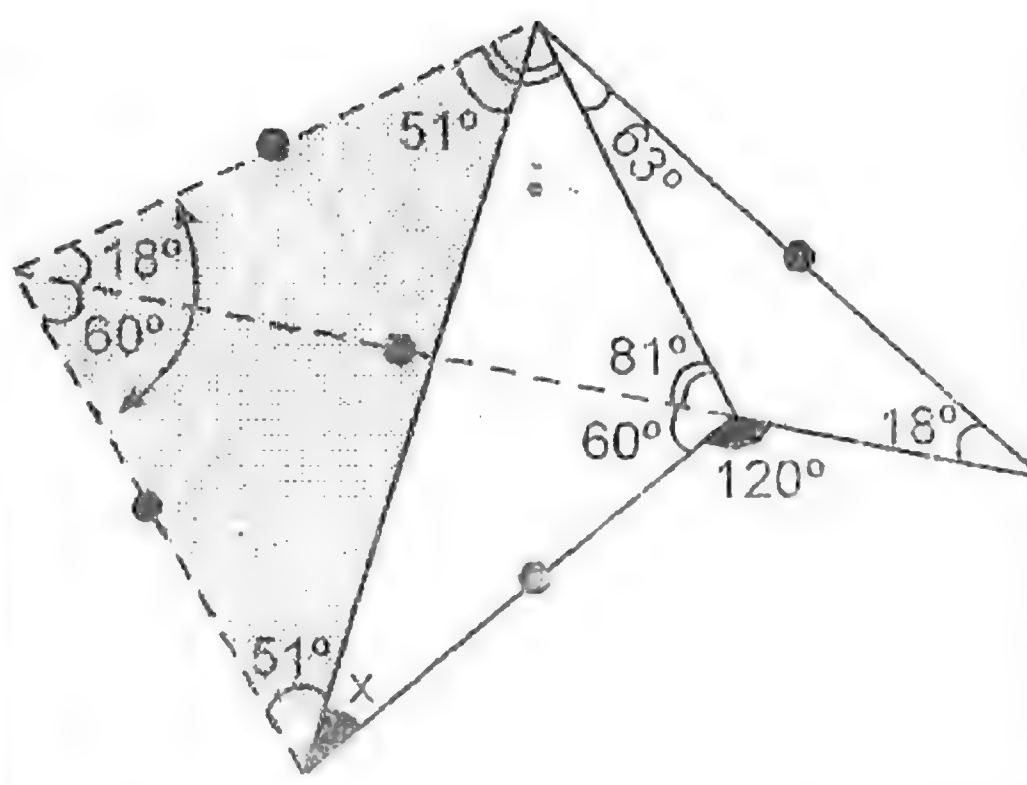
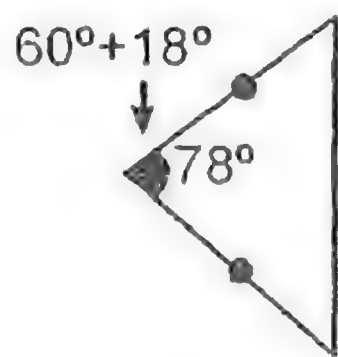
Paso N° 2:

Con el trazo realizado se tiene un triángulo equilátero.



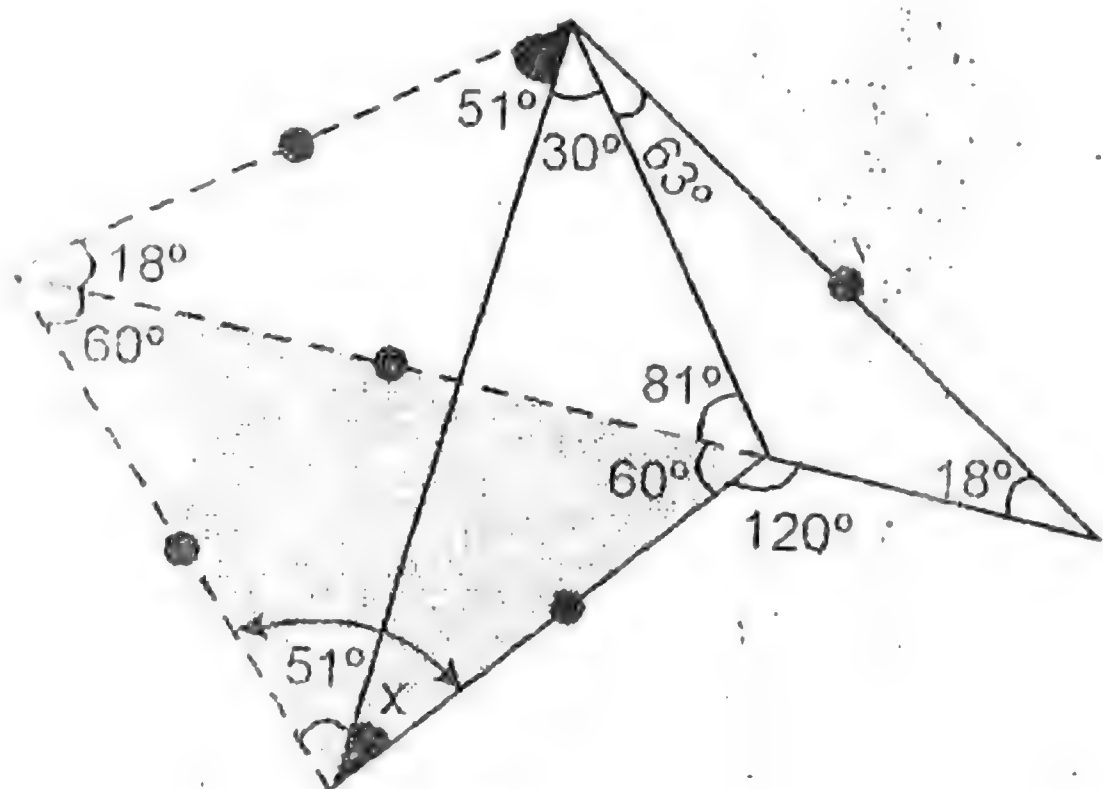
Paso N° 3:

Luego obtenemos un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 4:

En la nueva figura se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:

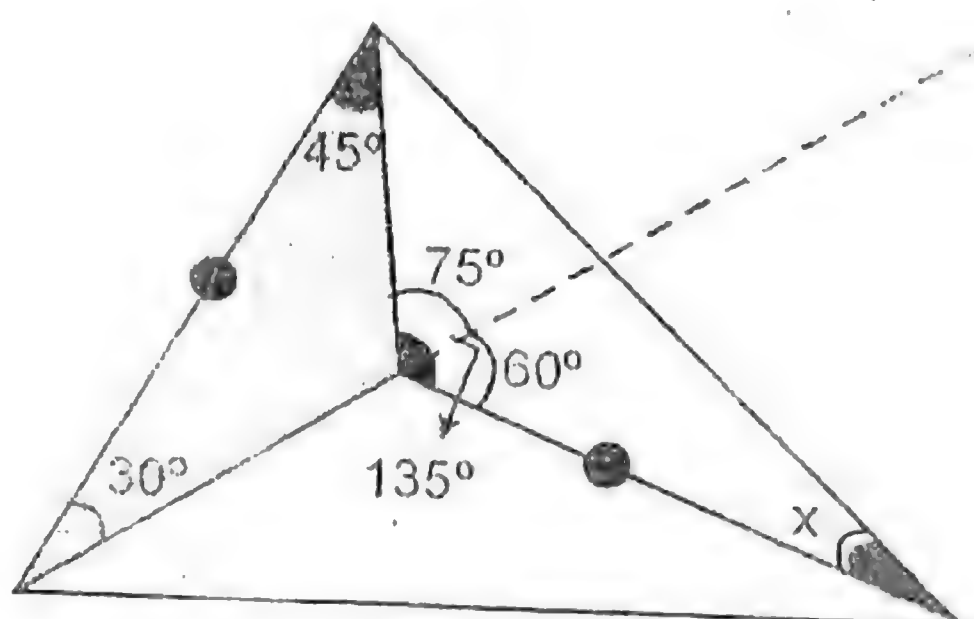


$$x + 51^\circ = 60^\circ$$

$$x = 9^\circ$$

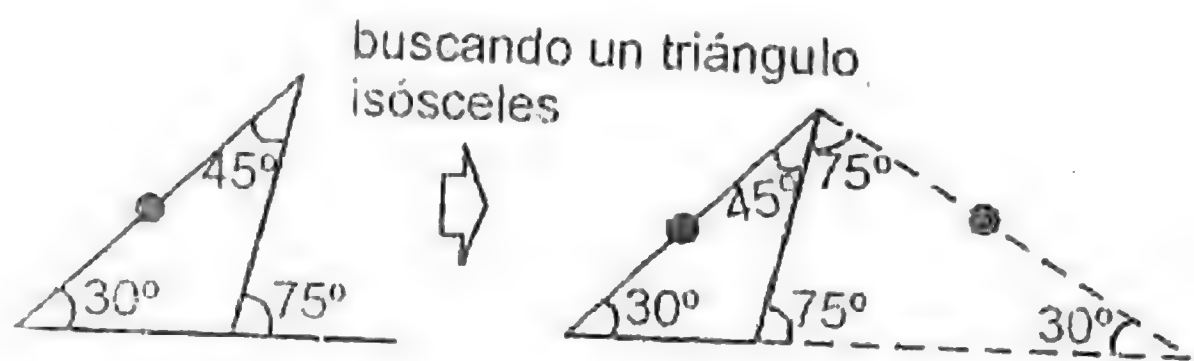
Solución N° 72

En la figura se observa:



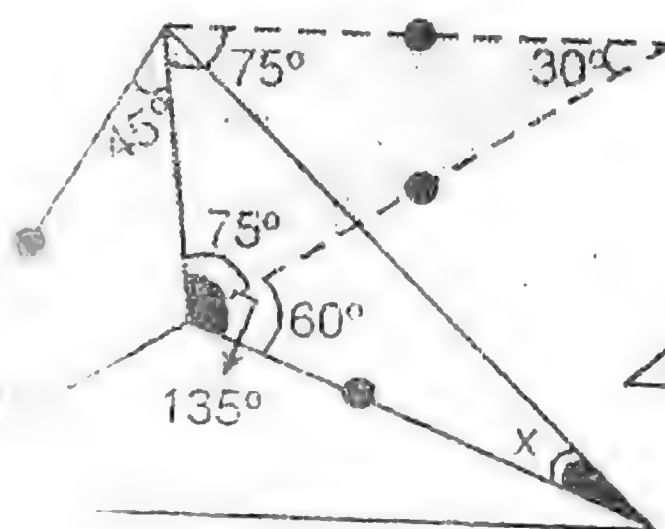
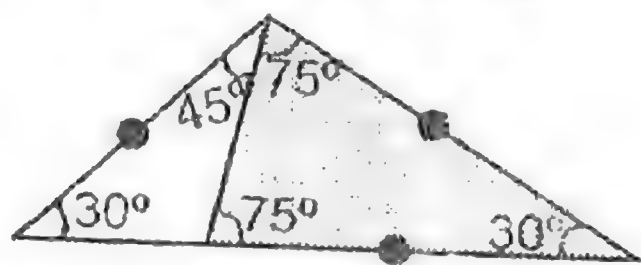
Paso N° 1:

Observamos la siguiente figura en donde realizamos el sexto criterio de construcción.



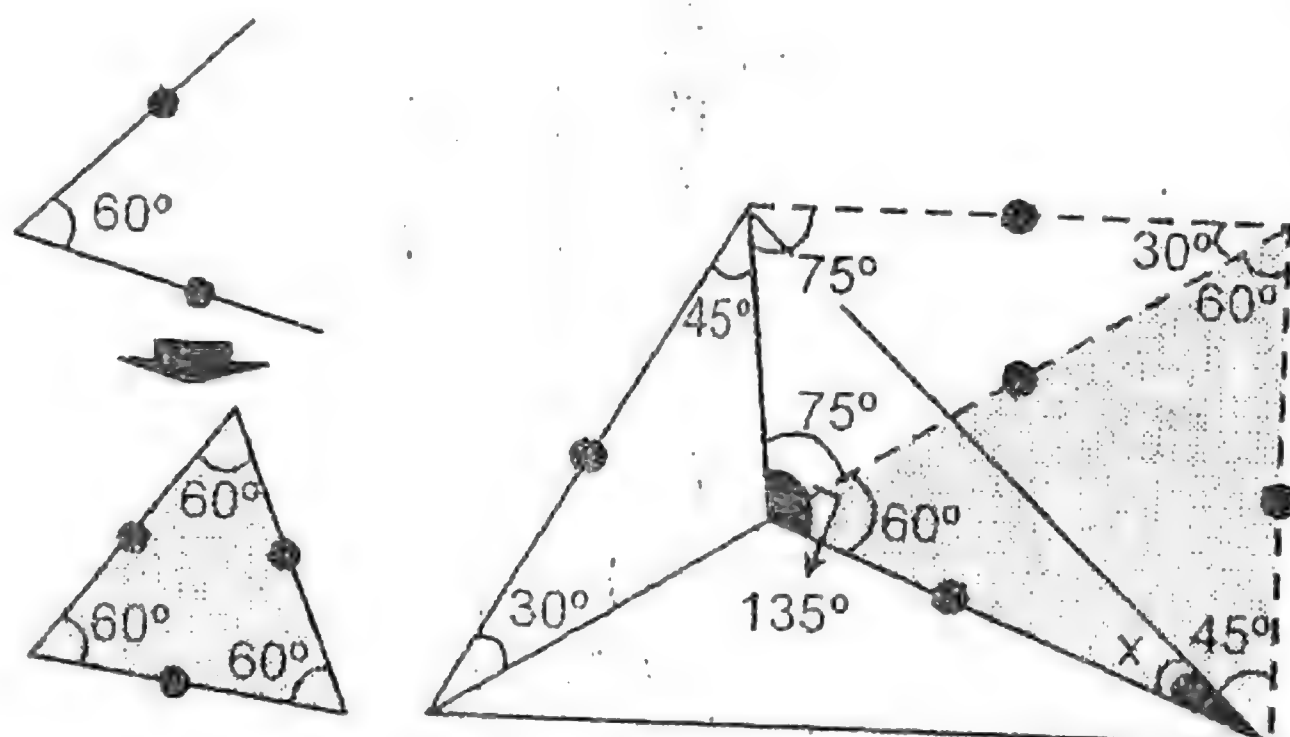
buscando un triángulo isósceles

también se obtiene

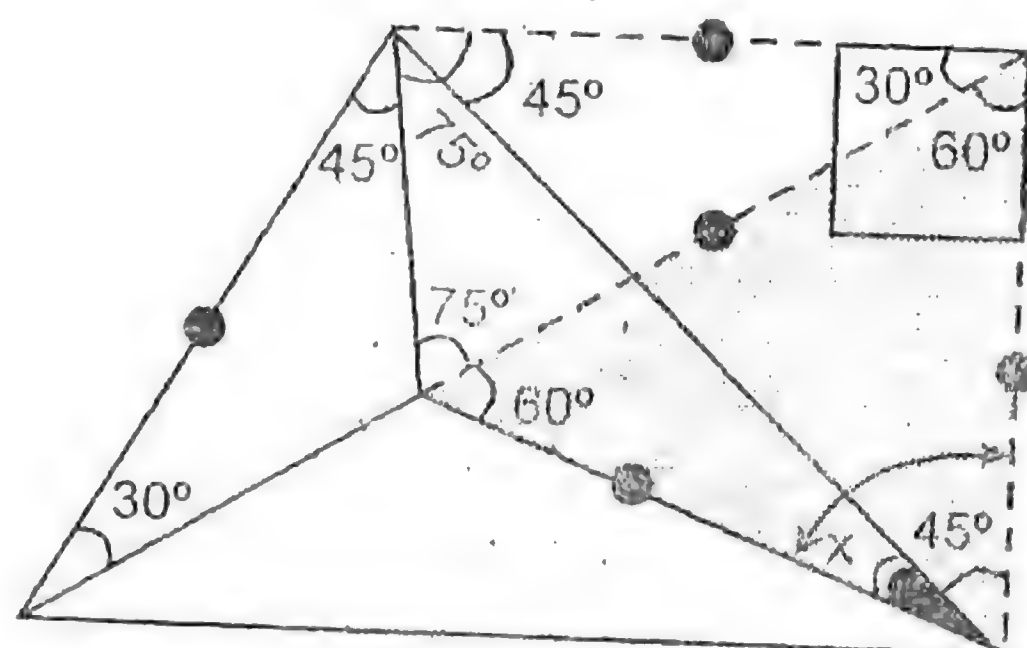


Paso N° 2:

Con el trazo realizado se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3: Se observa en el triángulo equilátero donde se cumple:

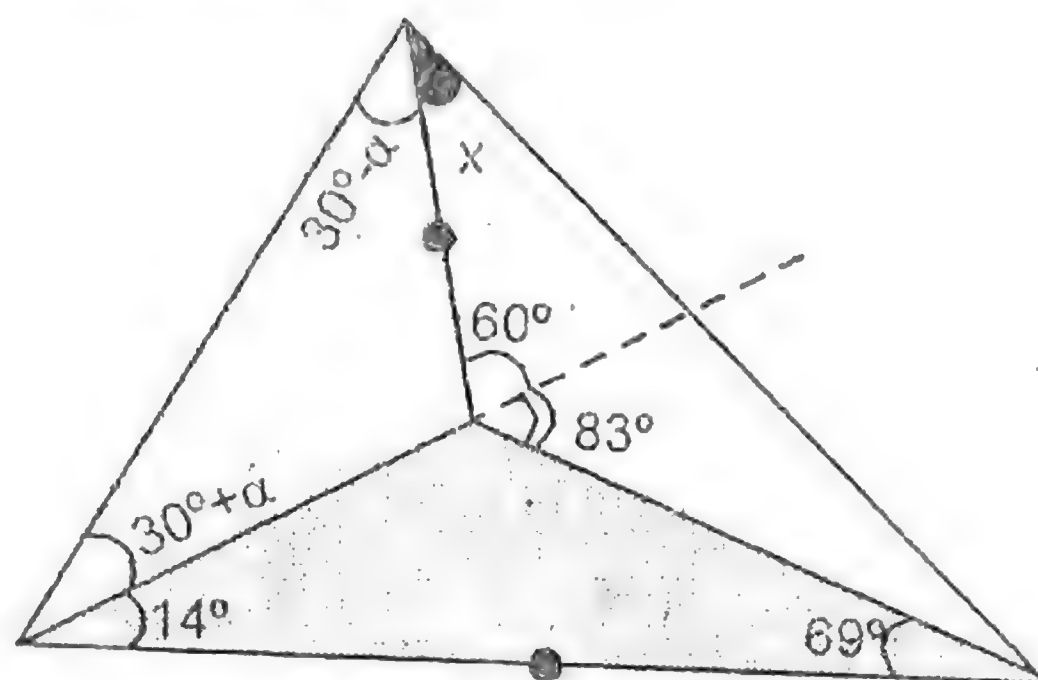


$$x + 45^\circ = 90^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

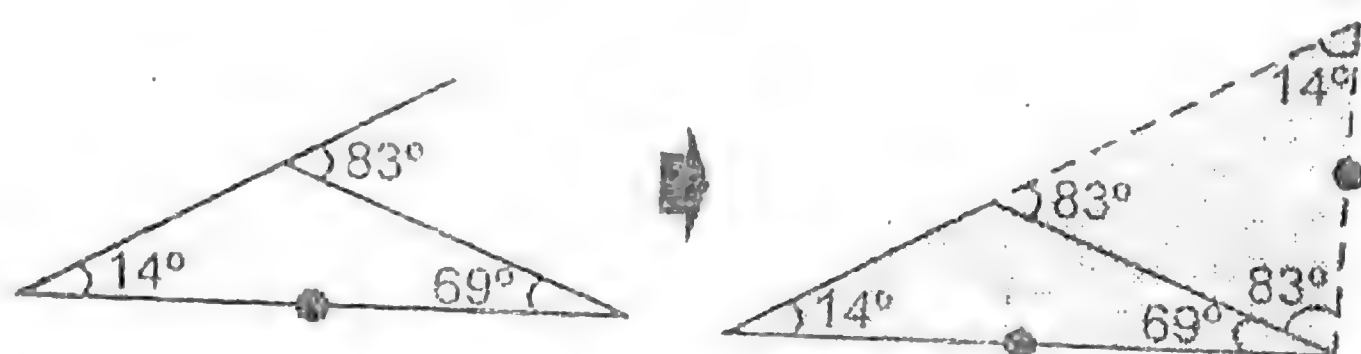
Solución N° 73

En la figura se observa:

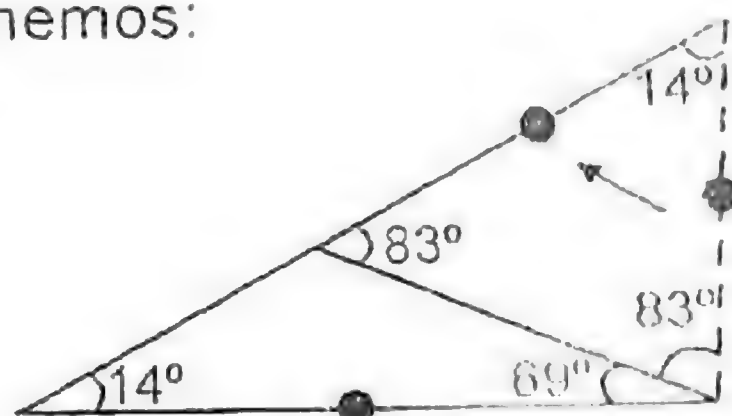


Paso N° 1:

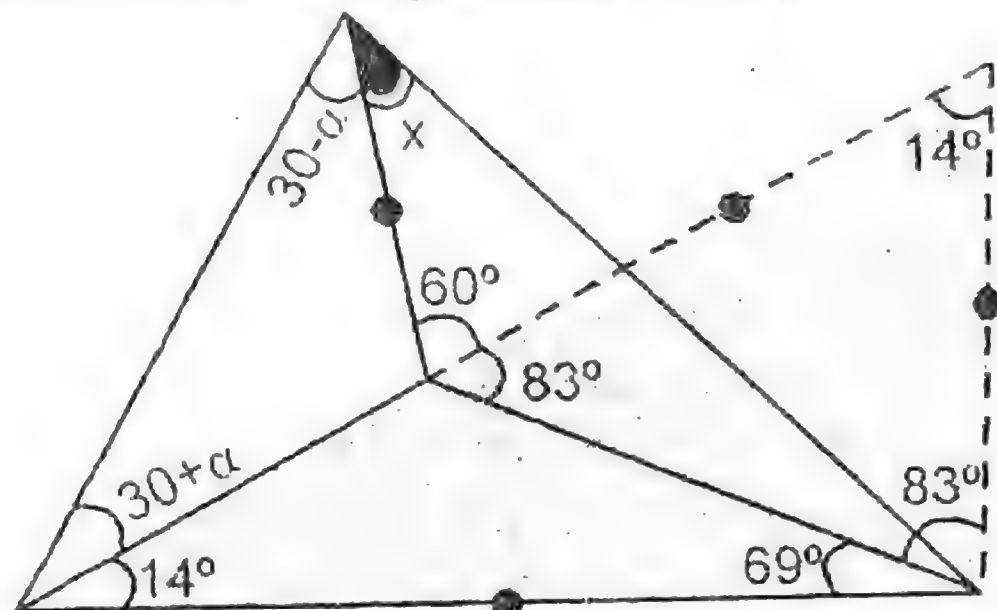
En la figura se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción)



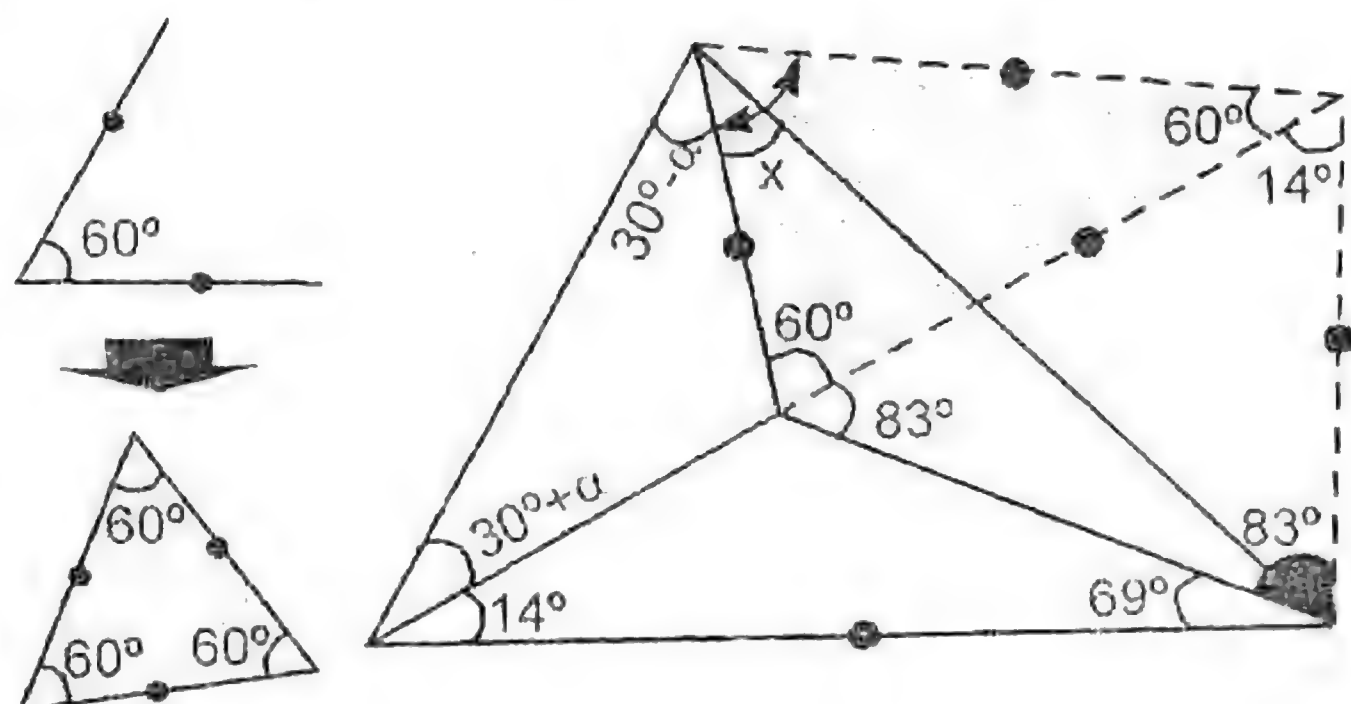
También tenemos:



Luego tenemos la siguiente figura:

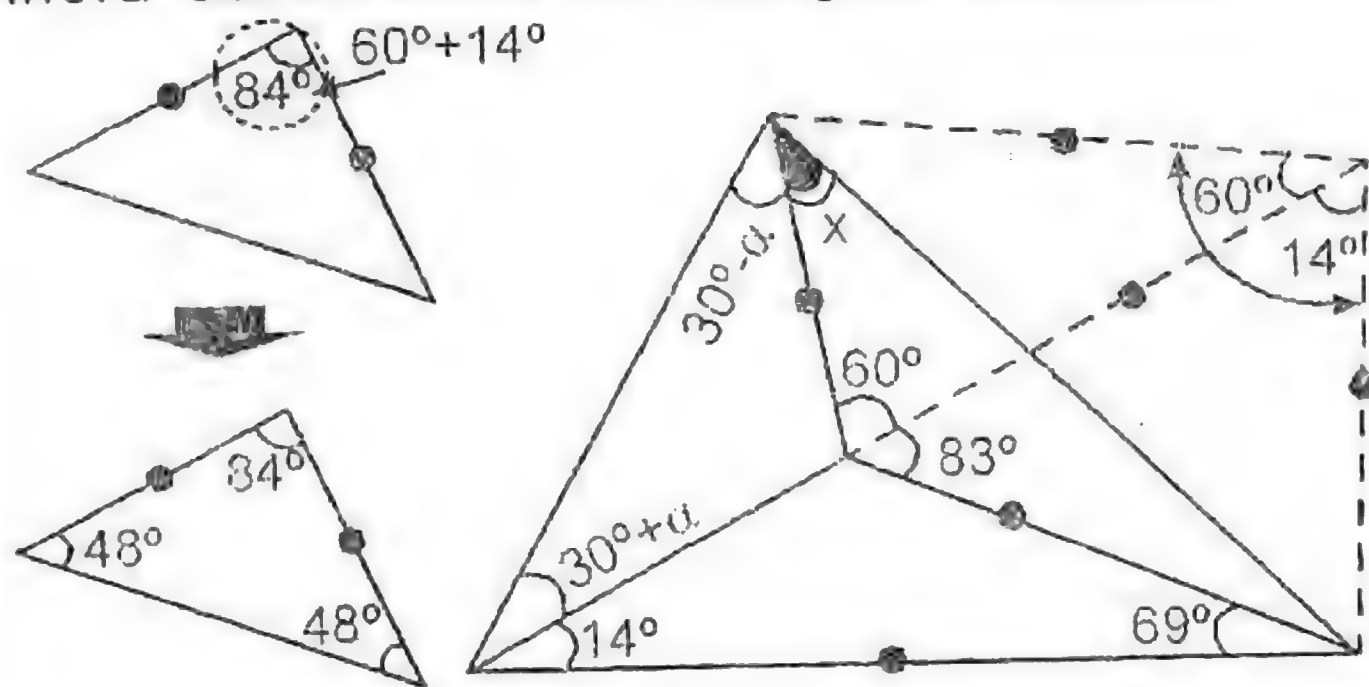


Paso N° 2: Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.

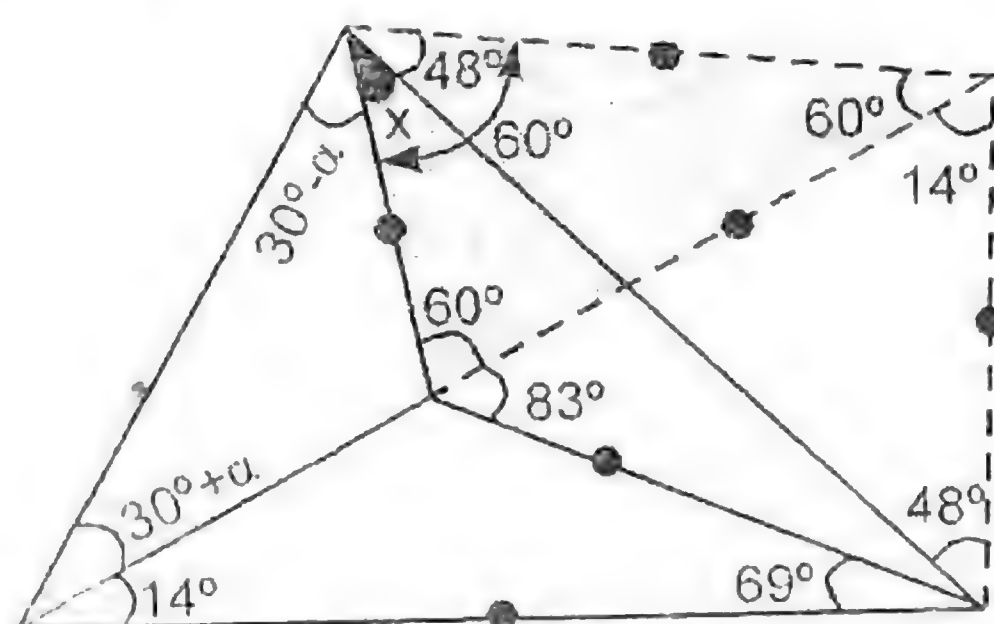


Paso N° 3:

Ahora observamos un triángulo isósceles.



Paso N° 4: Finalmente observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.



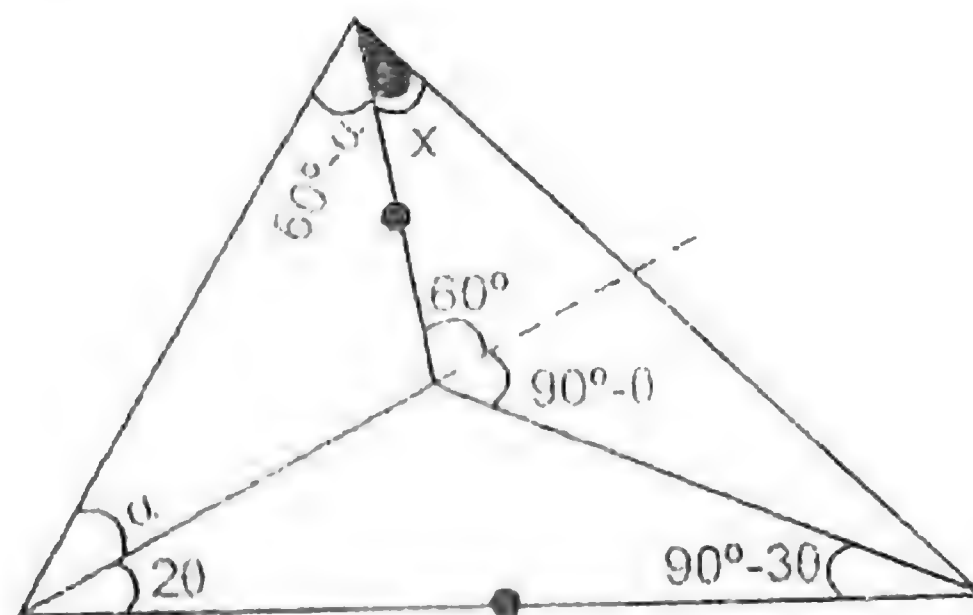
De la figura se cumple:

$$x + 48^\circ = 60^\circ$$

$$x = 12^\circ$$

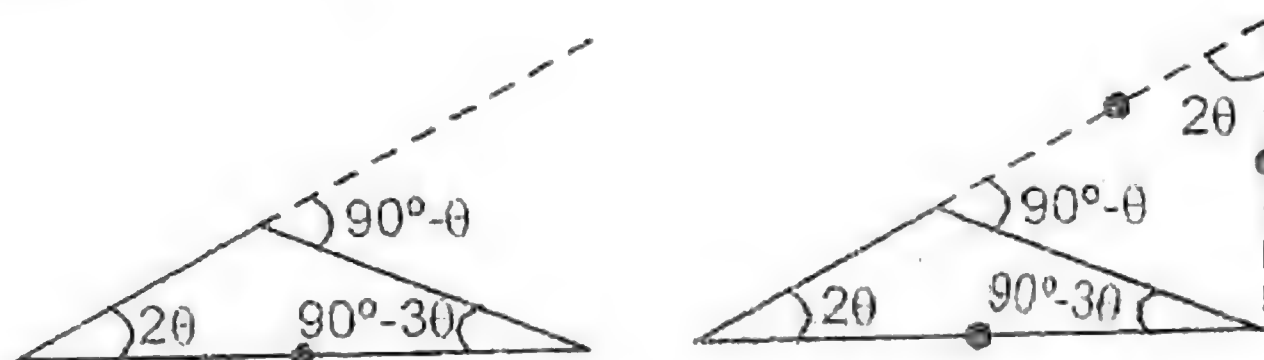
Solución N° 74

En la figura se observa:

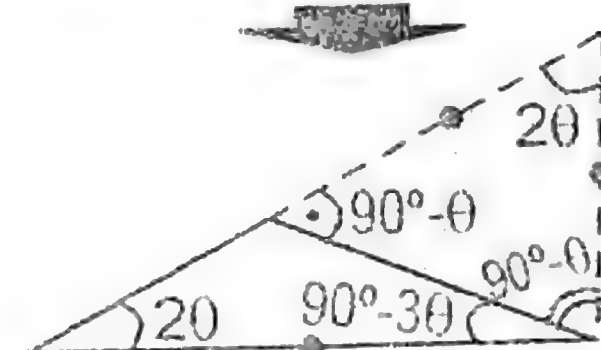


Paso N° 1:

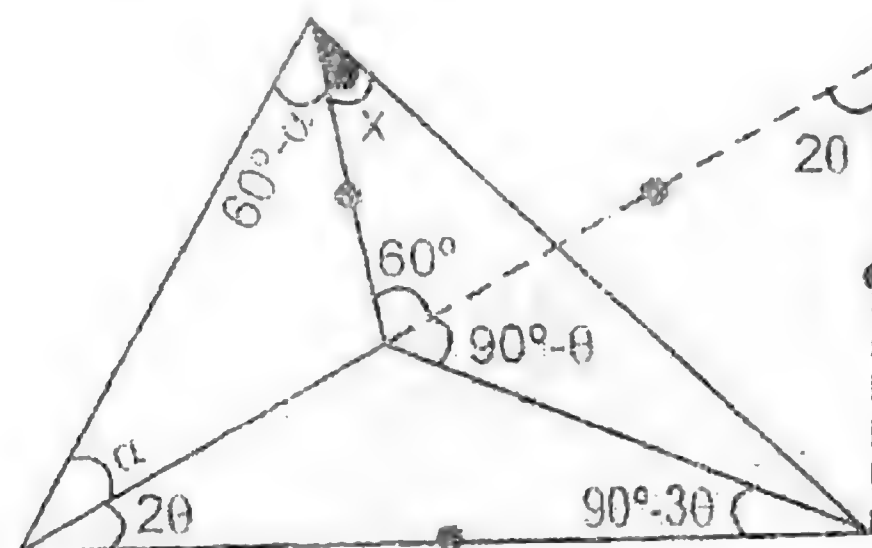
En la figura realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción).



También se cumple:

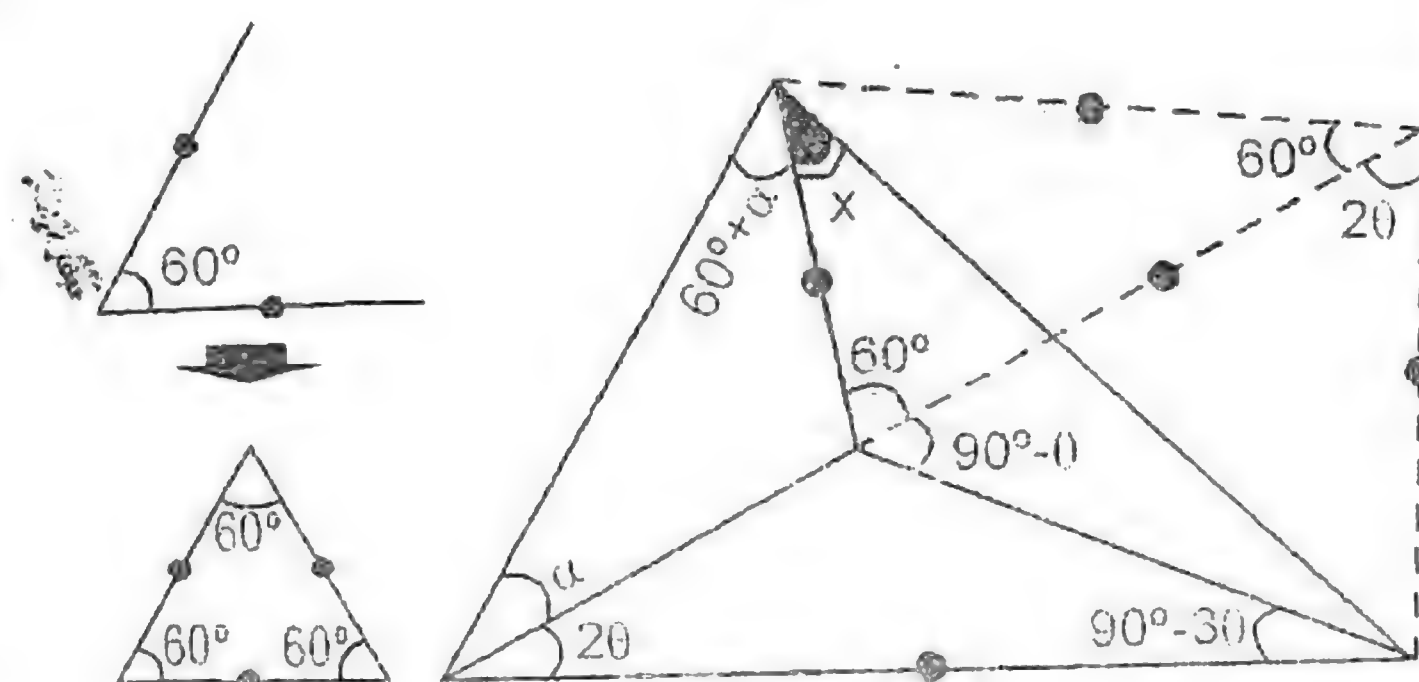


Luego tenemos en la figura:

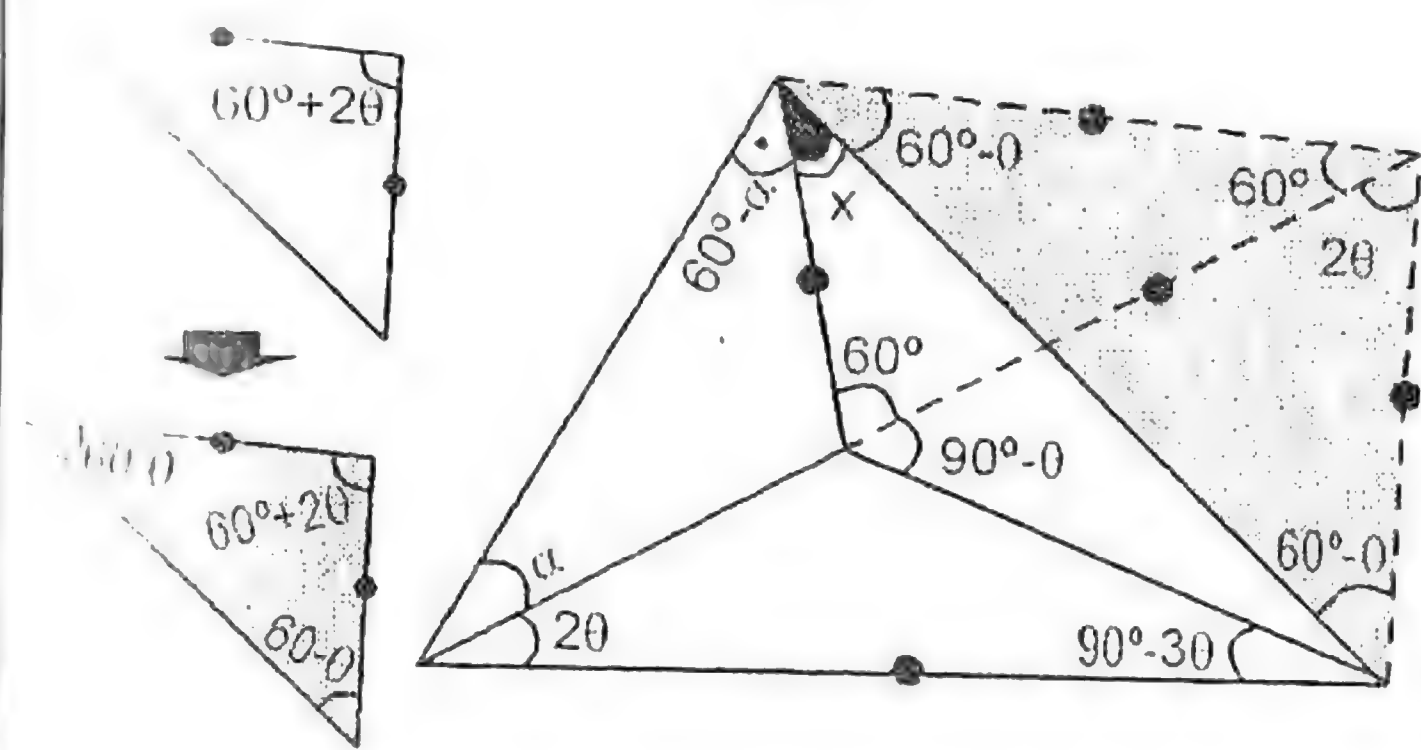


Paso N° 2:

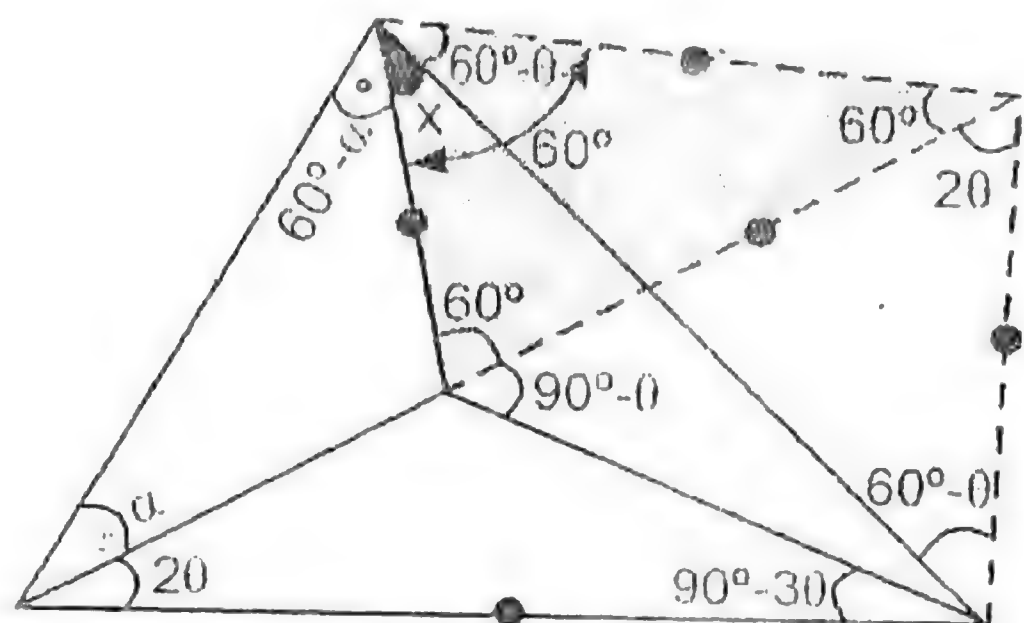
Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3: Luego observamos un triángulo isósceles donde se cumple:



Paso N° 4: Finalmente tenemos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.

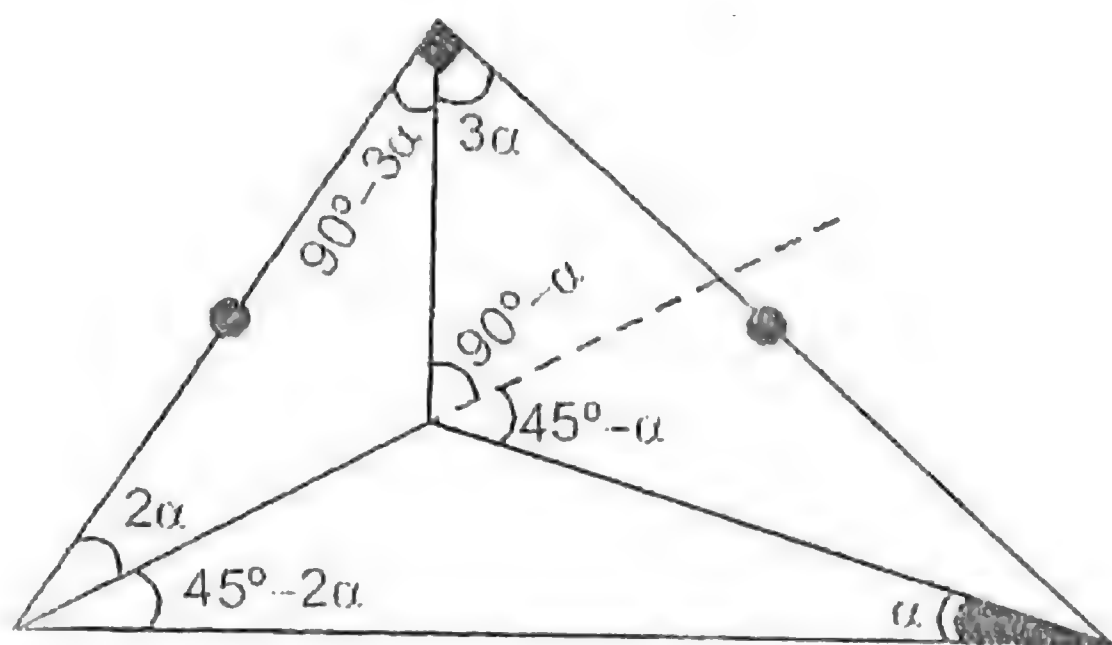


$$\therefore x + 60^\circ - () = 60^\circ$$

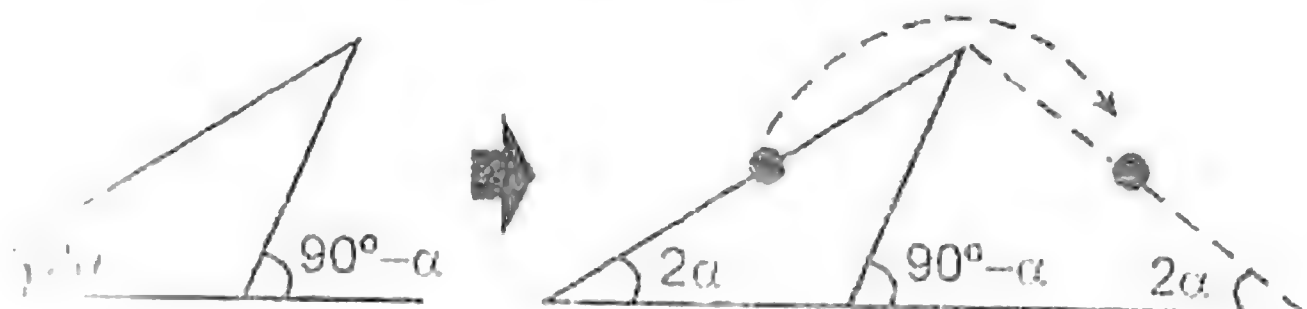
$$x = 0^\circ$$

Solución N° 75

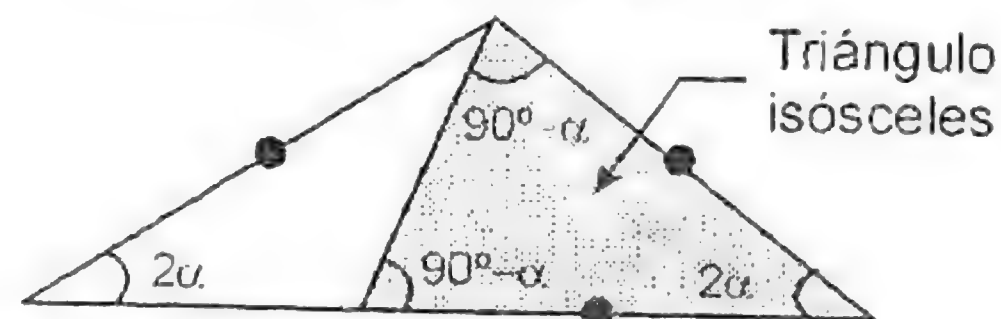
En la figura se observa:



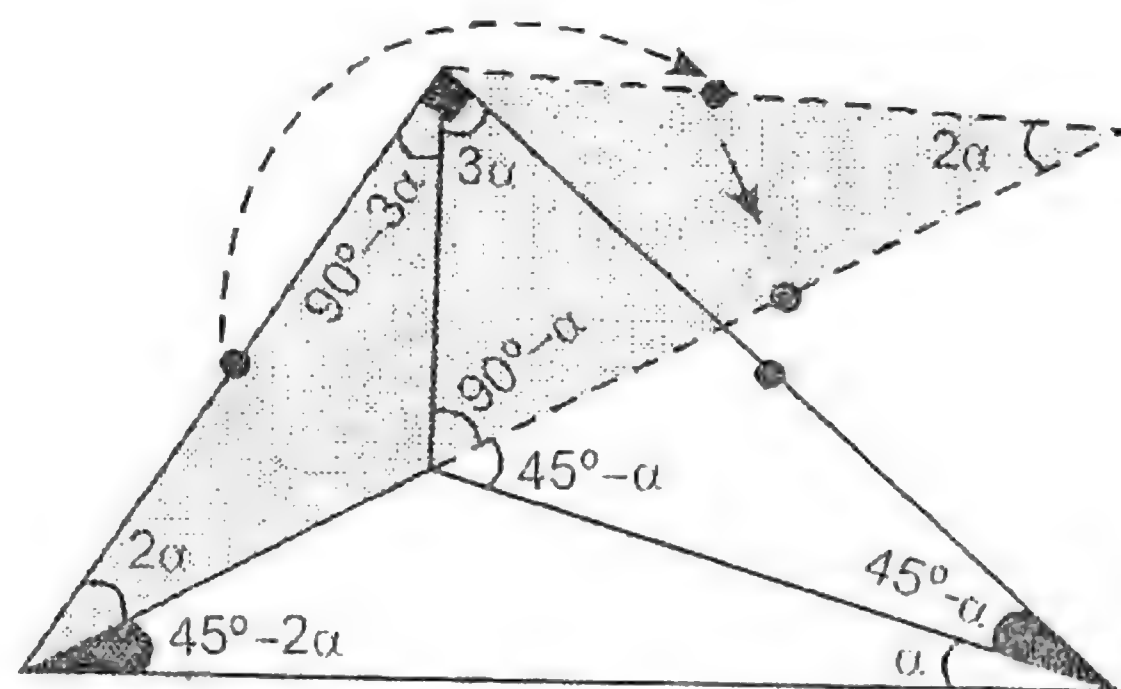
Paso N° 1: En la siguiente figura se realiza el siguiente trazo (Sexto criterio de construcción) para obtener triángulos isósceles.



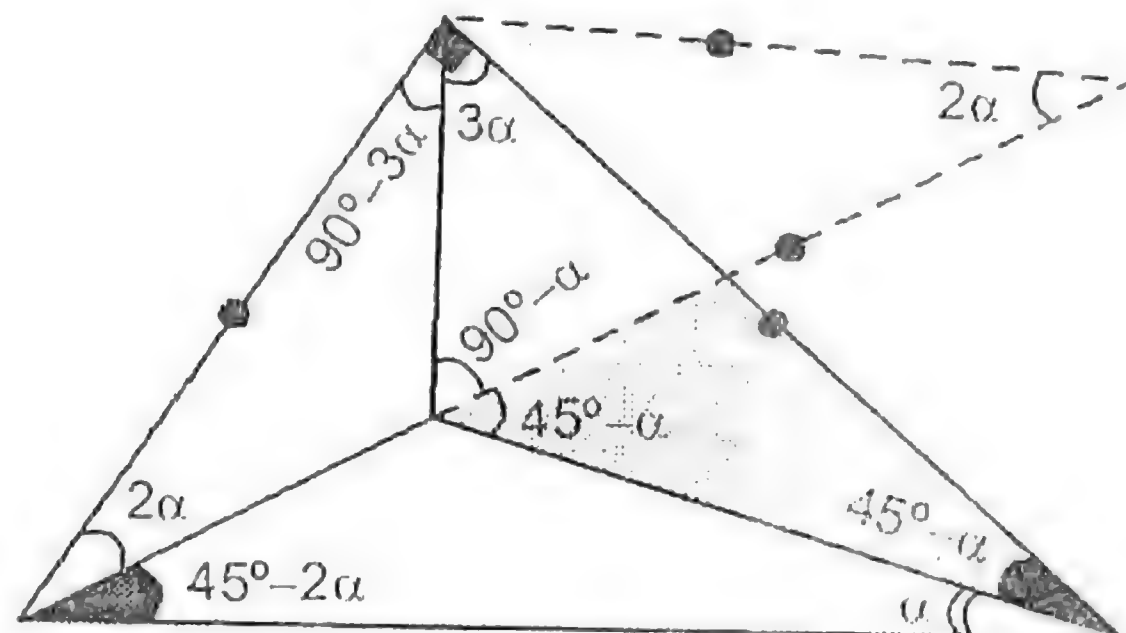
También se obtiene:



Luego obtenemos:

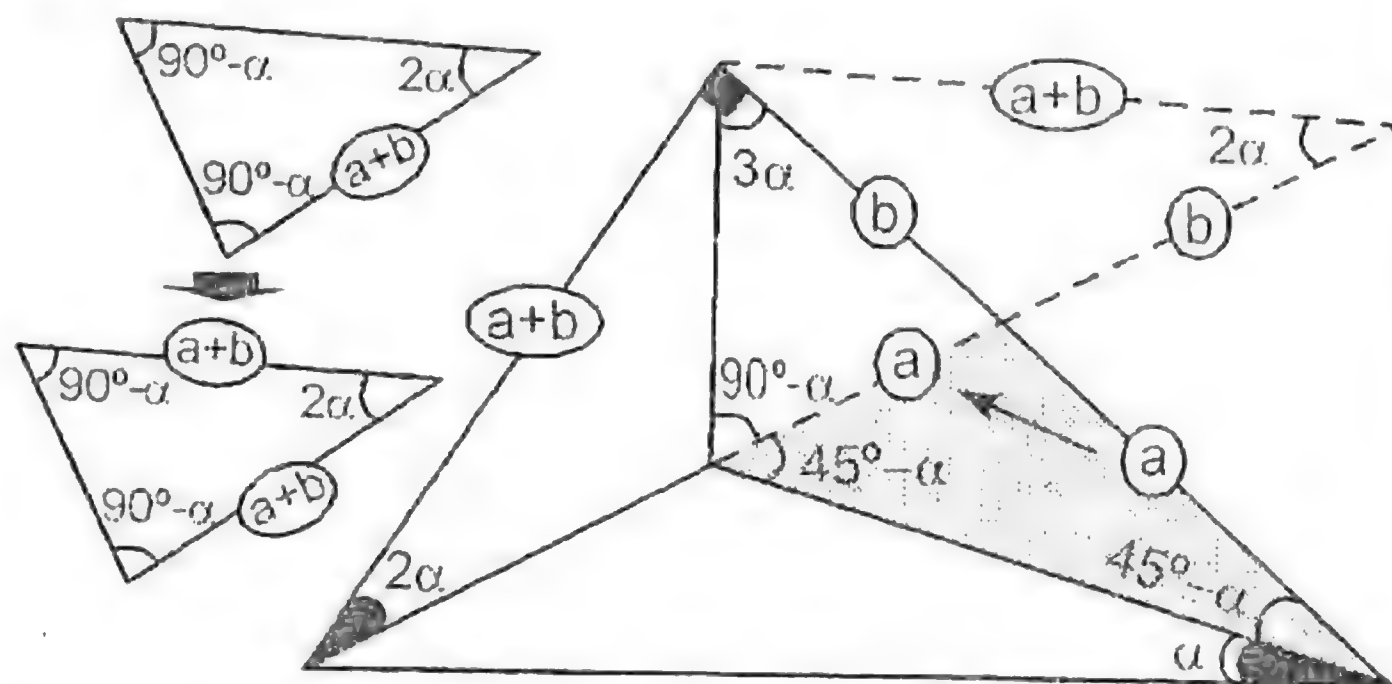


Paso N° 2: Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.

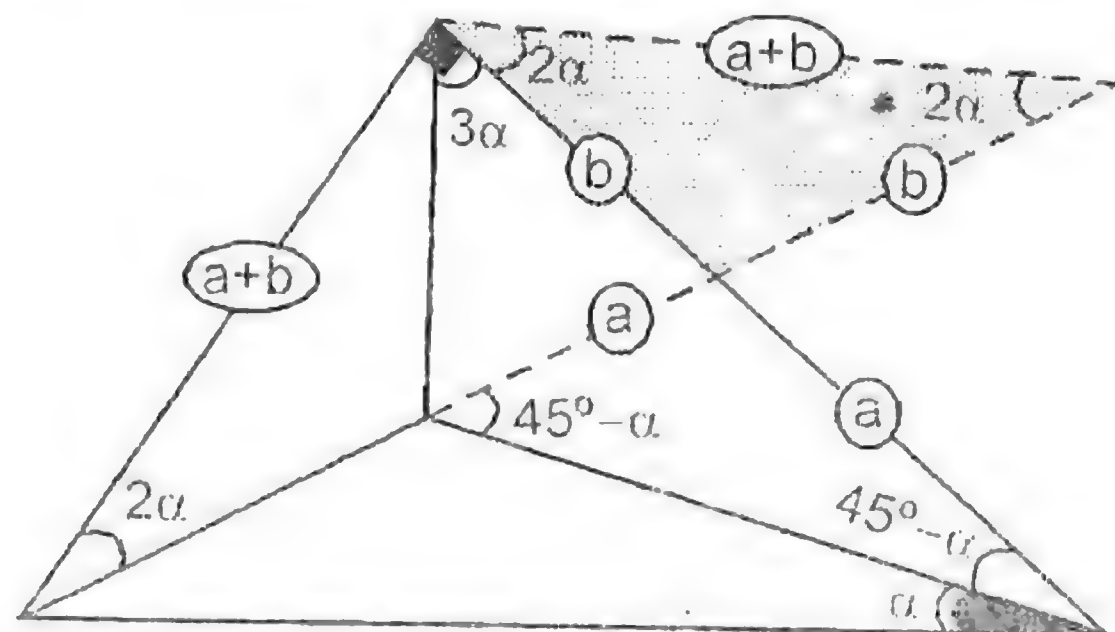


Paso N° 3: En la figura identificamos los lados iguales de la siguiente manera:

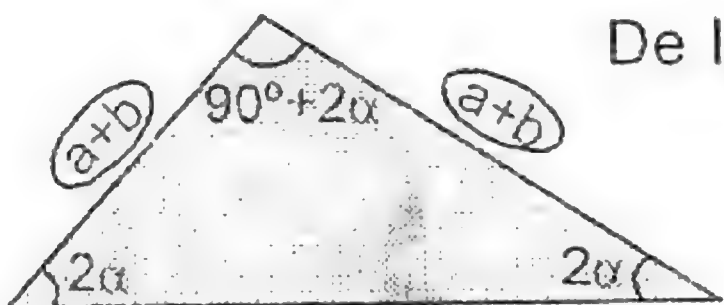
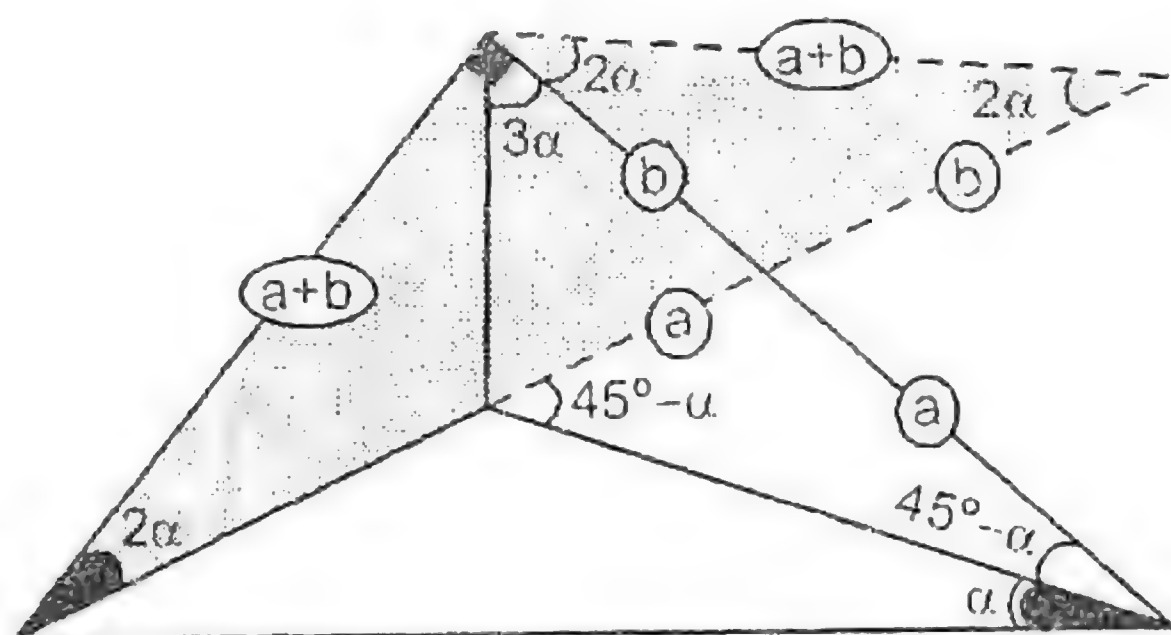
También:



Paso N° 4: También observamos un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma.



Paso N° 5: Finalmente se observa:



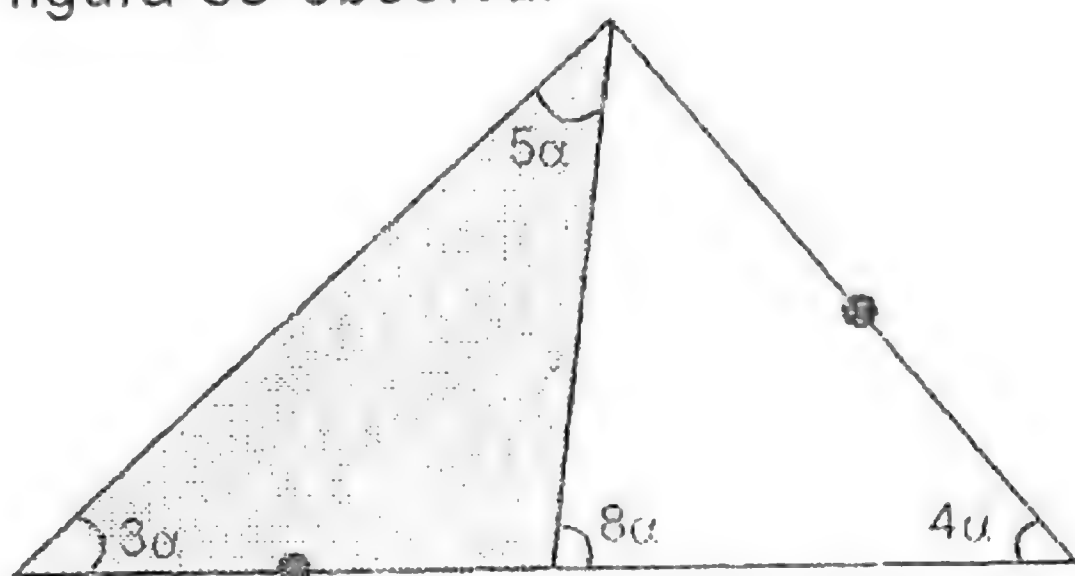
De la figura se cumple:

$$6\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

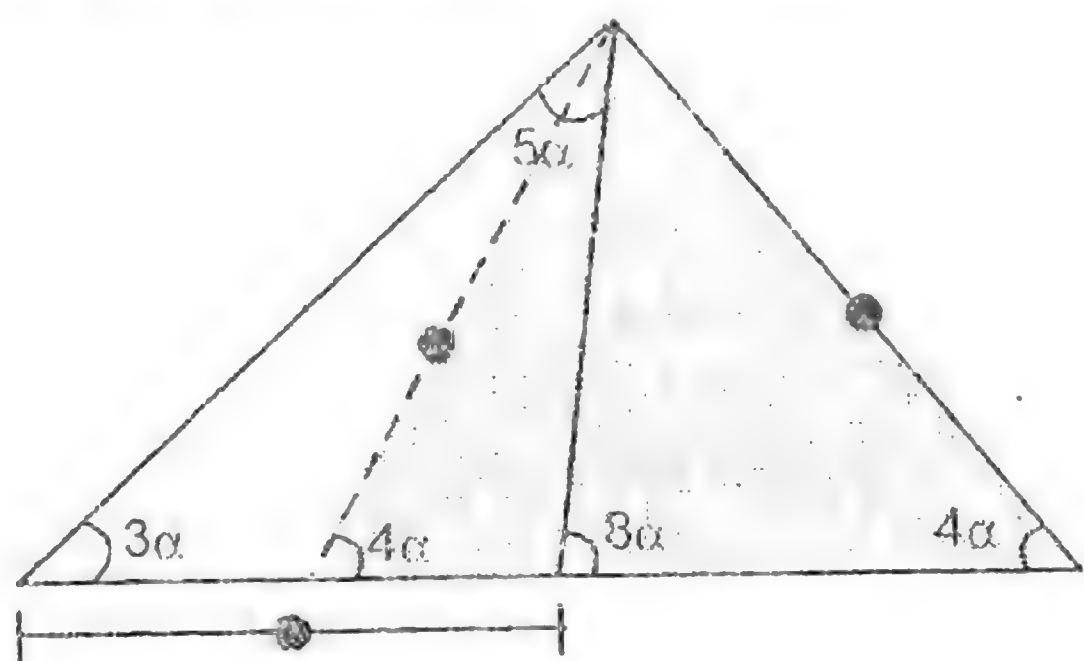
$$\alpha = 15^\circ$$

Solución N° 76

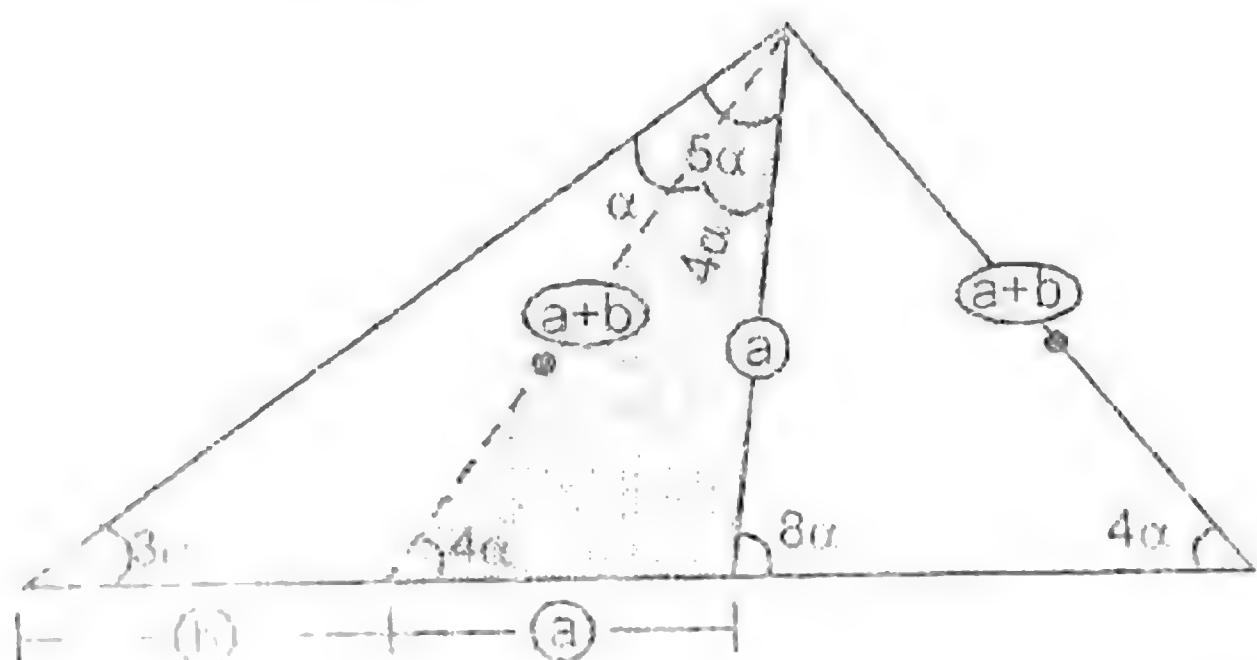
En la figura se observa:



Paso N° 1: Trazamos una ceviana interna de tal manera que se consigue un triángulo isósceles.



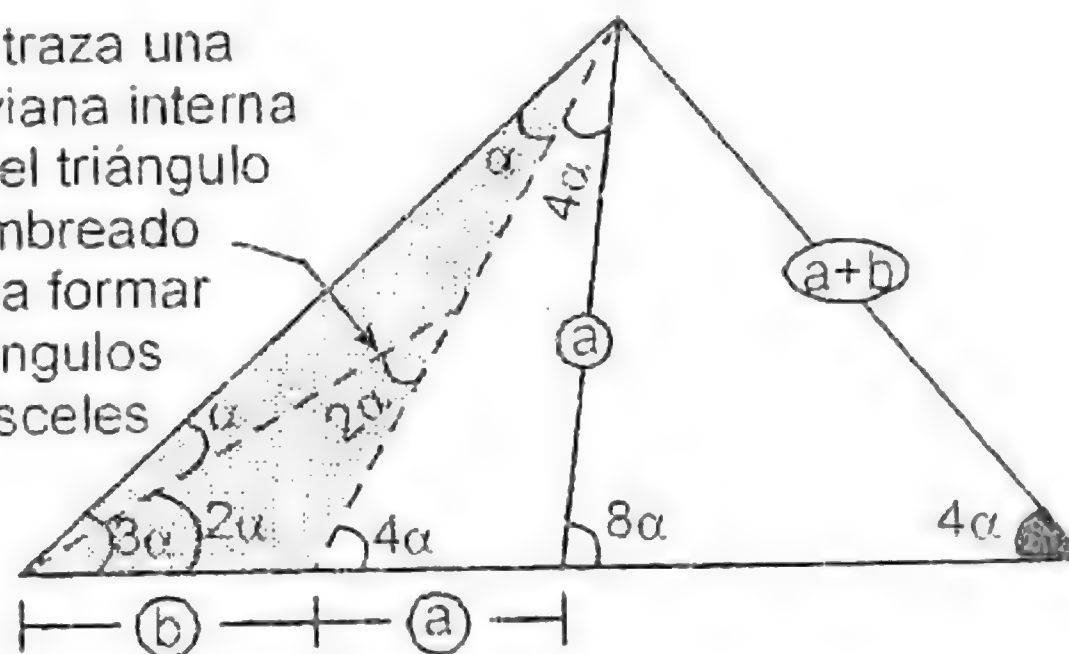
Ahora identificamos los lados iguales de la siguiente manera.



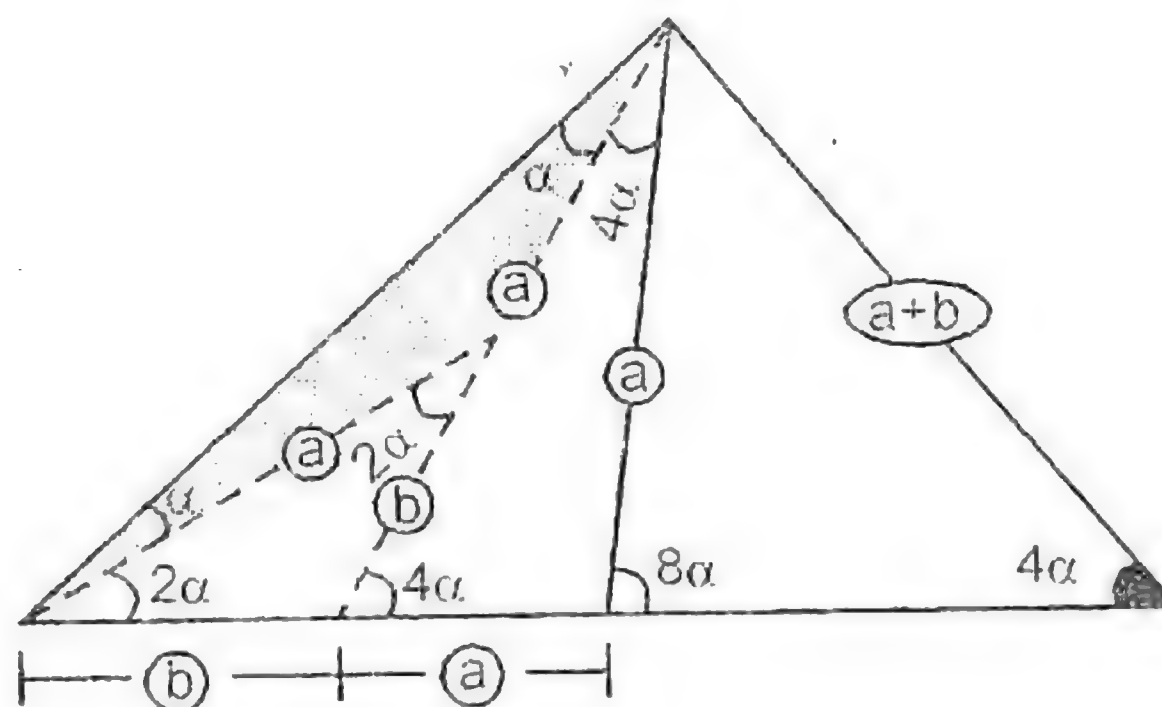
Paso N° 3:

Ahora se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la forma siguiente:

Se traza una ceviana interna en el triángulo sombreado para formar triángulos isósceles

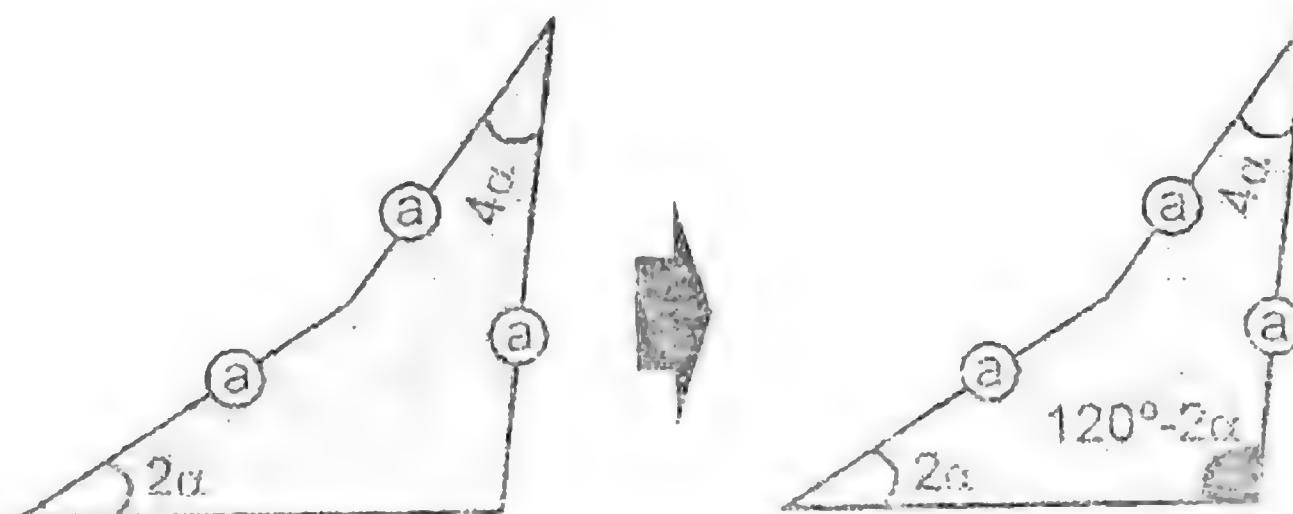
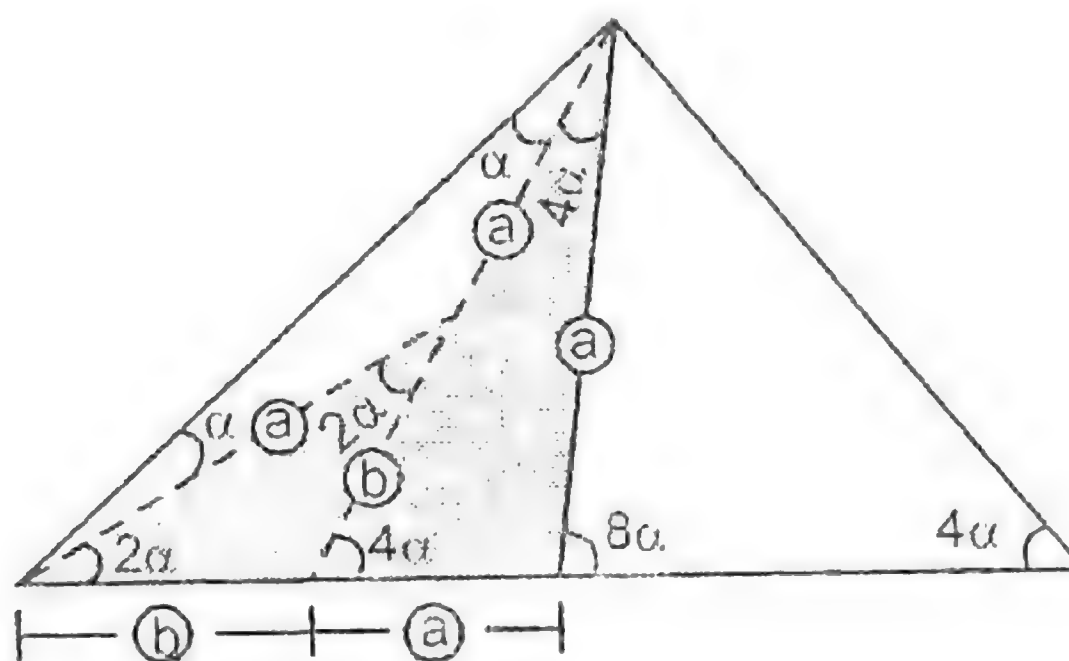


Luego se observa:



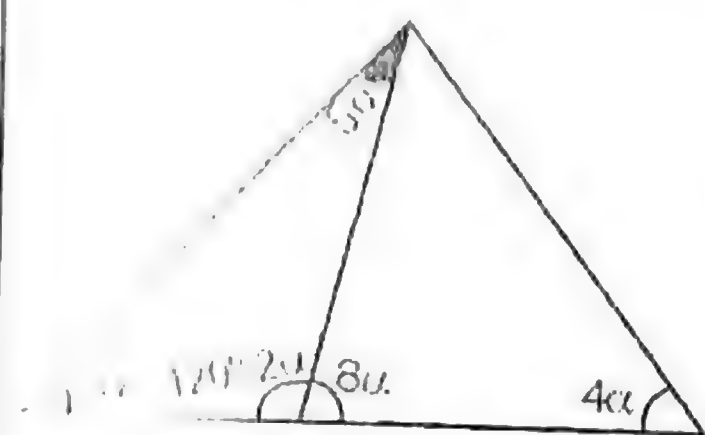
Paso N° 4:

Ahora se tiene en la figura un cuadrilátero concavo (septimo criterio de construcción)



Paso N° 5:

Aquí se cumple la propiedad del concavo.



Por ángulo llano:

$$\therefore 120^\circ - 2\alpha + 8\alpha = 180^\circ$$

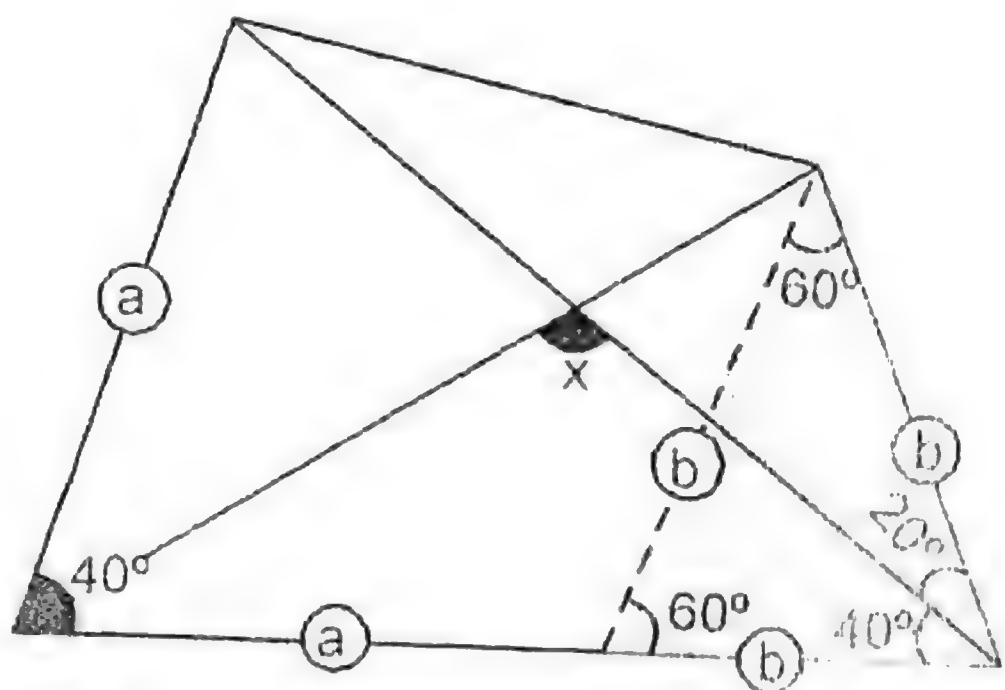
$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

Solución N° 77

Paso N° 1:

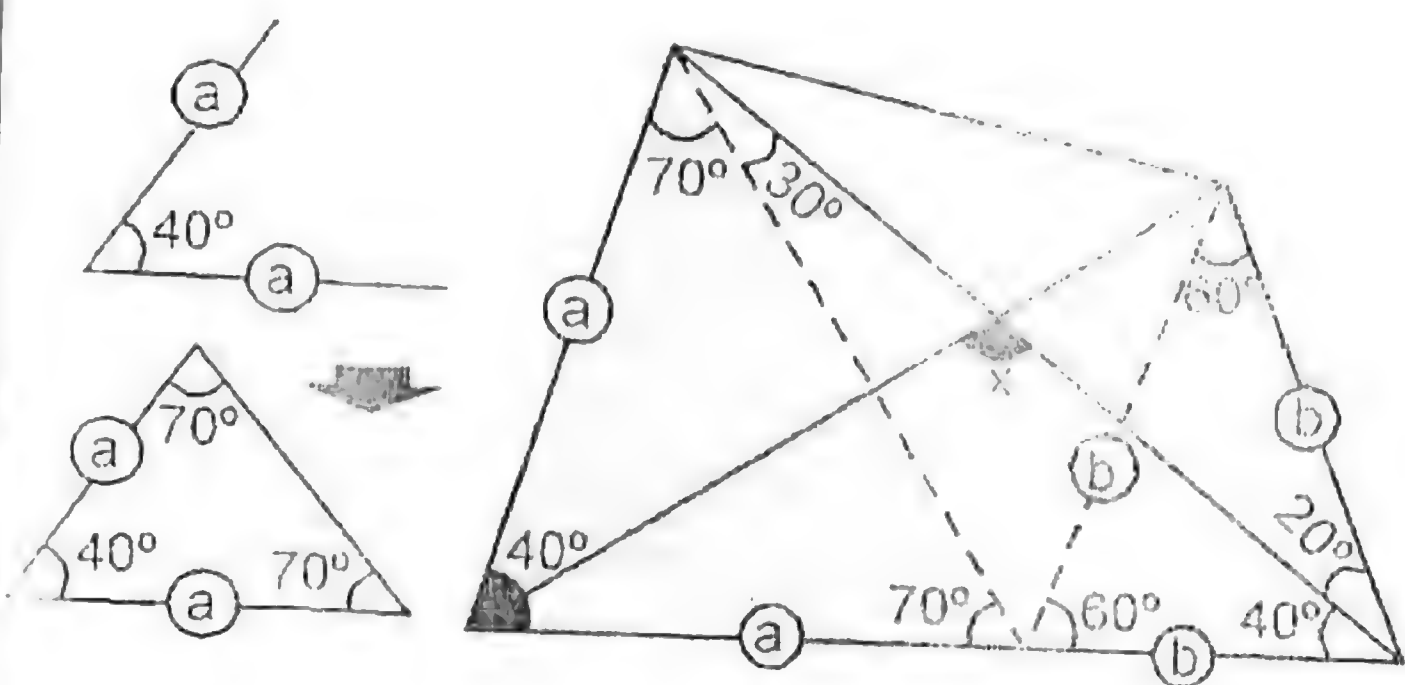
Realizamos el siguiente trazo para formar un triángulo equilátero.



112

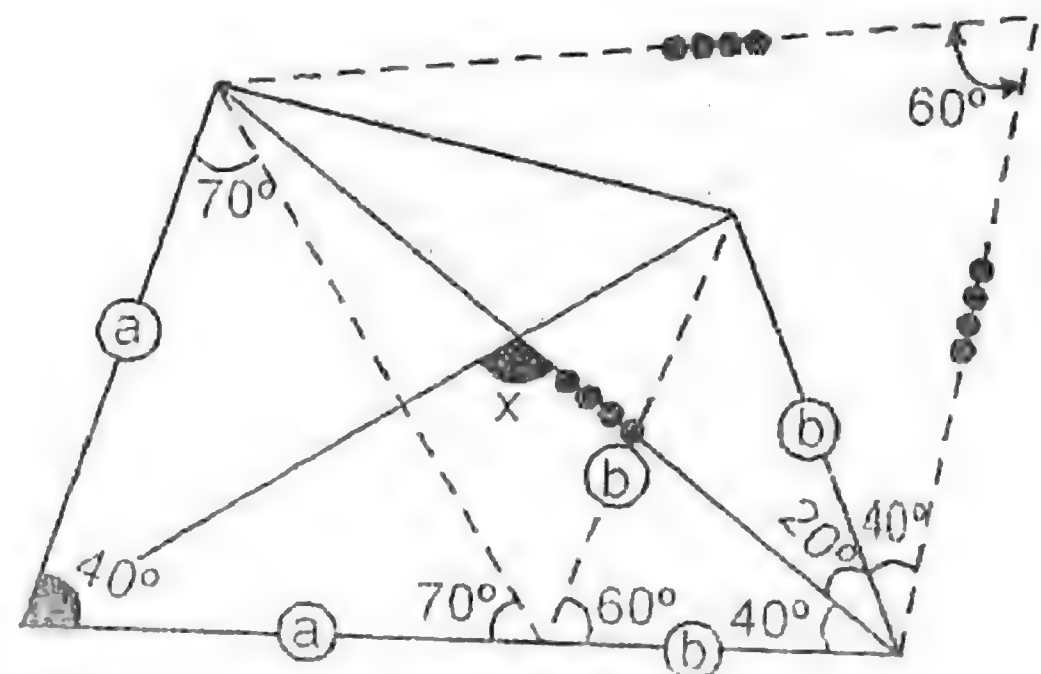
Paso N° 2:

También se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente forma.



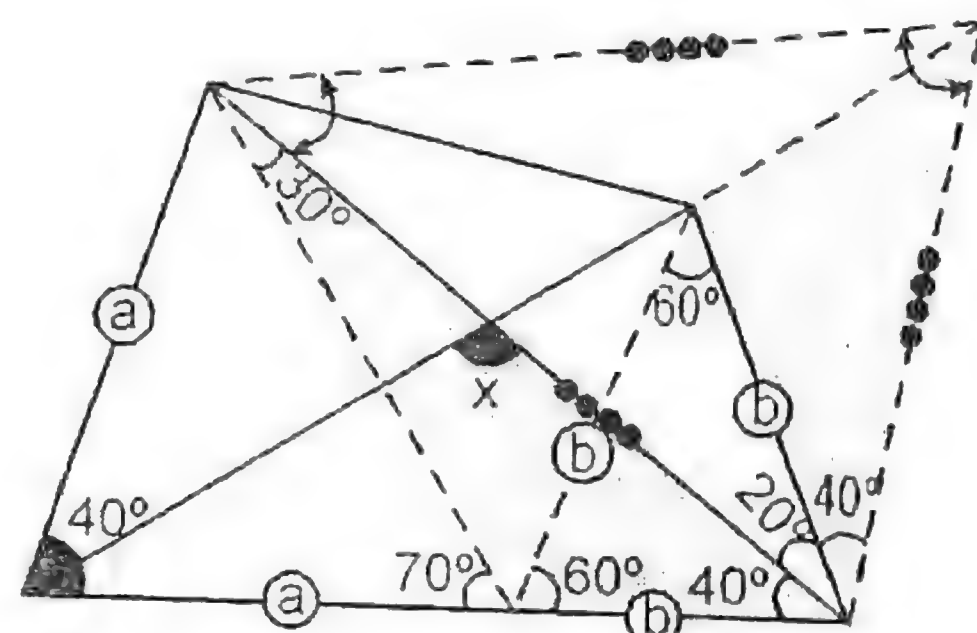
Paso N° 3:

Ahora externamente formamos un triángulo equilátero para obtener 3 lados iguales de la siguiente manera.

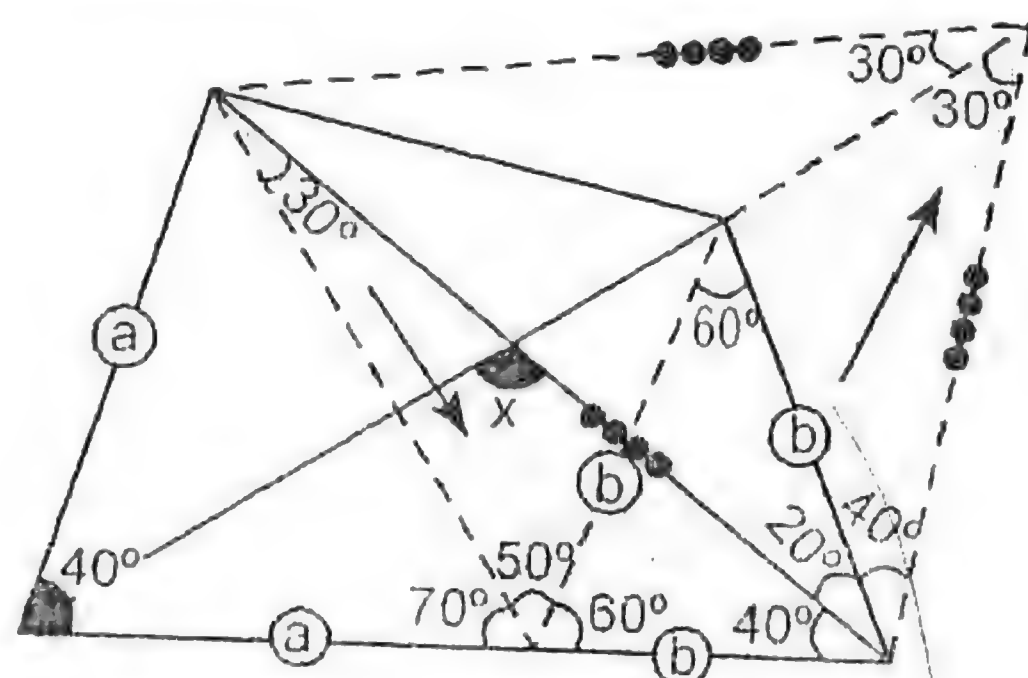


Paso N° 4:

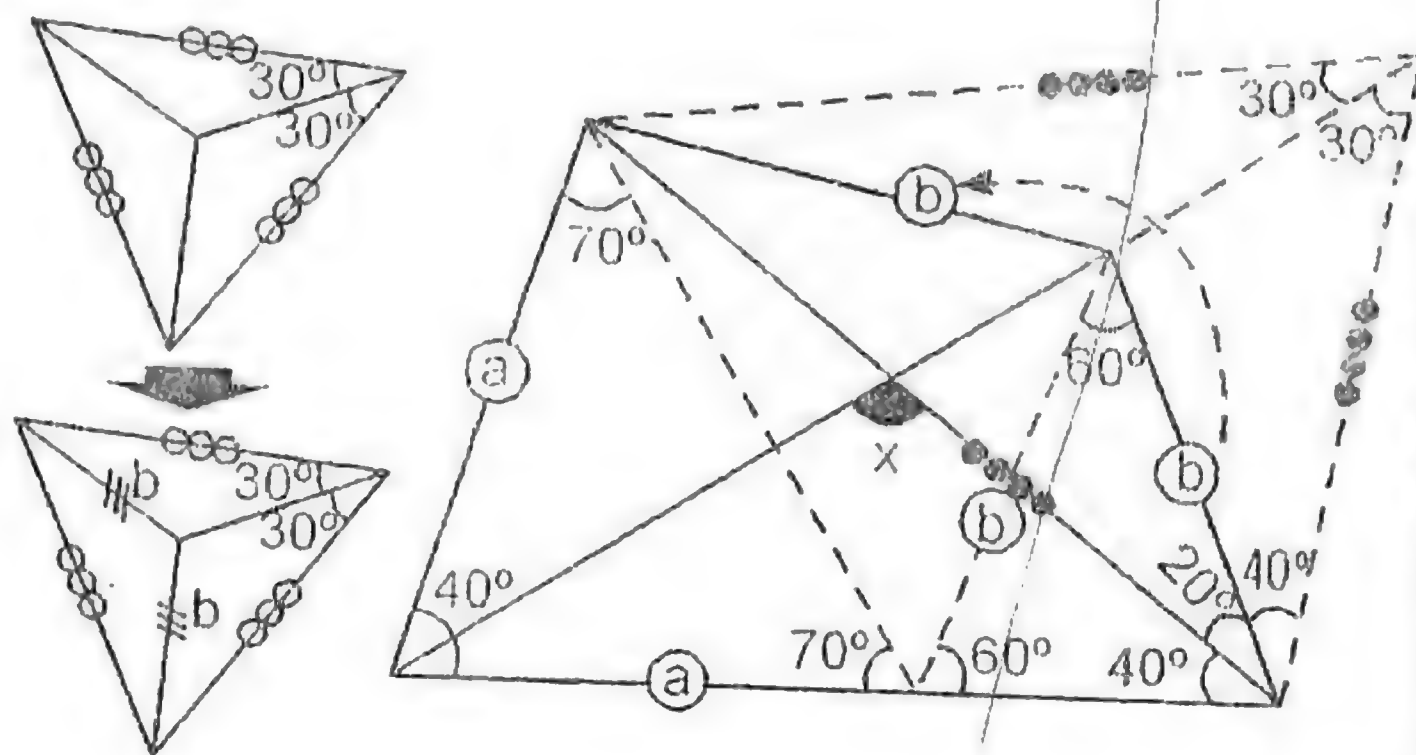
Luego se obtiene dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)



Aquí se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"

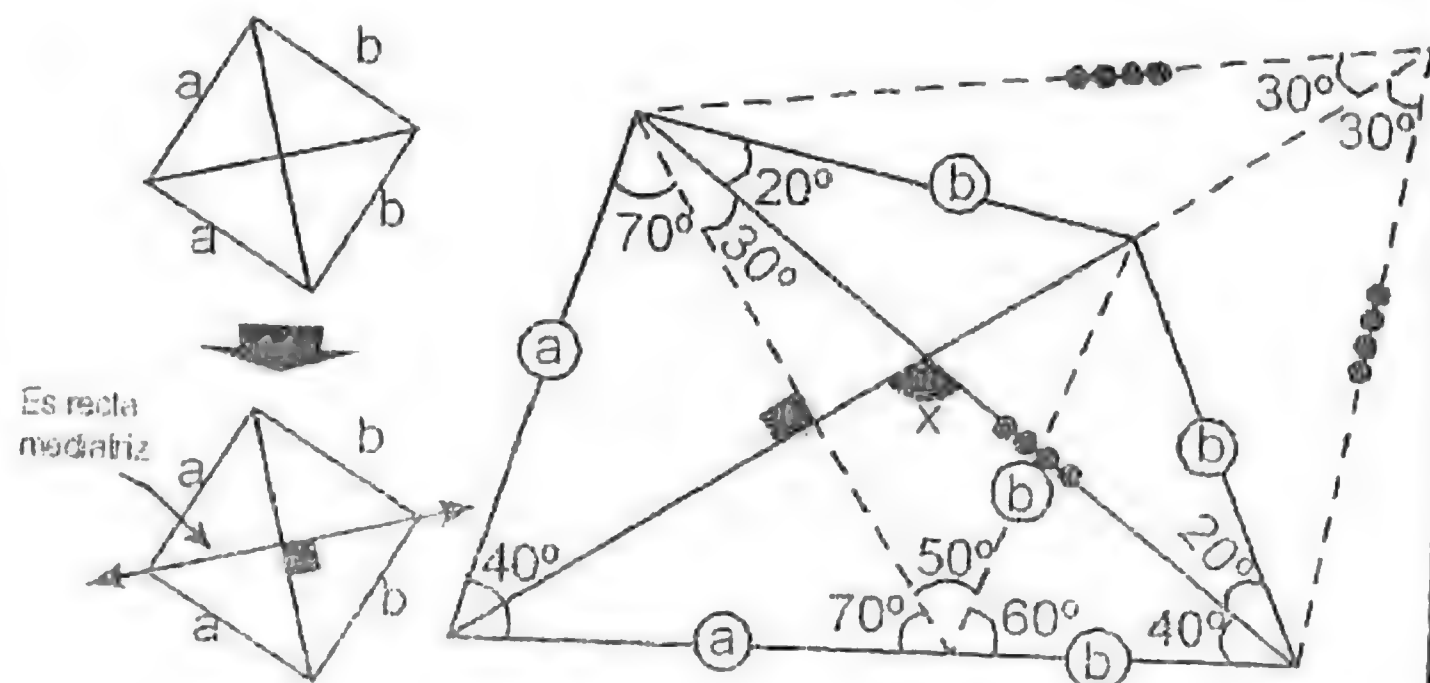


Paso N° 5: En el triángulo equilátero trazado se cumple:

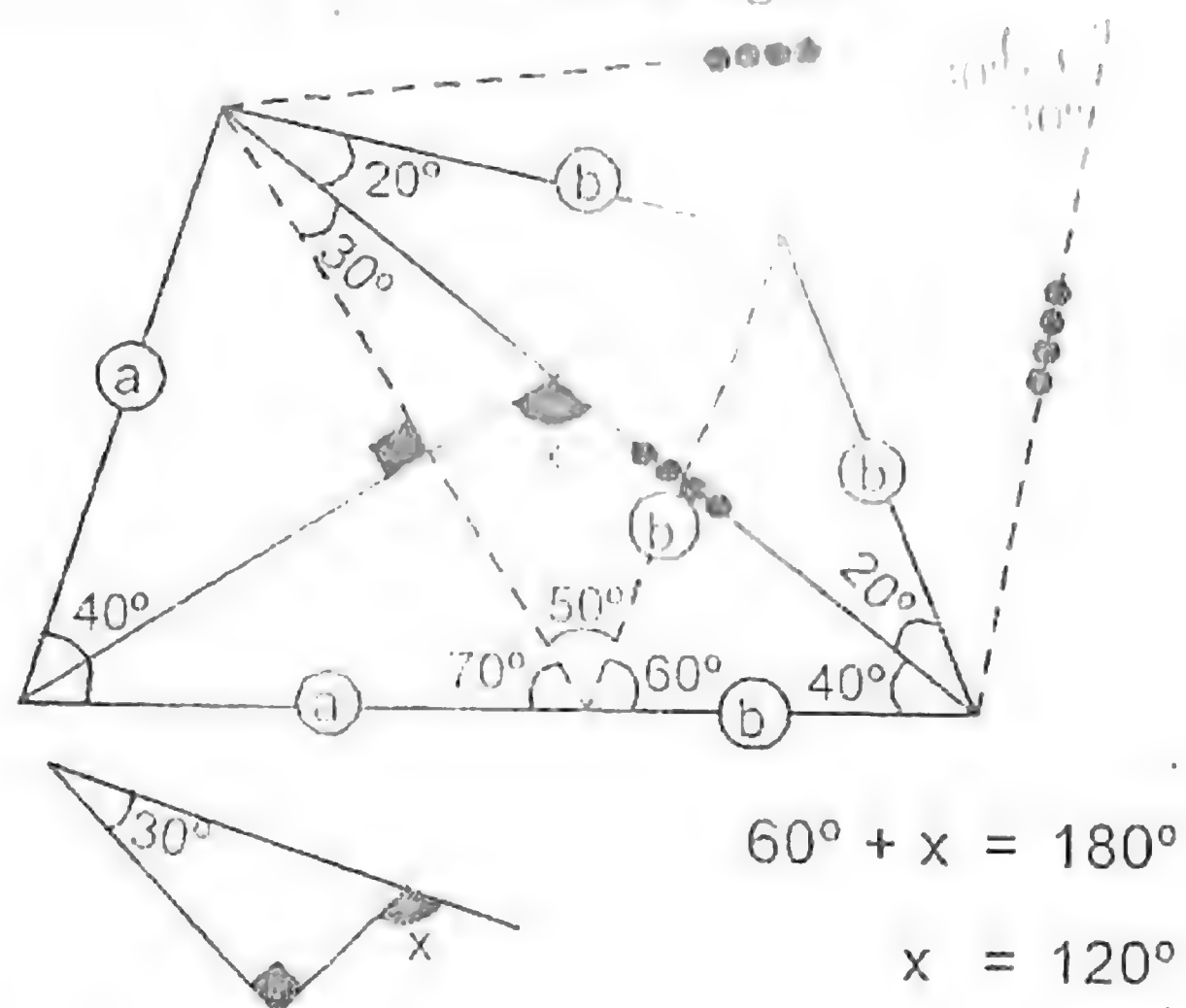


Paso N° 6:

Ahora observamos la siguiente figura donde se cumple la propiedad de la mediatriz.



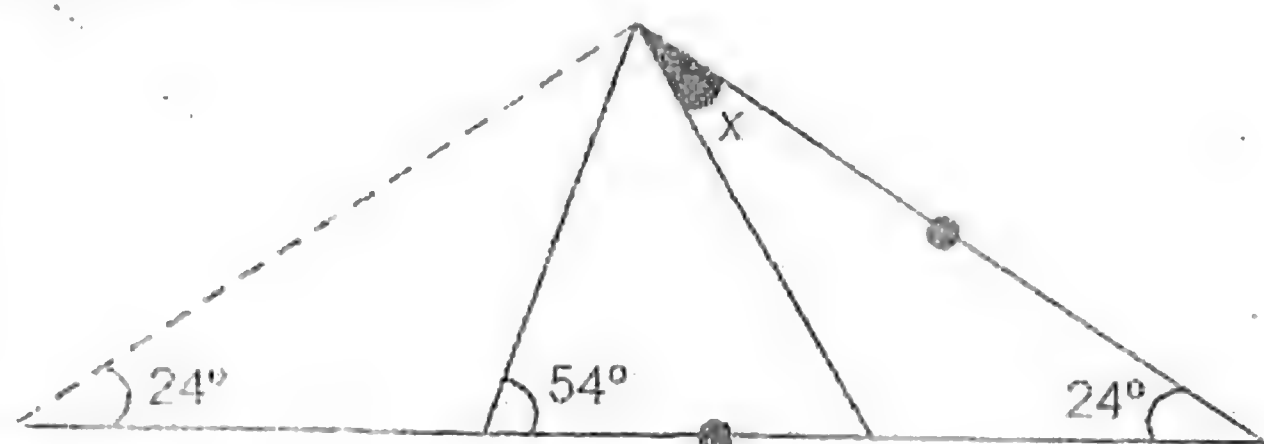
Finalmente se obtiene en la figura



Solución N° 78

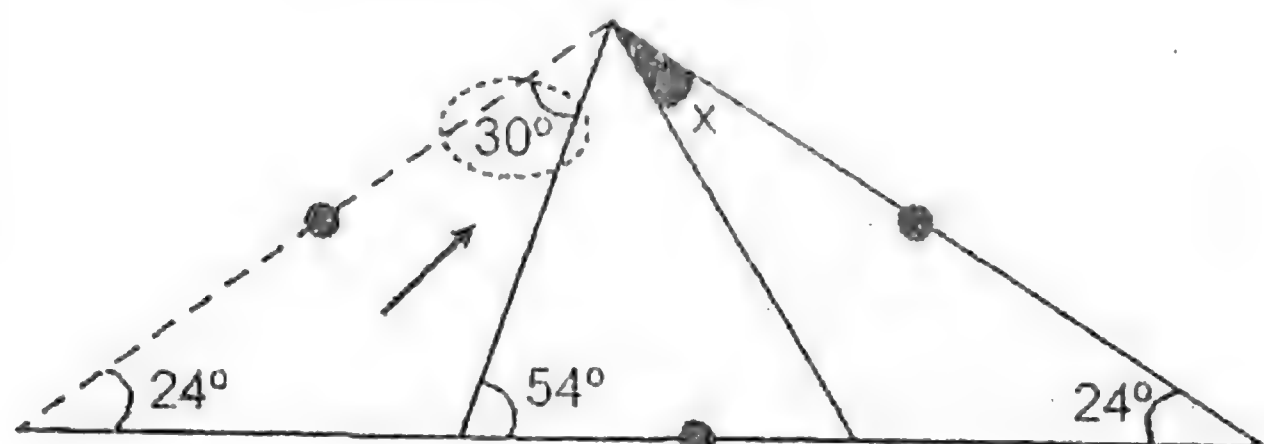
Paso N° 1:

Trazamos una ceviana externa formando un ángulo de 24° con la base. Ello para obtener un triángulo isósceles.

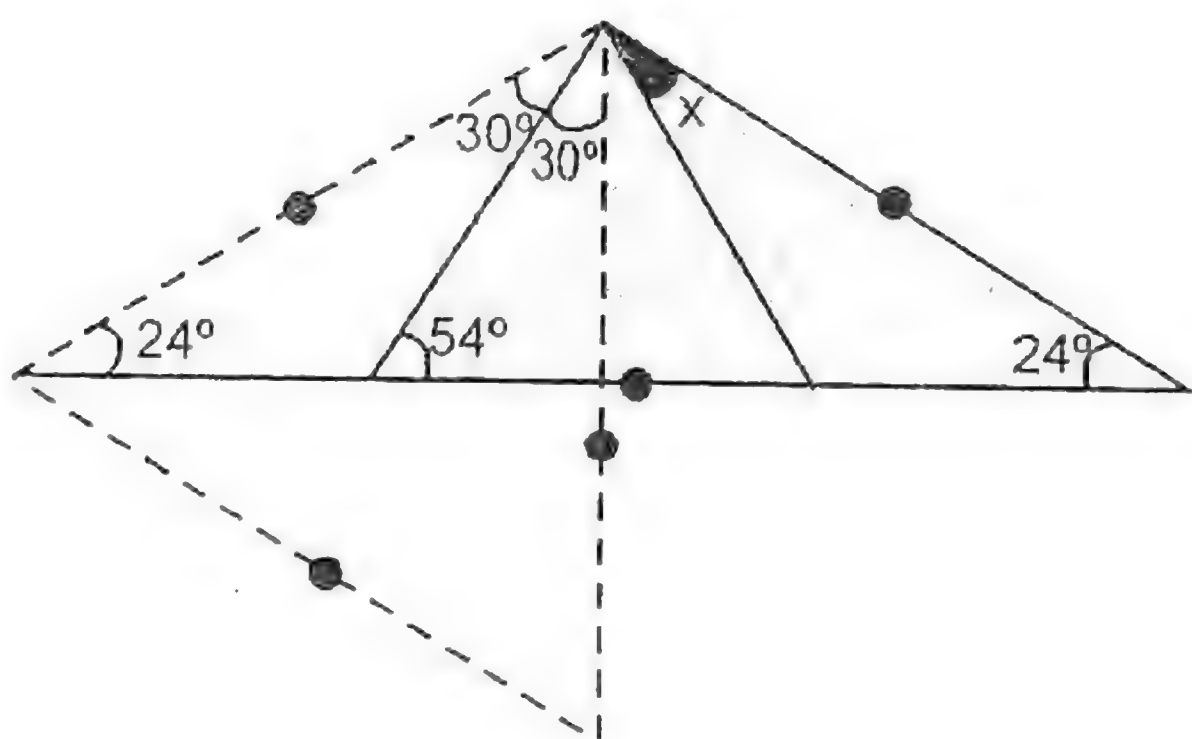


Paso N° 2:

En la figura resultante, se observa un ángulo de 30° que es la mitad de 60° y con ello podemos formar un triángulo equilátero.

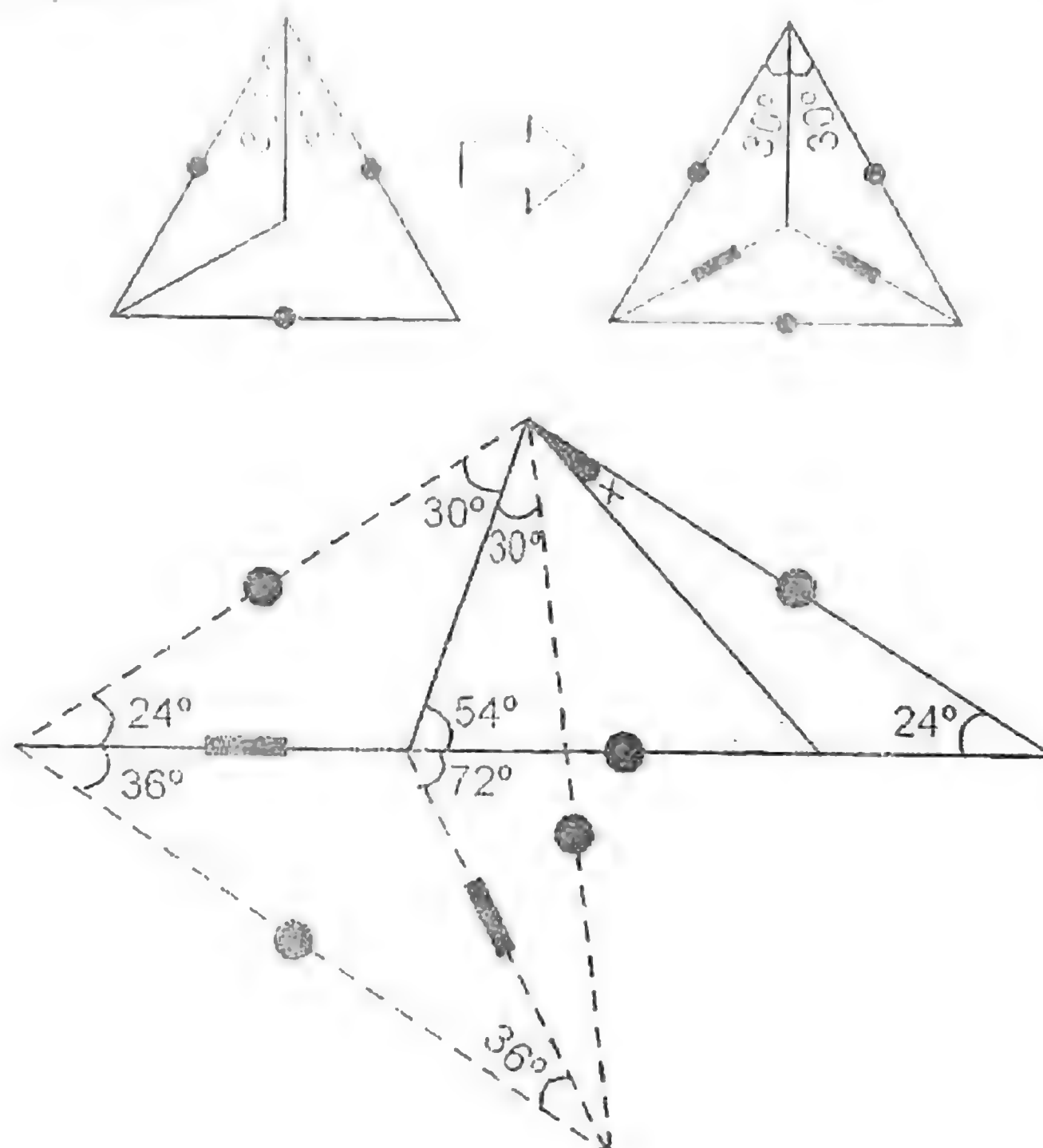


Ahora realizamos el siguiente trazo.

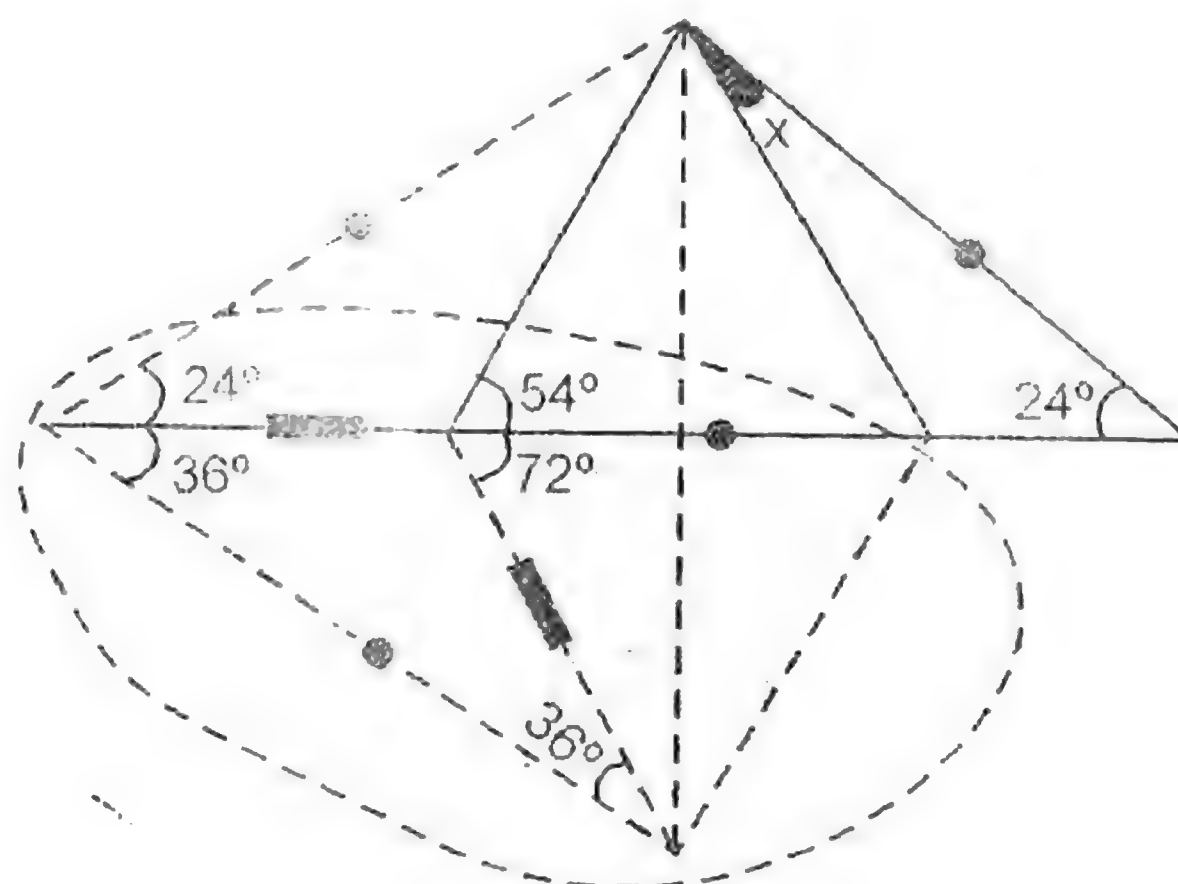


Paso N° 3:

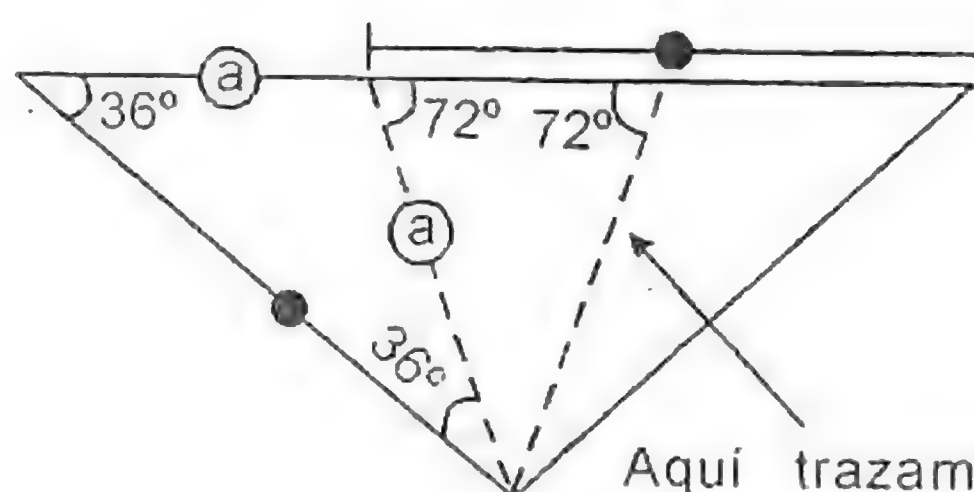
Completamos los ángulos internos del triángulo y se observa también se cumple la siguiente propiedad



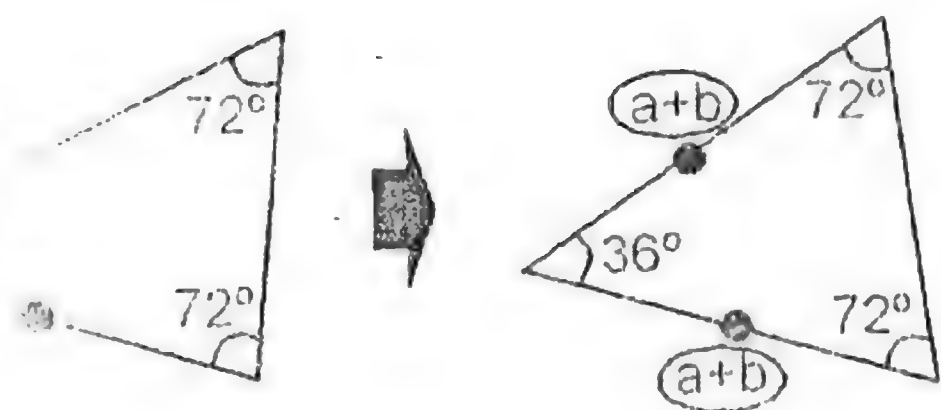
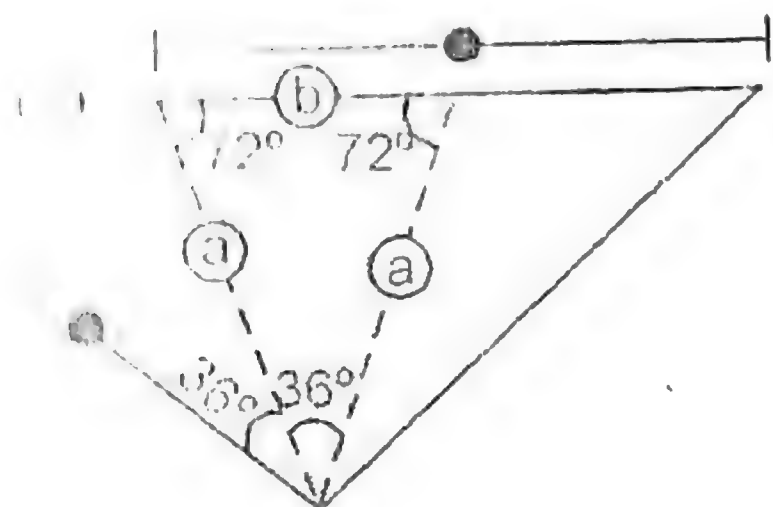
Paso N° 4: Tomamos una porción de la figura donde se observa:



Aquí hacemos:

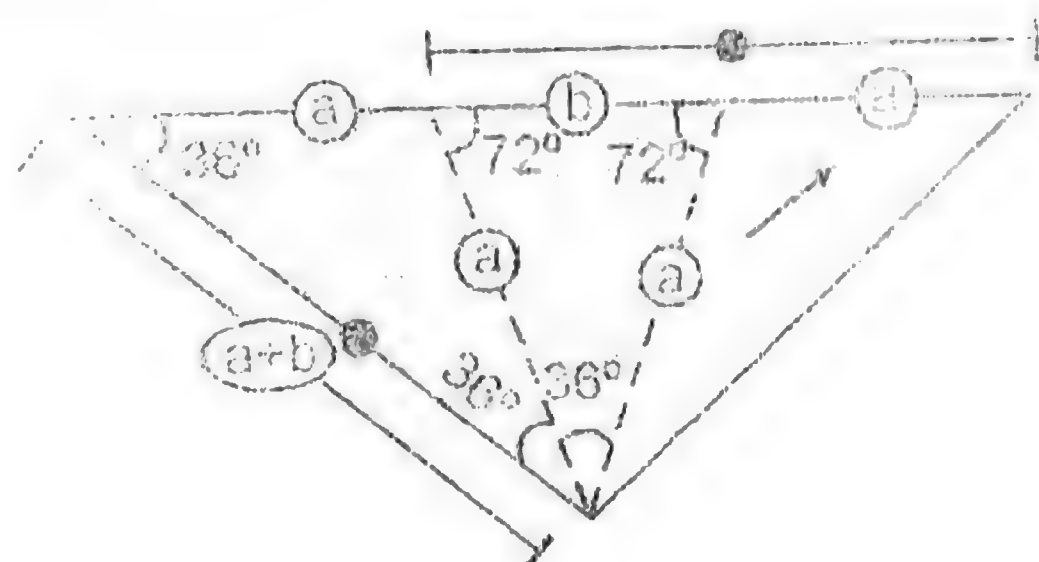


Aquí trazamos una ceviana interna formando un ángulo de 72° para obtener un triángulo isósceles

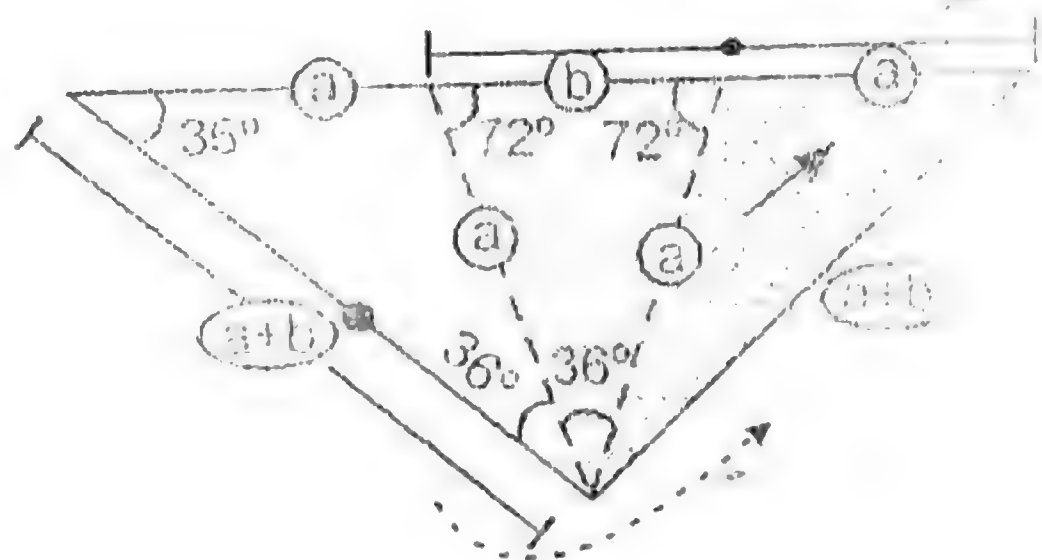


Paso N° 5:

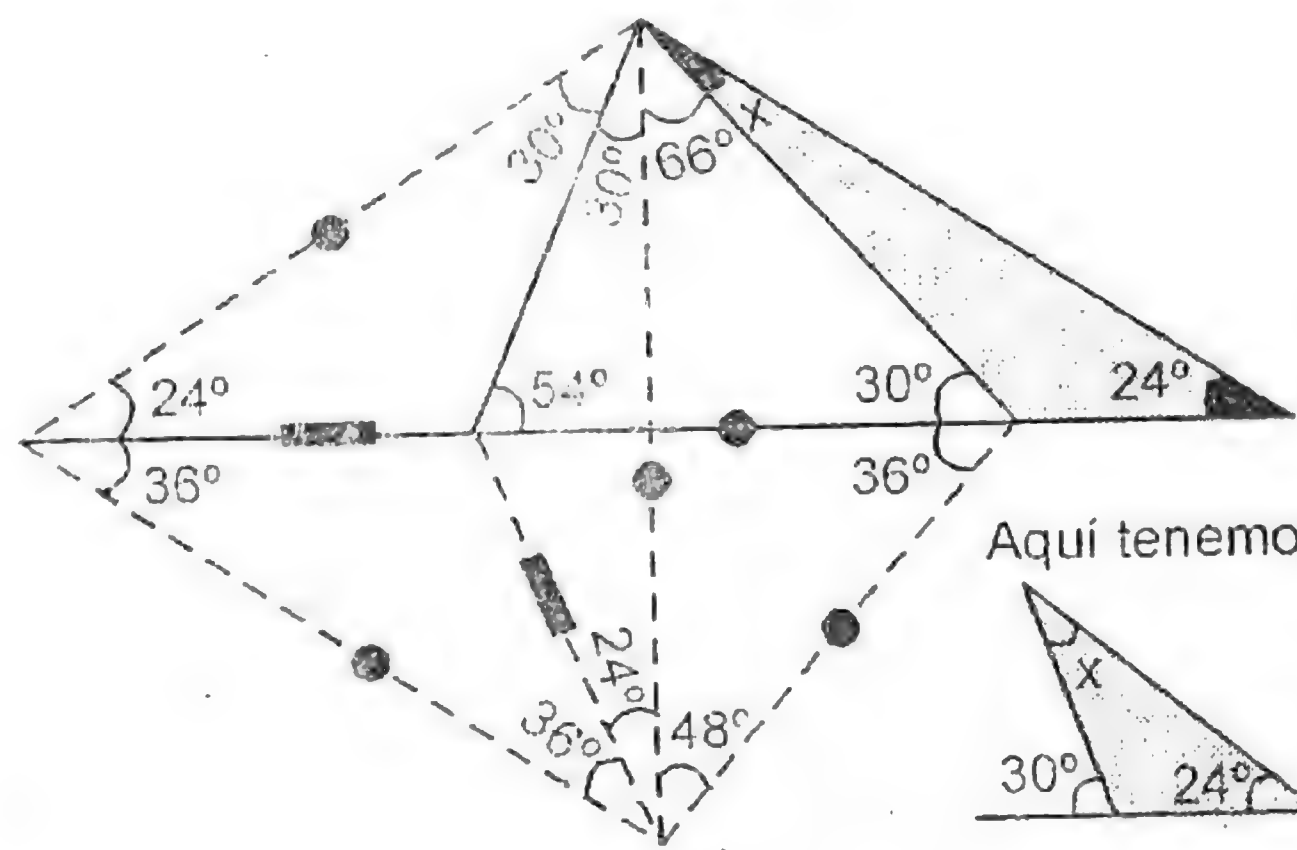
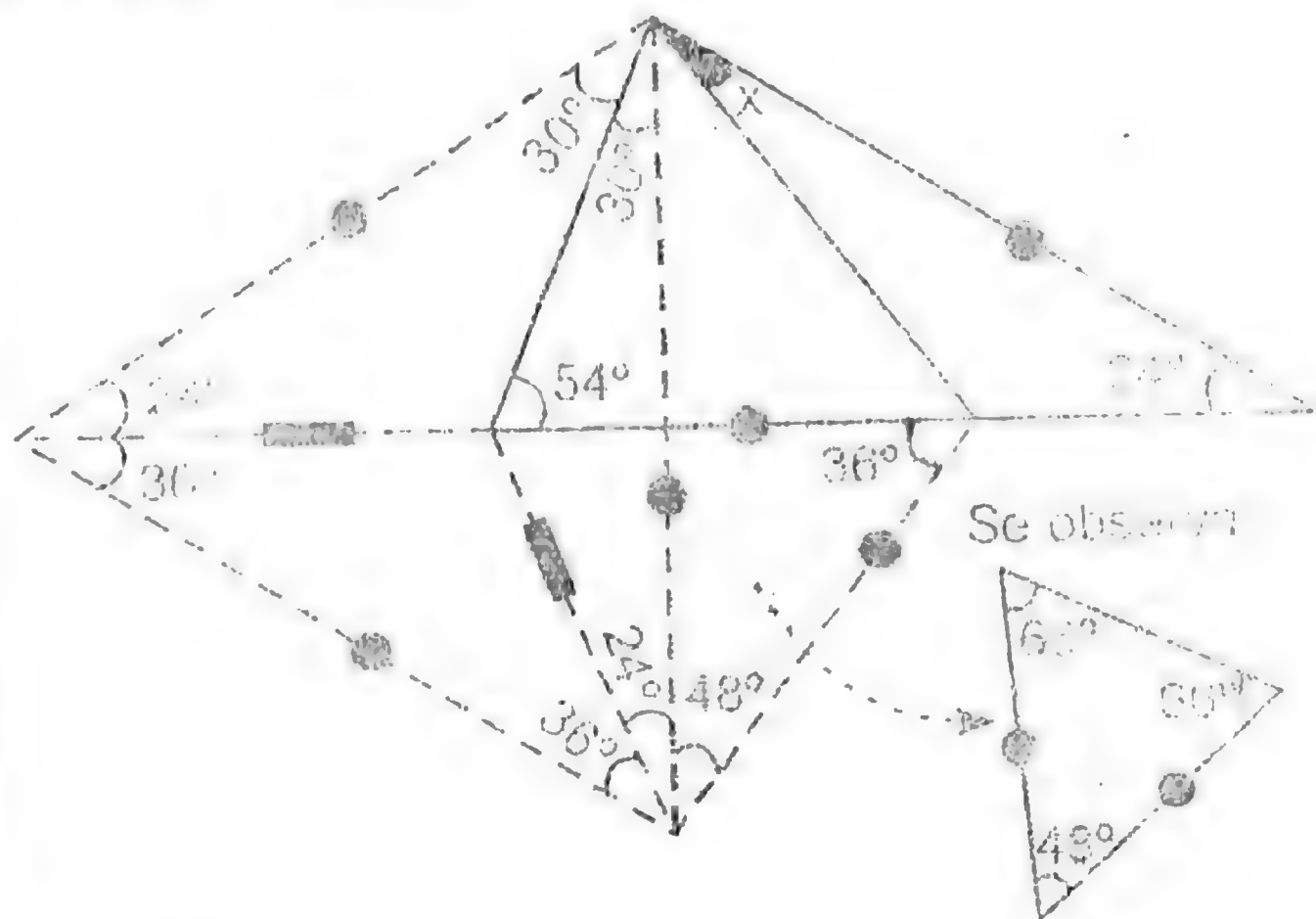
Aquí tenemos:



Se observa un triángulo isósceles



Paso N° 6: Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:



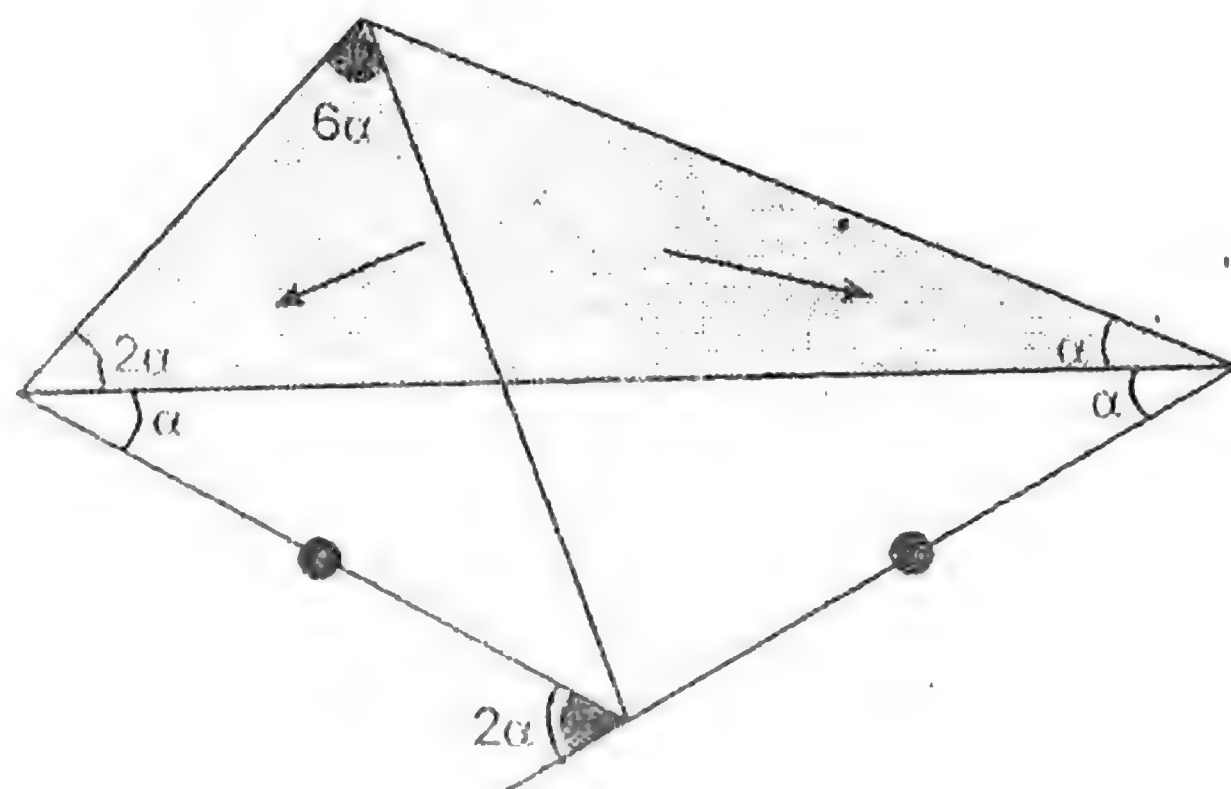
Aquí tenemos:

$$\therefore 30^\circ = x + 24^\circ$$

$$x = 6^\circ$$

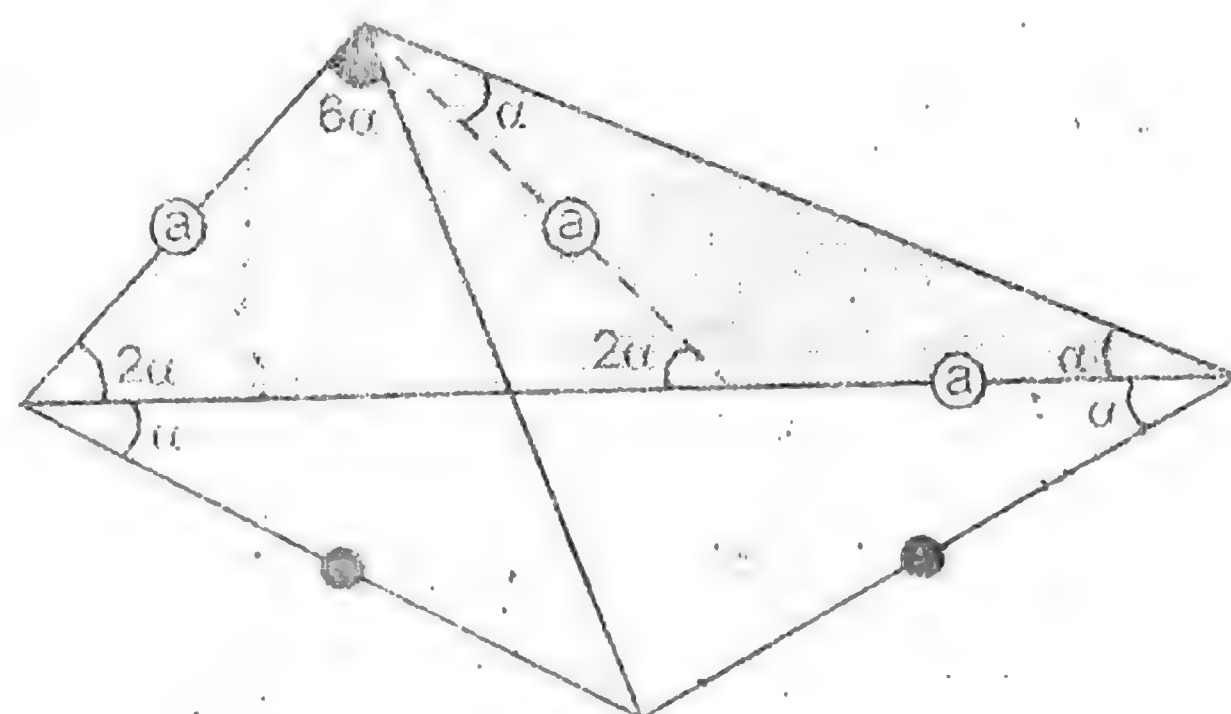
Solución N° 79

Se observa:



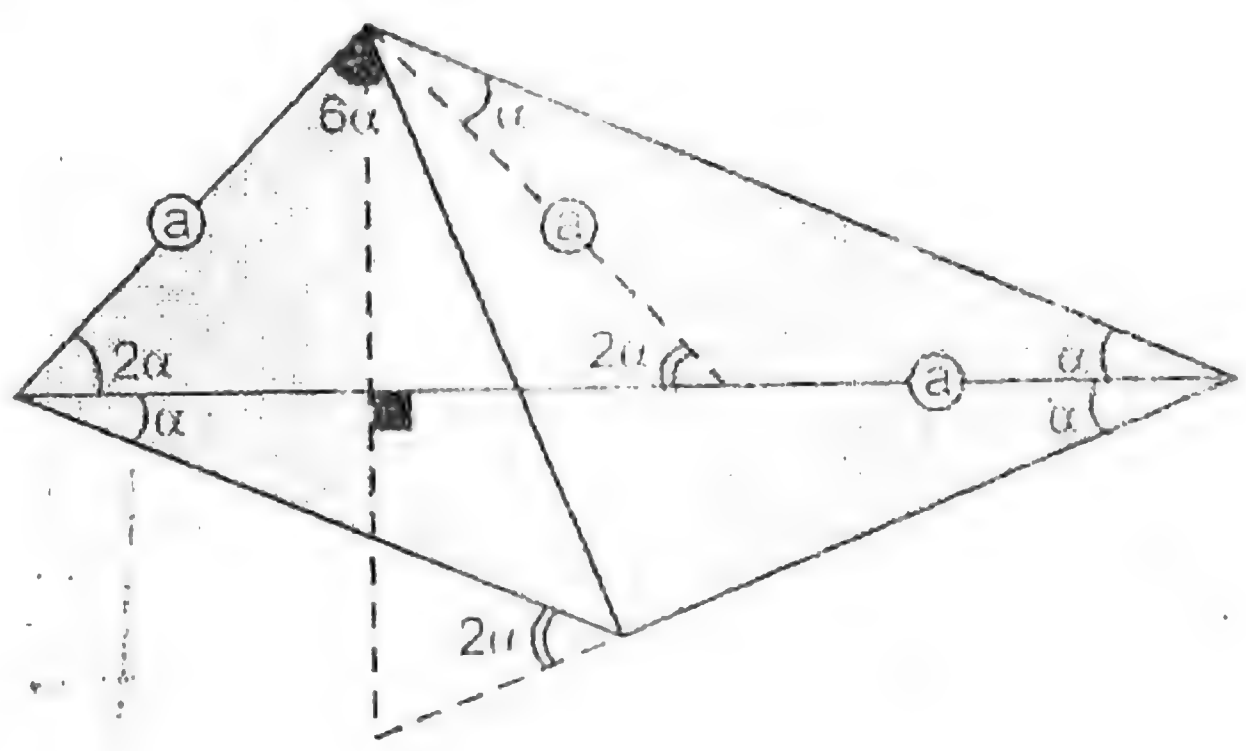
Paso N° 1:

Aplicamos el primer criterio de construcción de la siguiente manera.



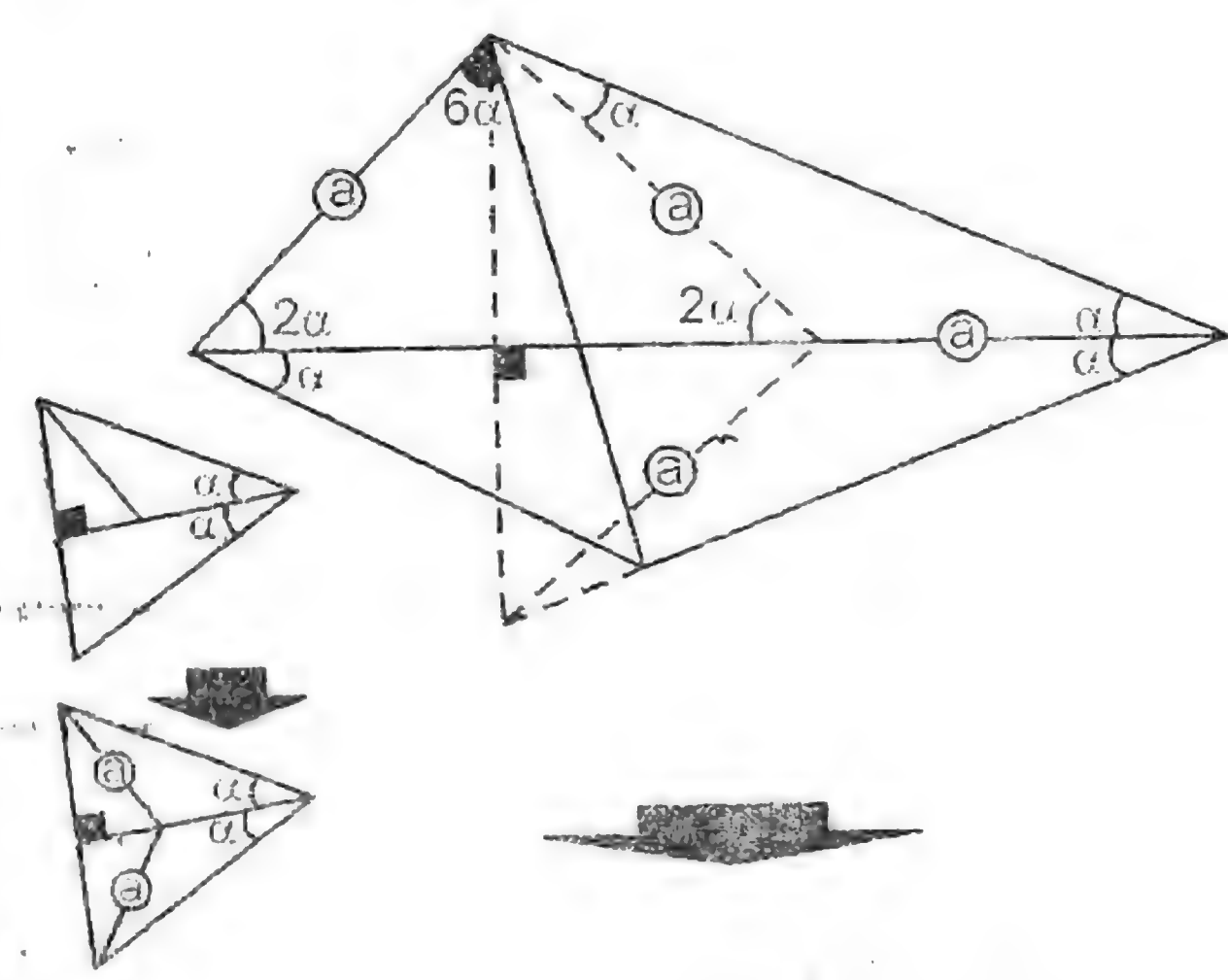
Paso N° 2:

Luego aplicamos el segundo criterio de construcción: se construye exteriormente un triángulo isósceles.



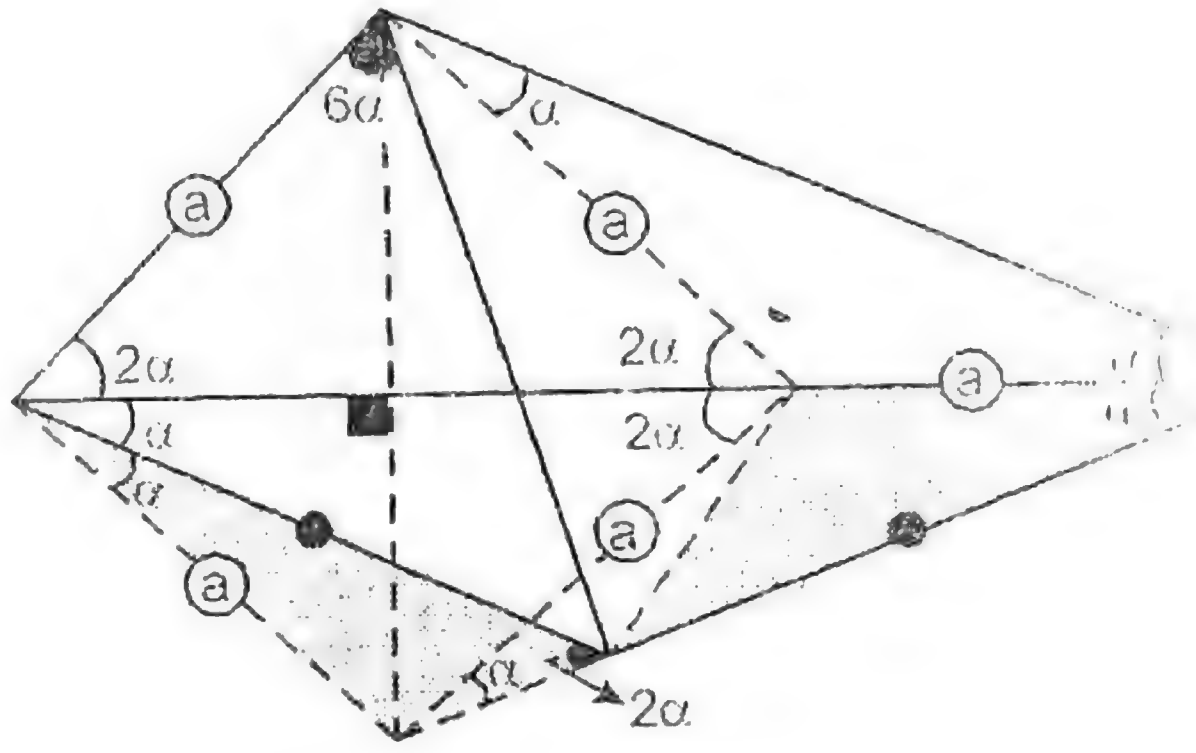
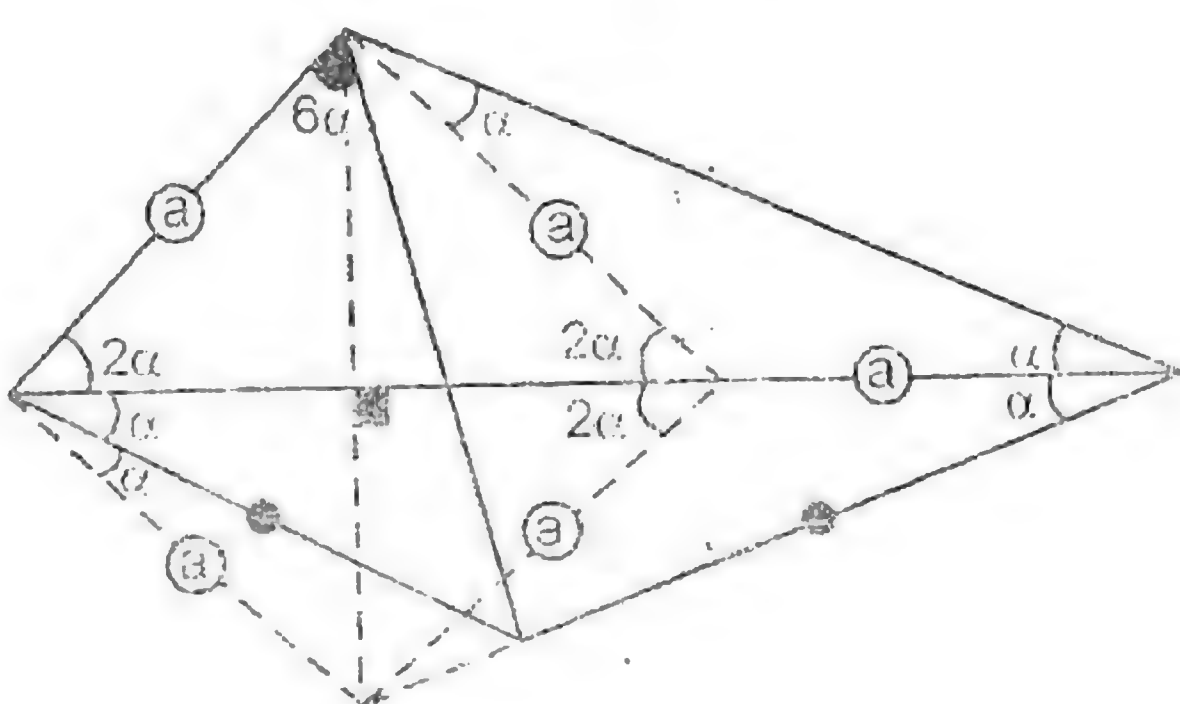
Paso N° 3:

Se observa en el triángulo isósceles formado que se cumple la siguiente propiedad.

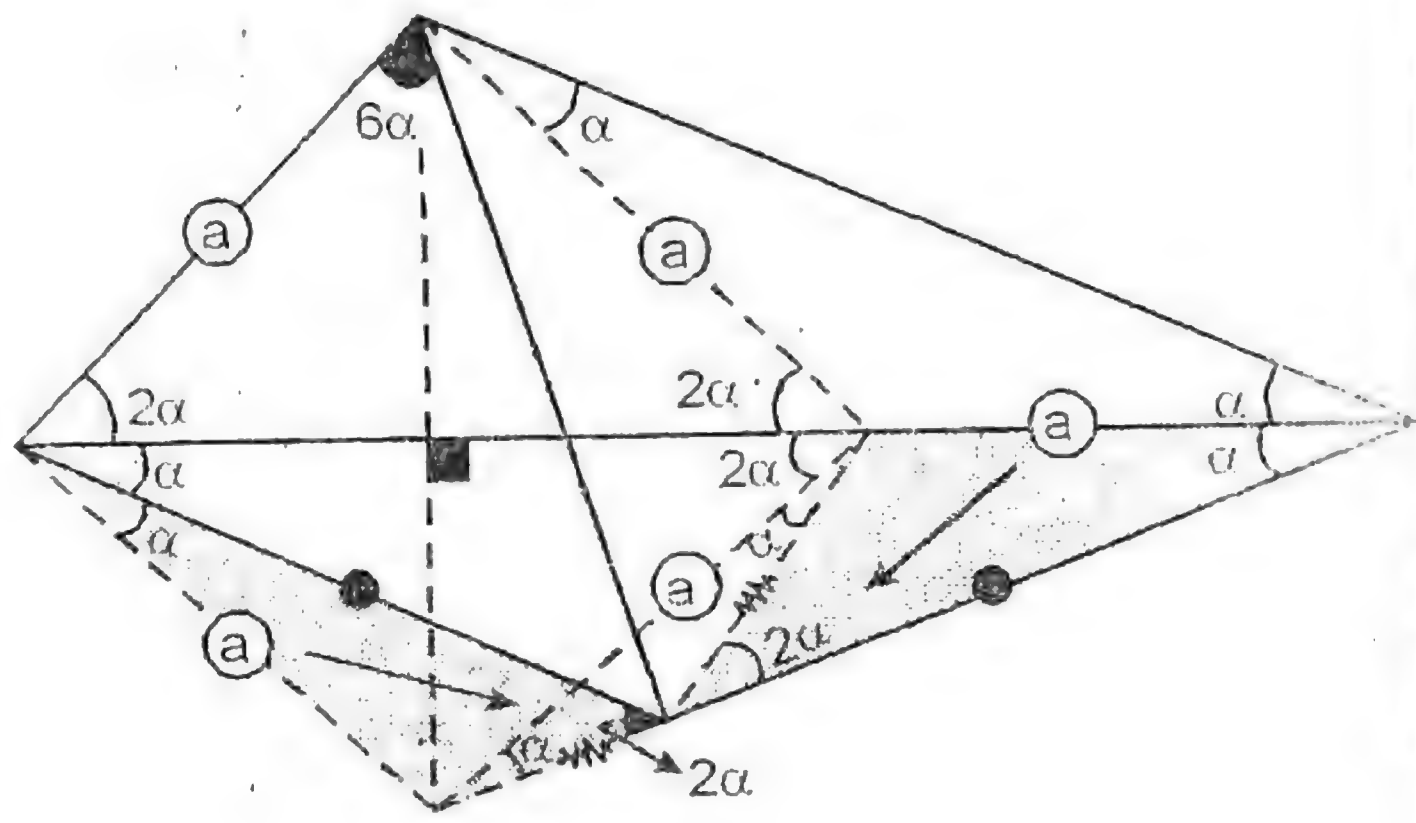


Paso N° 4:

Si obtiene en la nueva figura dos triángulos congruentes; caso (L.A.L.)

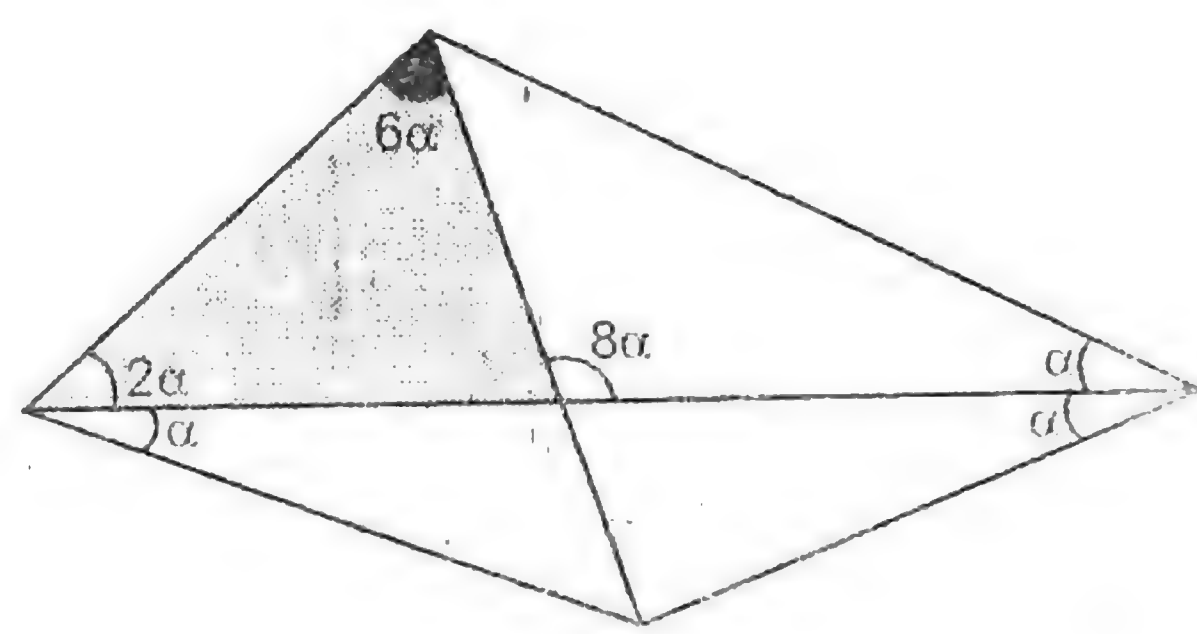


Completando ángulos internos en la figura.



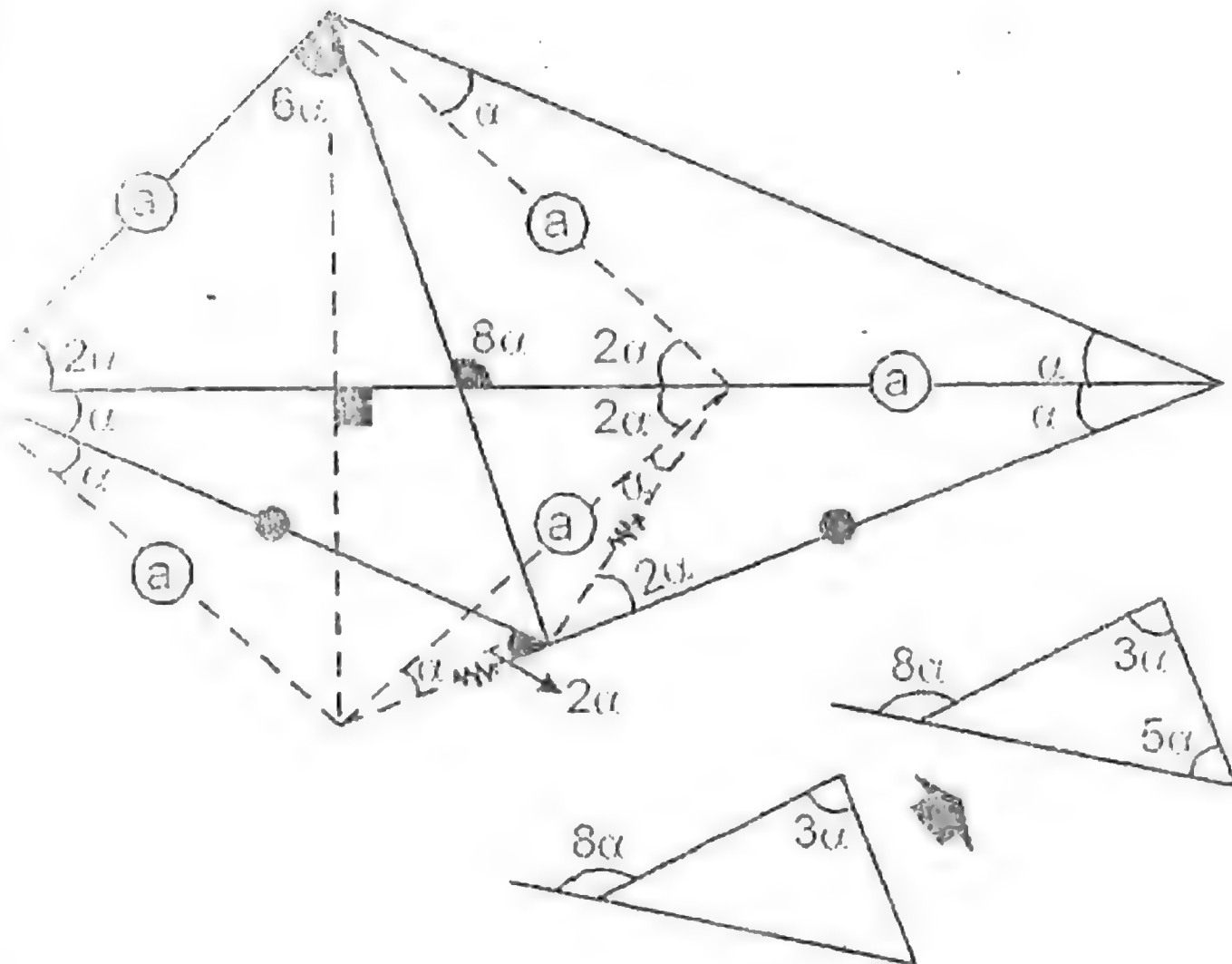
Paso N° 5:

Observamos en la figura original la siguiente propiedad.



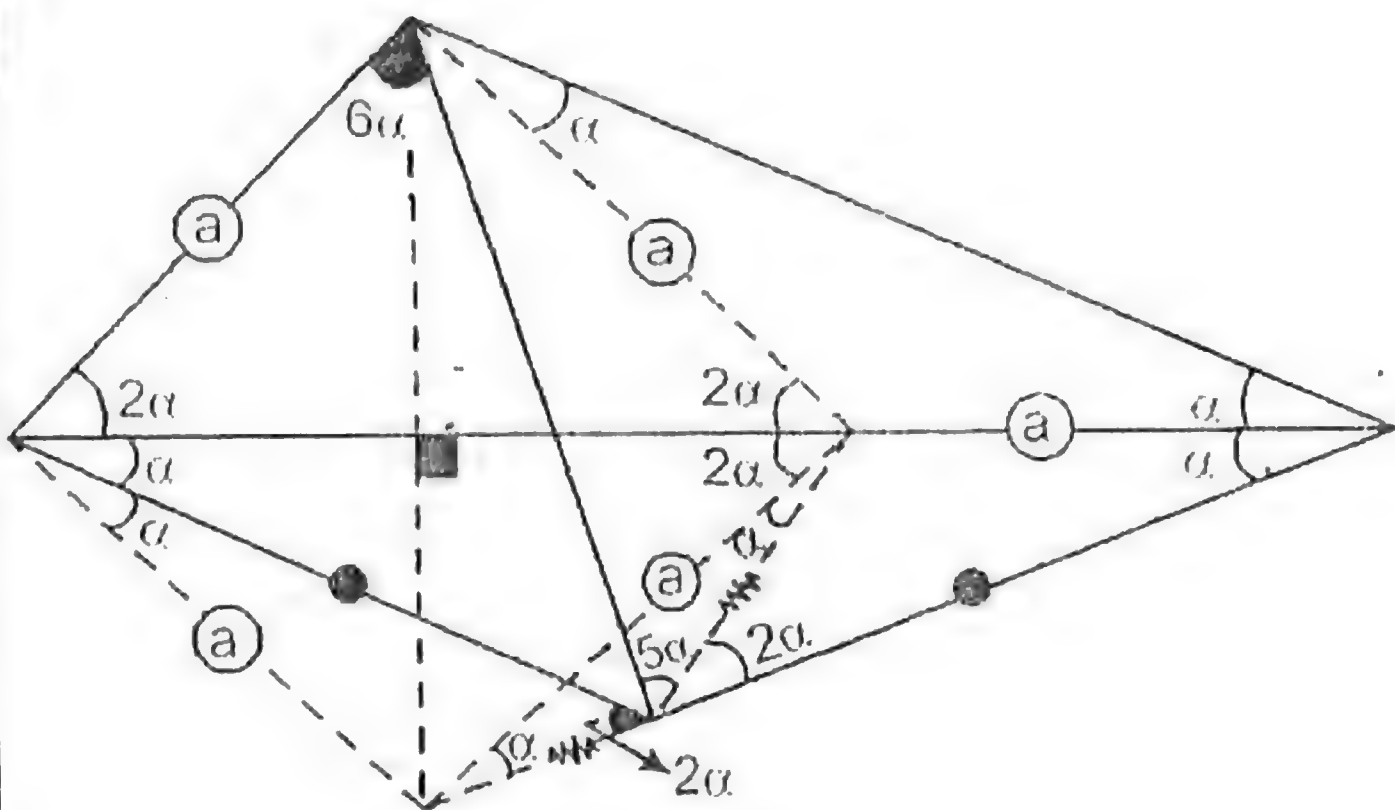
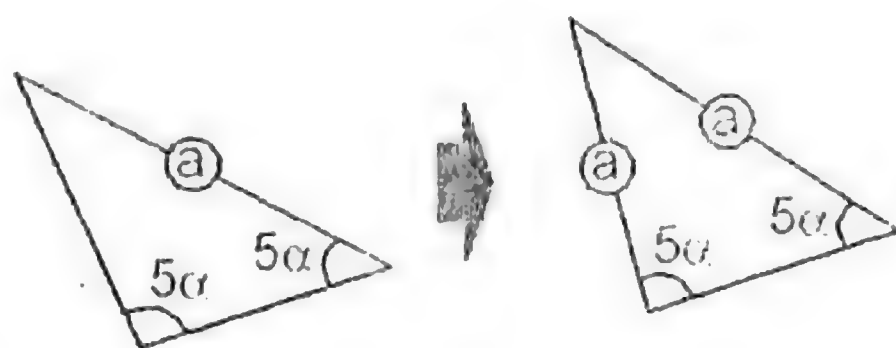
Paso N° 6:

Ahora se observa que se tiene la siguiente figura.



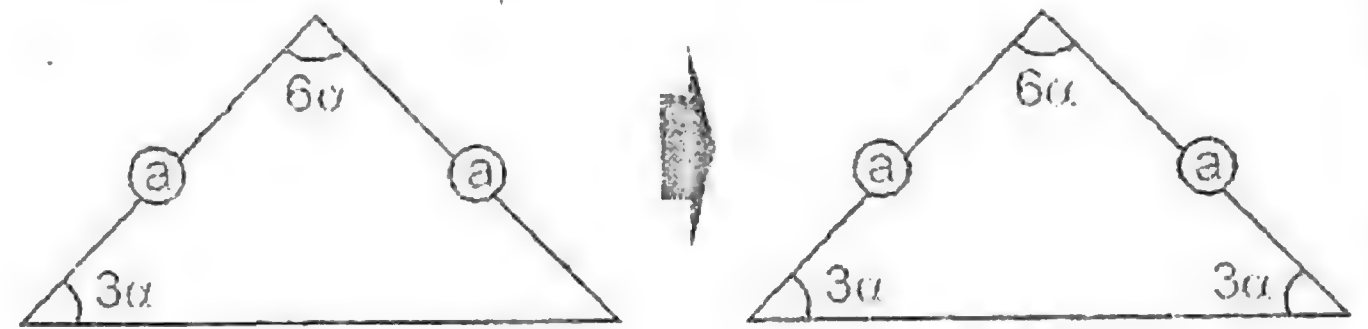
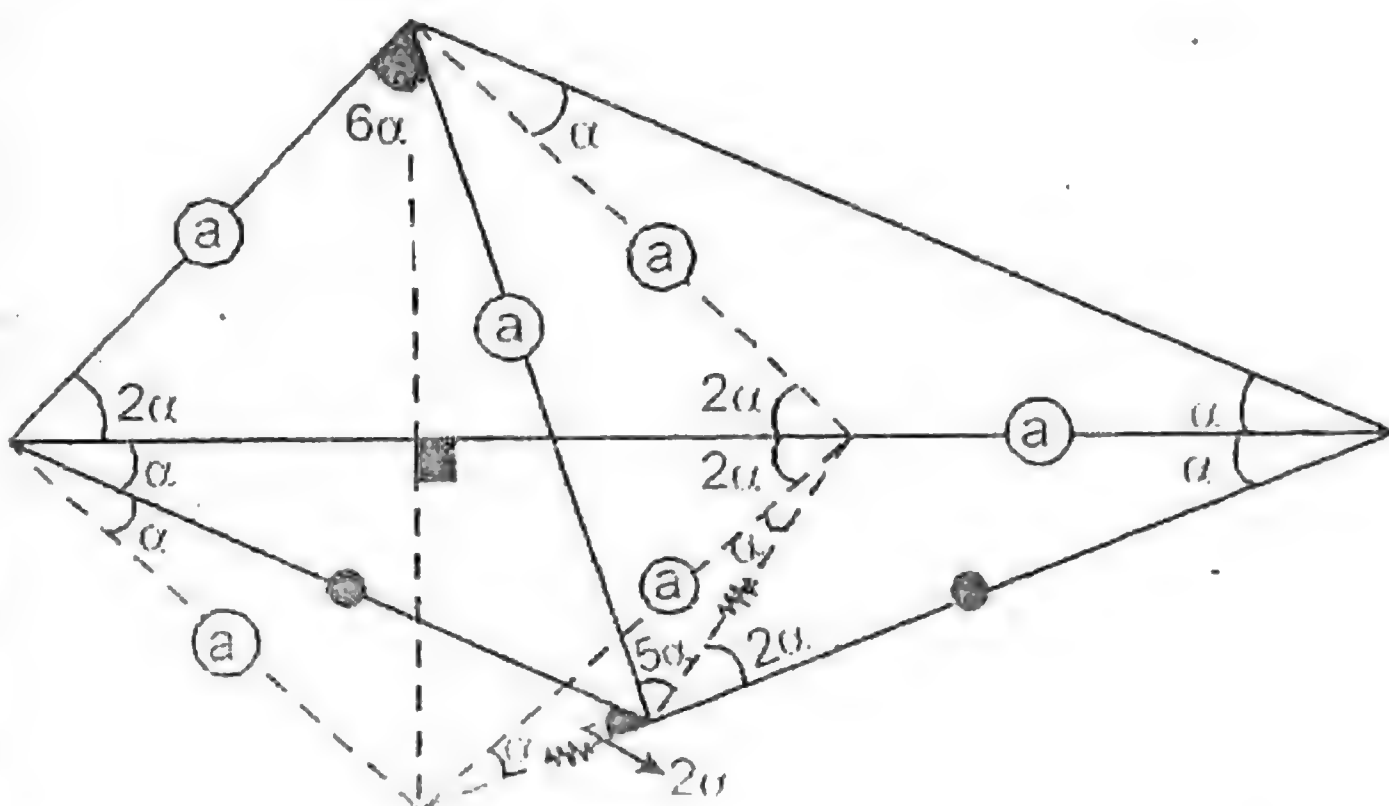
Paso N° 7:

Ahora tenemos un nuevo triángulo isósceles de la forma siguiente:



Paso N° 8:

Ahora tenemos en la figura que se cumple:



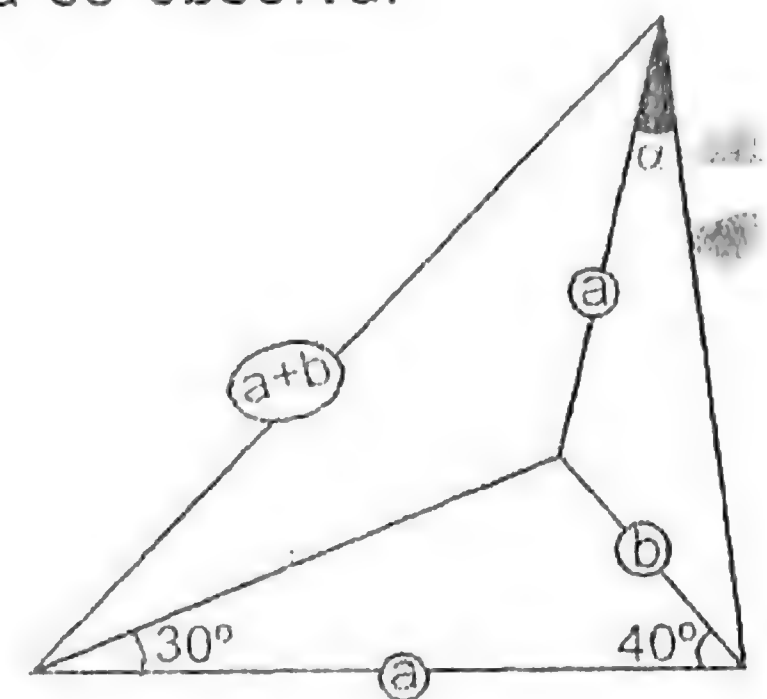
$$\therefore 3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$12\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

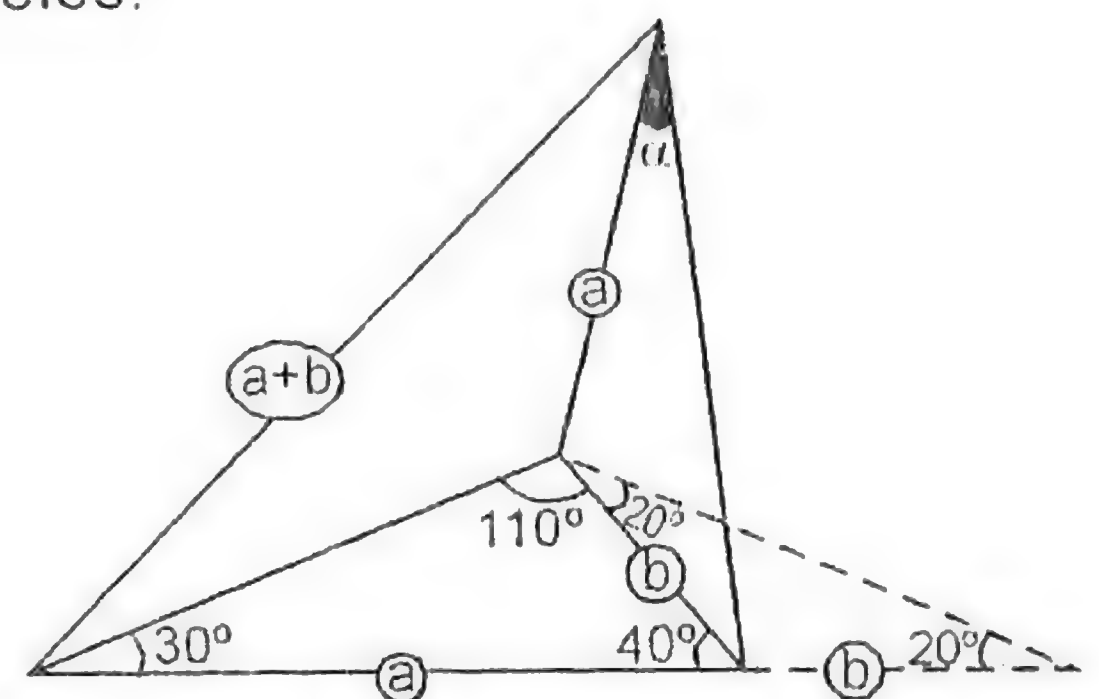
Solución N° 80

De la figura se observa:



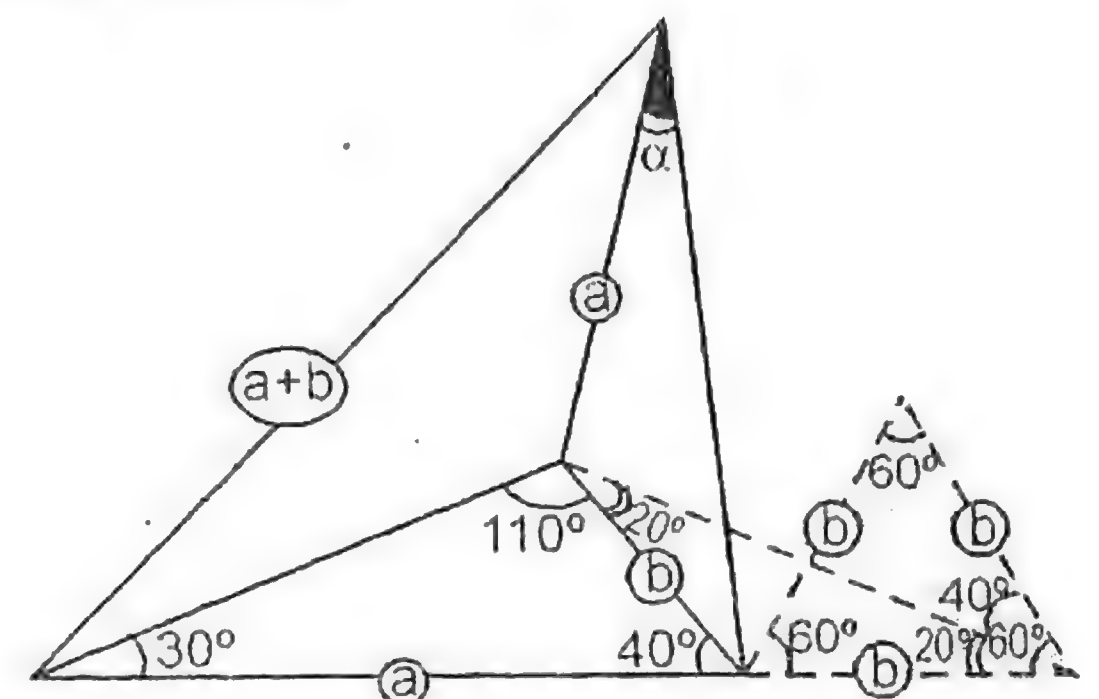
Paso N° 1:

Realizamos el siguiente trazo para formar lados iguales con ello obtenemos un triángulo isósceles.



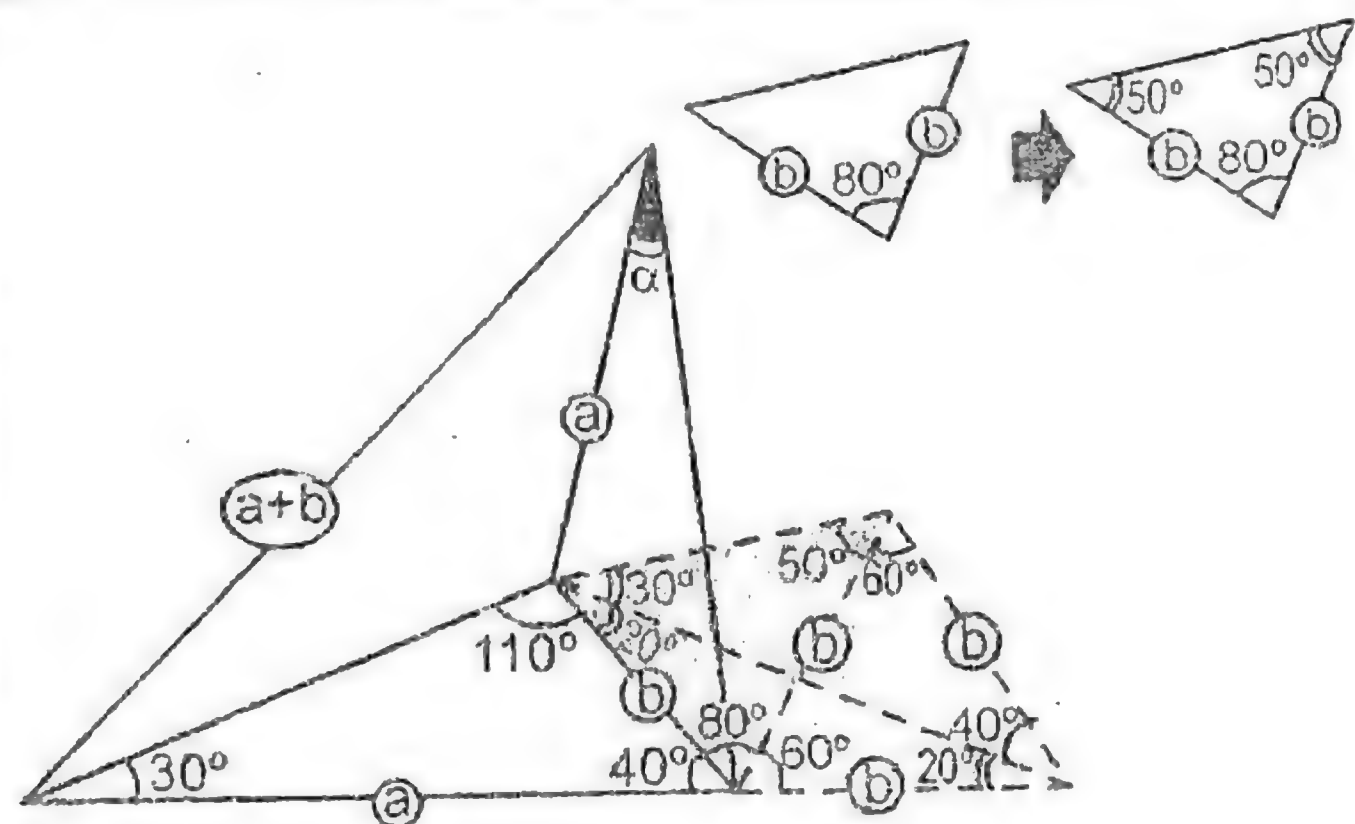
Paso N° 2:

Ahora construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera.



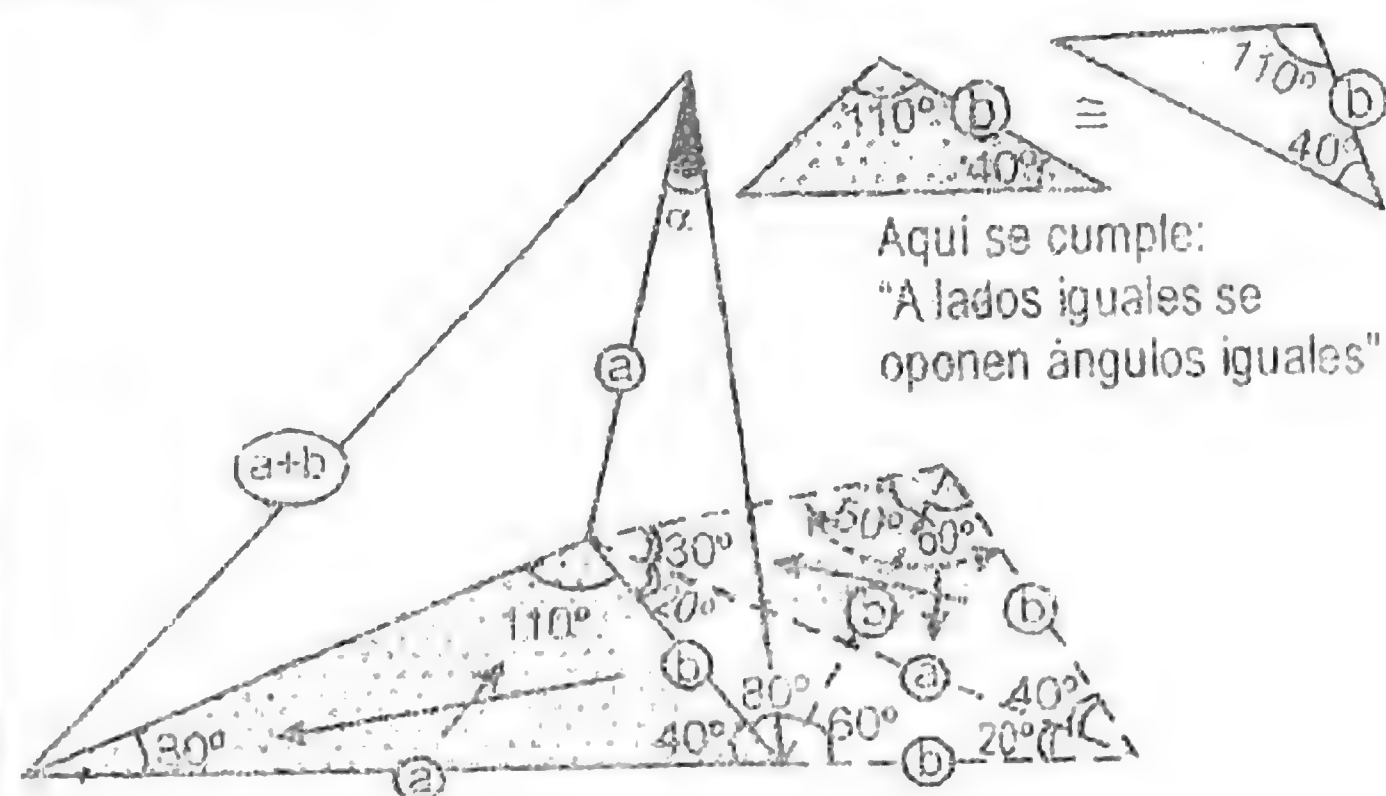
Paso N° 3:

Se observa un nuevo triángulo isósceles de la forma siguiente.



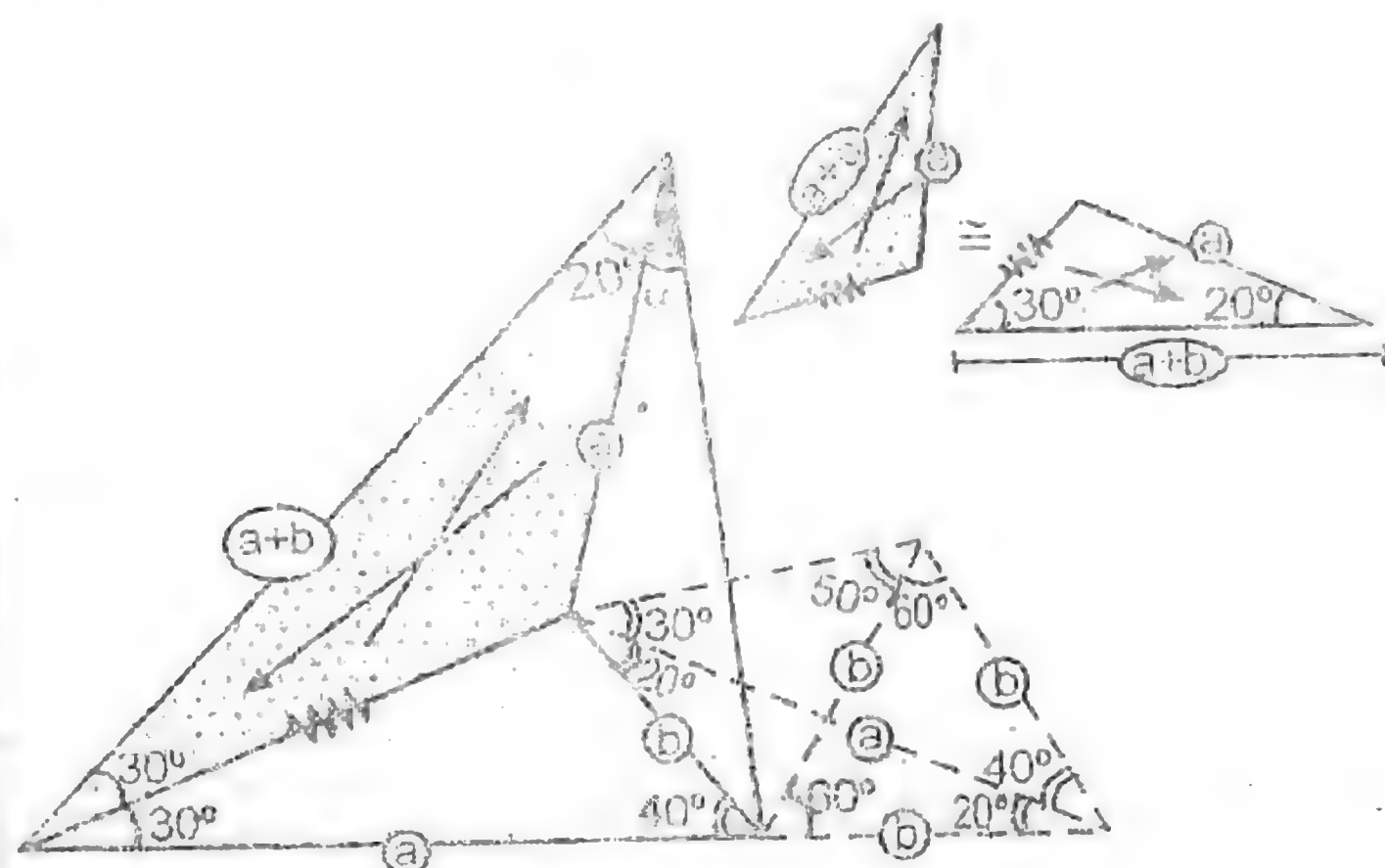
Paso N° 4:

Se obtiene de la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)



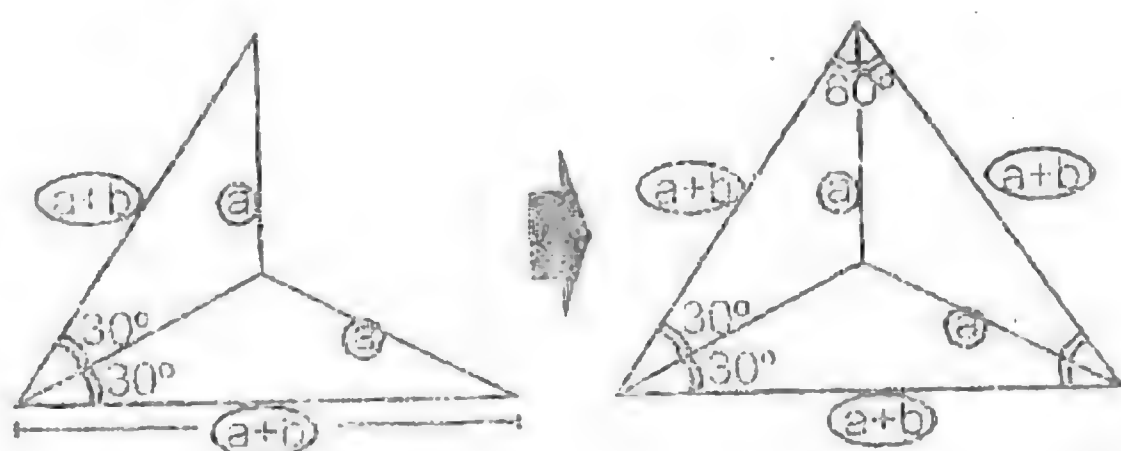
Paso N° 5:

Ahora también se observa dos nuevos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)

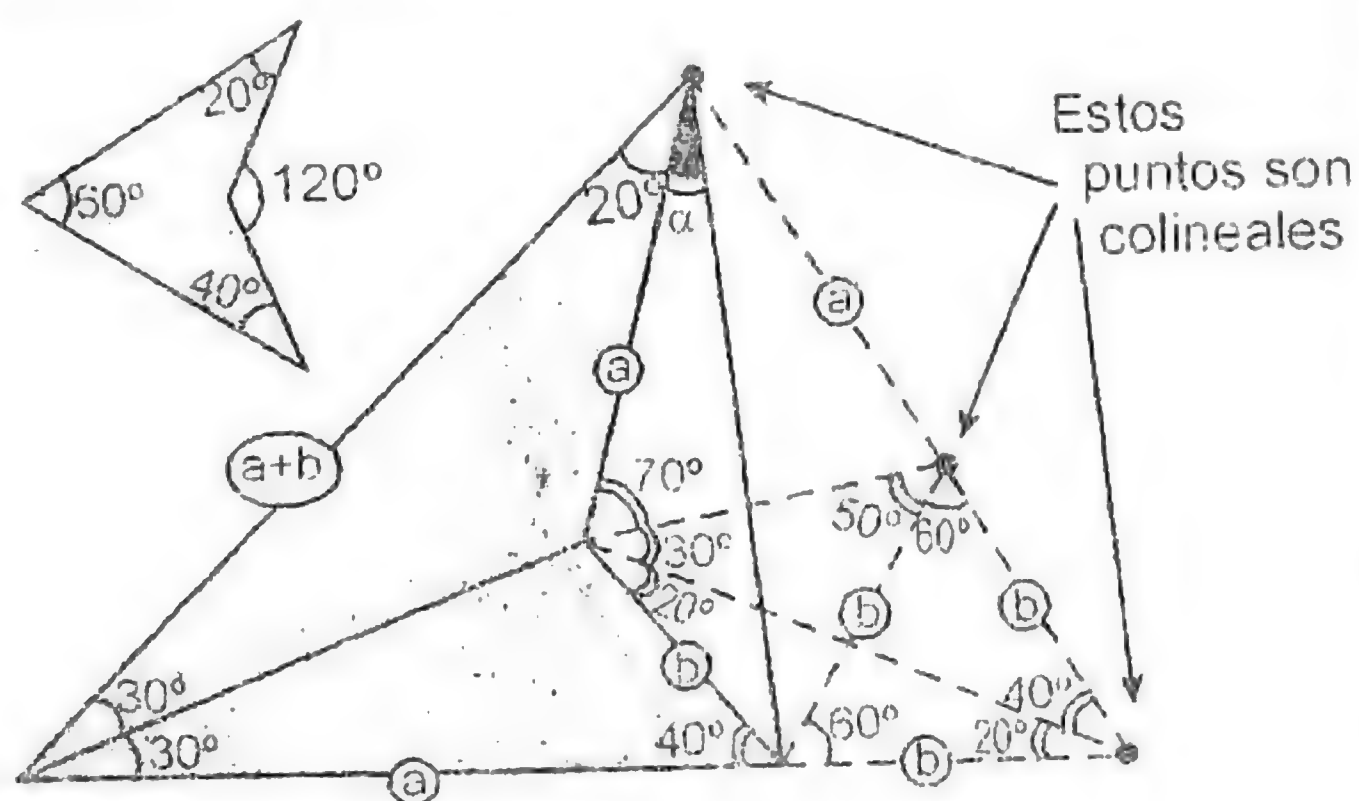


Paso N° 6:

Son la nueva figura se ha obtenido un triángulo equilátero.

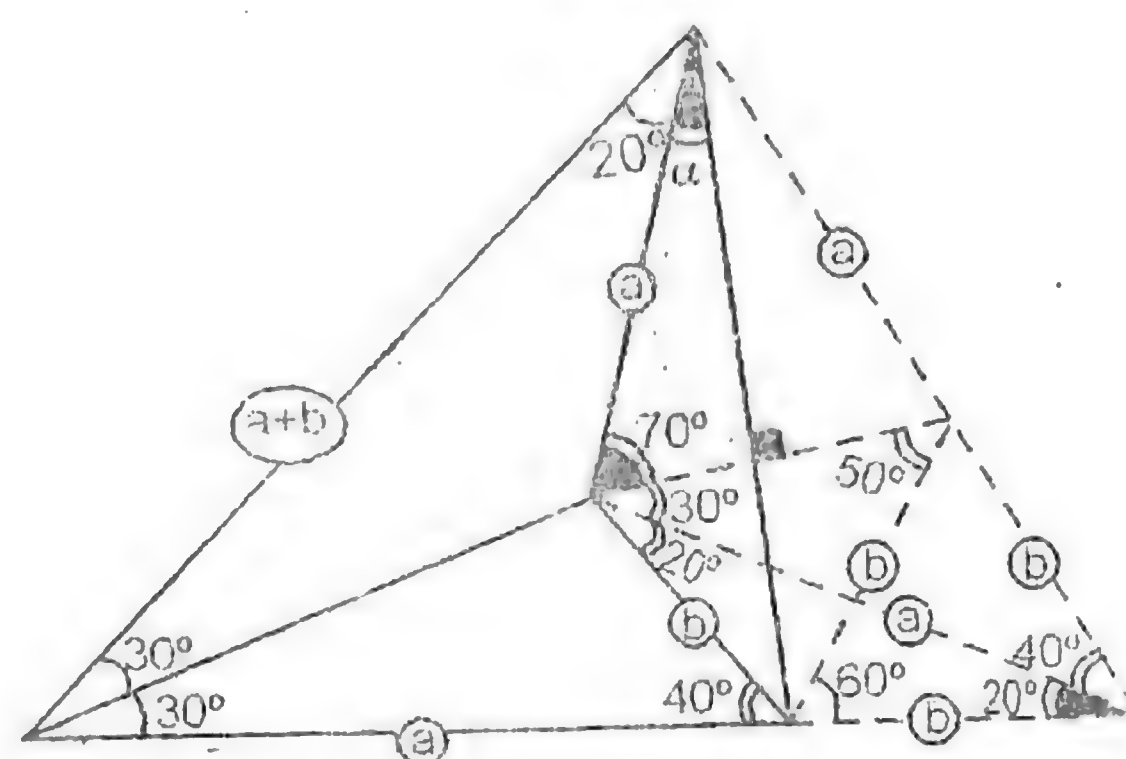
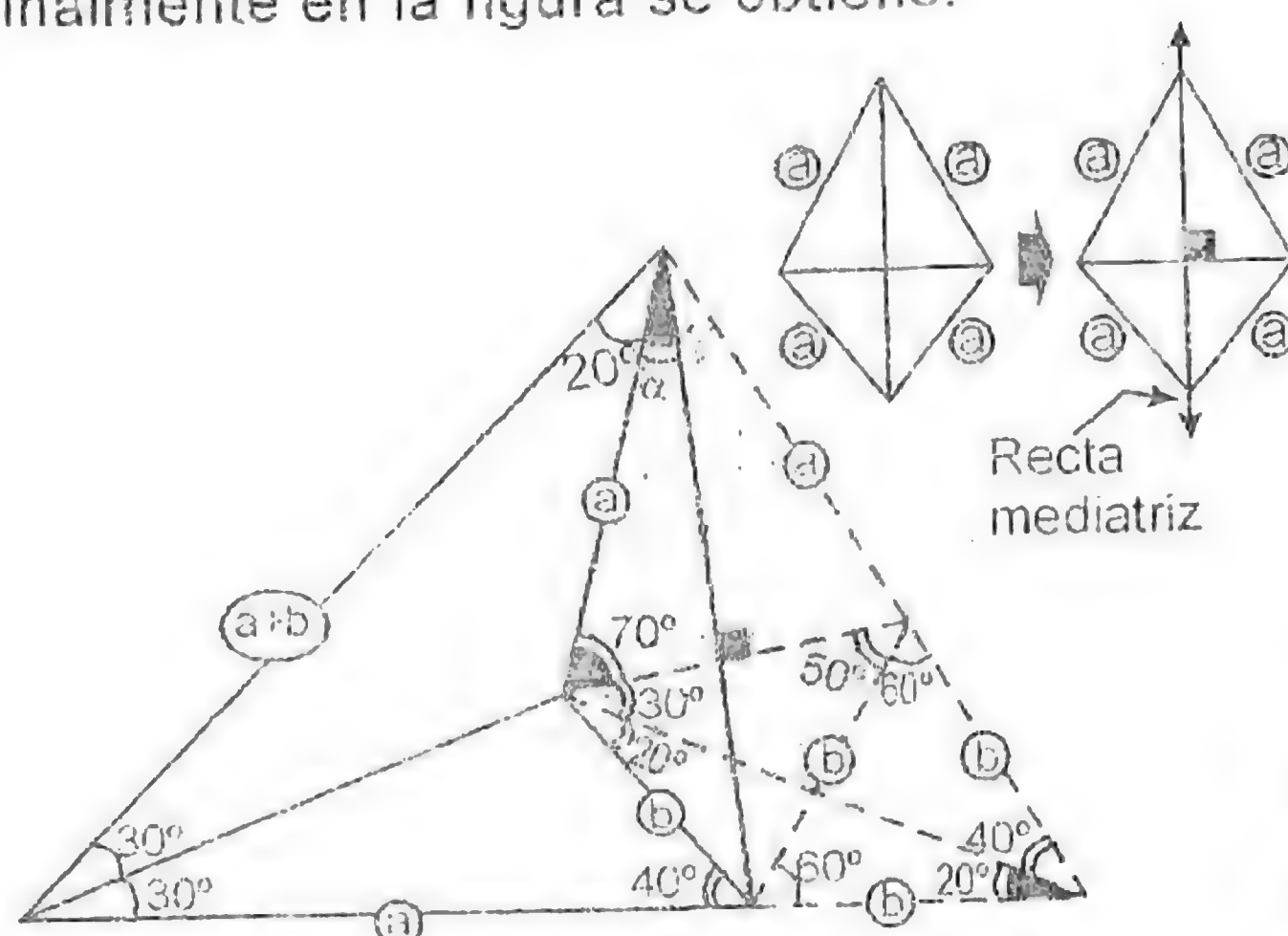


También se cumple:



Paso N° 7:

Finalmente en la figura se obtiene:

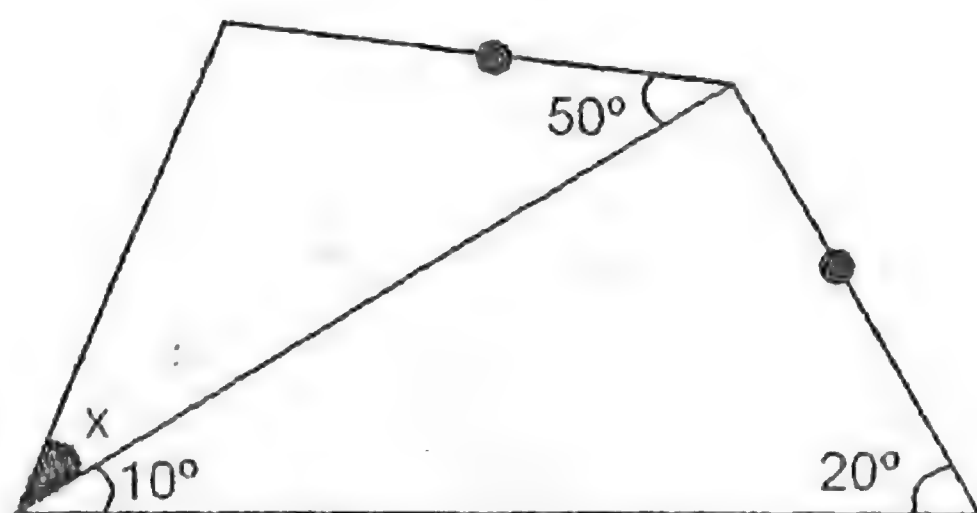


$$\therefore 70^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

Problemas Propuestos

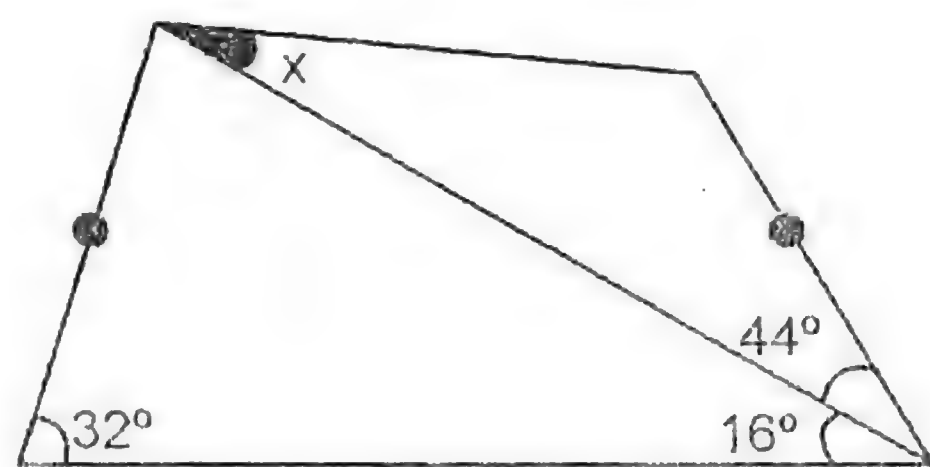
01. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 40°
 E) 60°



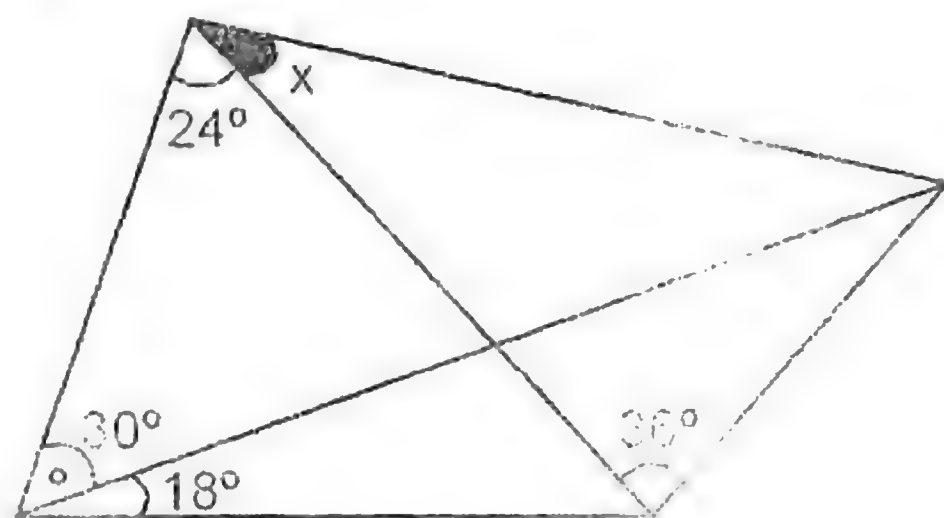
02. Calcular "x"

- A) 16°
 B) 24°
 C) 30°
 D) 32°
 E) 44°



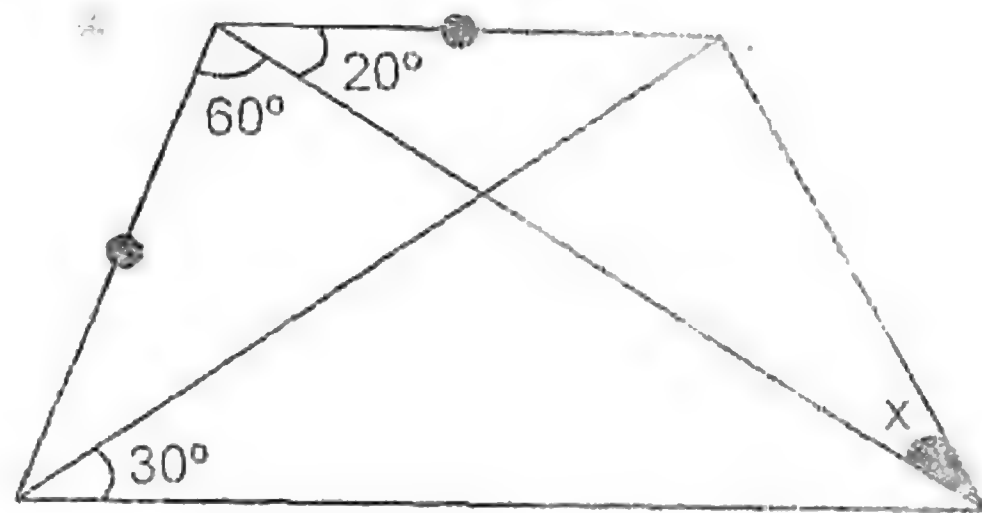
03. Calcular "x"

- A) 15°
 B) 24°
 C) 18°
 D) 30°
 E) 36°



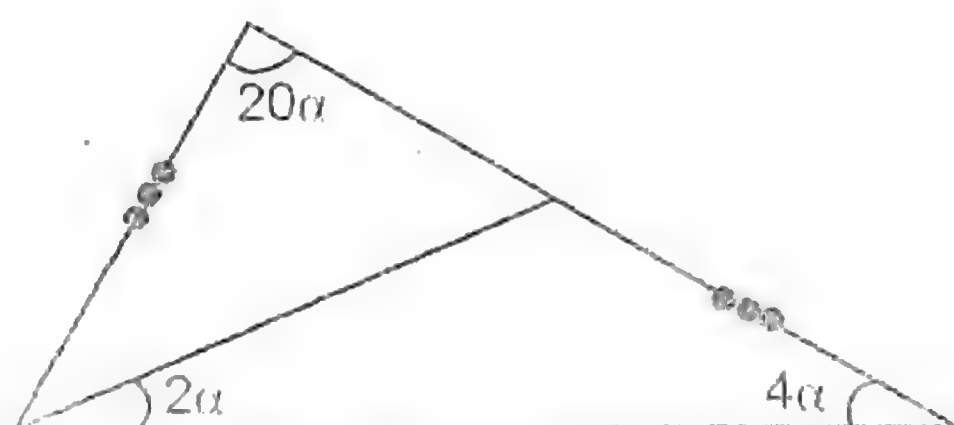
04. Calcular "x"

- A) 20°
 B) 30°
 C) 40°
 D) 42°
 E) 36°



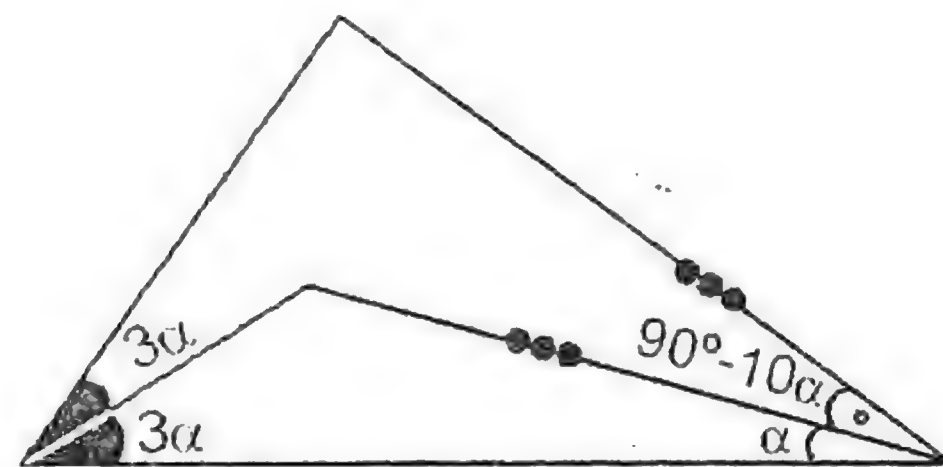
05. Calcular "α"

- A) 4°
 B) 5°
 C) $5,5^\circ$
 D) $4,5^\circ$
 E) 6°



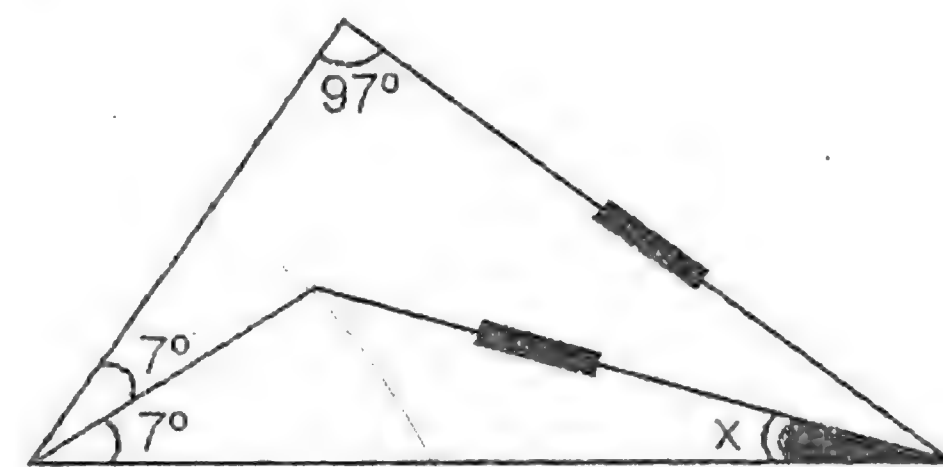
06. Calcular "α"

- A) 6°
 B) 7°
 C) $7,5^\circ$
 D) 8°
 E) 9°



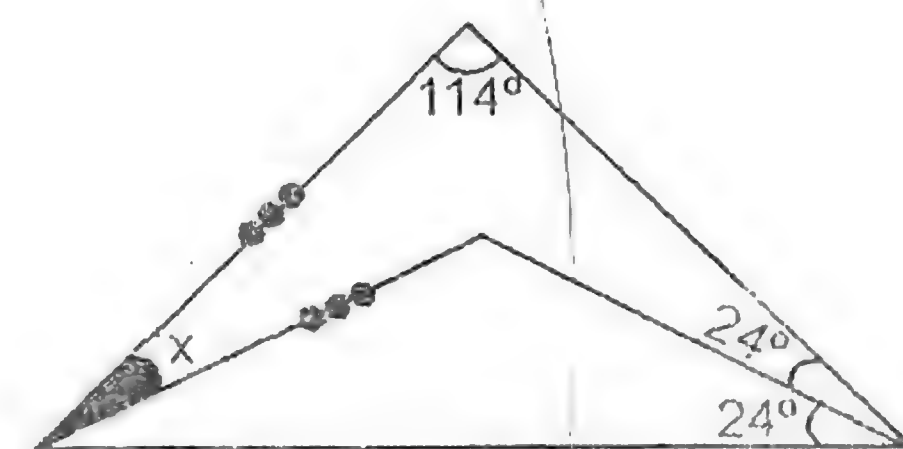
07. Calcular "x"

- A) 20°
 B) 21°
 C) 22°
 D) 23°
 E) 24°



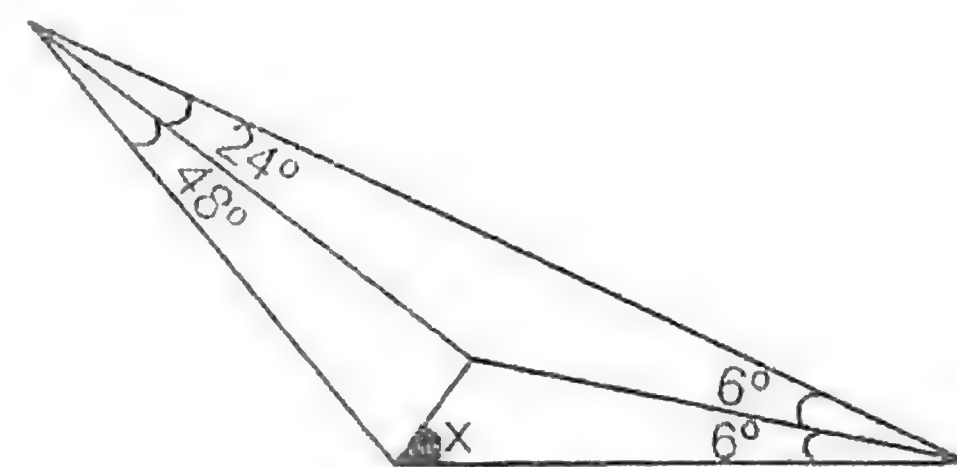
08. Calcular "x"

- A) 12°
 B) 16°
 C) 18°
 D) 20°
 E) 24°



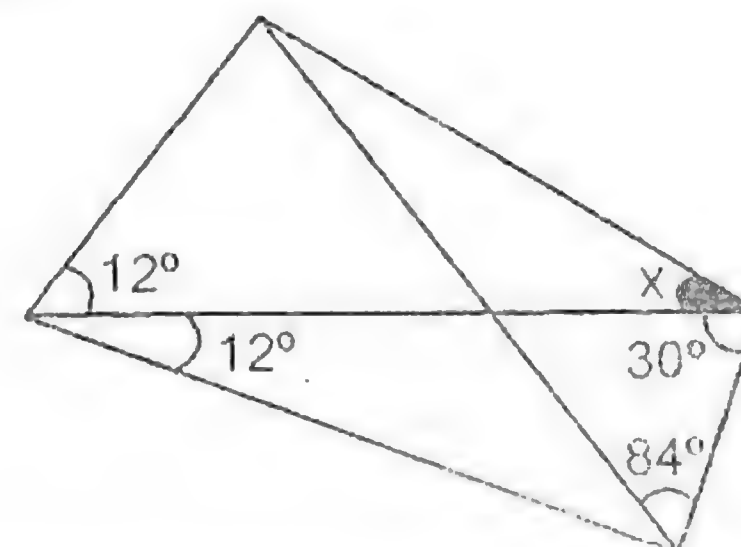
09. Calcular "x"

- A) 24°
 B) 30°
 C) 32°
 D) 36°
 E) 60°



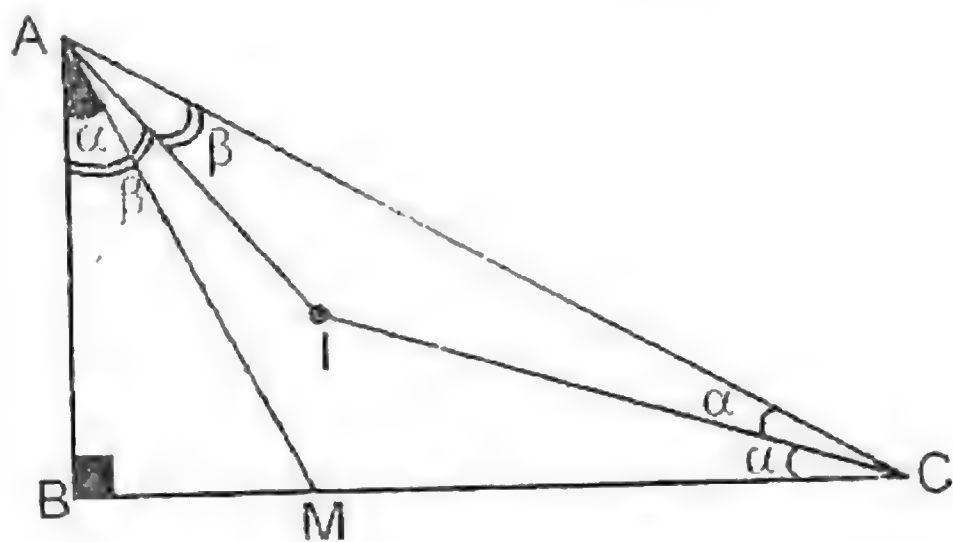
10. Calcular "x"

- A) 12°
 B) 16°
 C) 18°
 D) 20°
 E) 24°



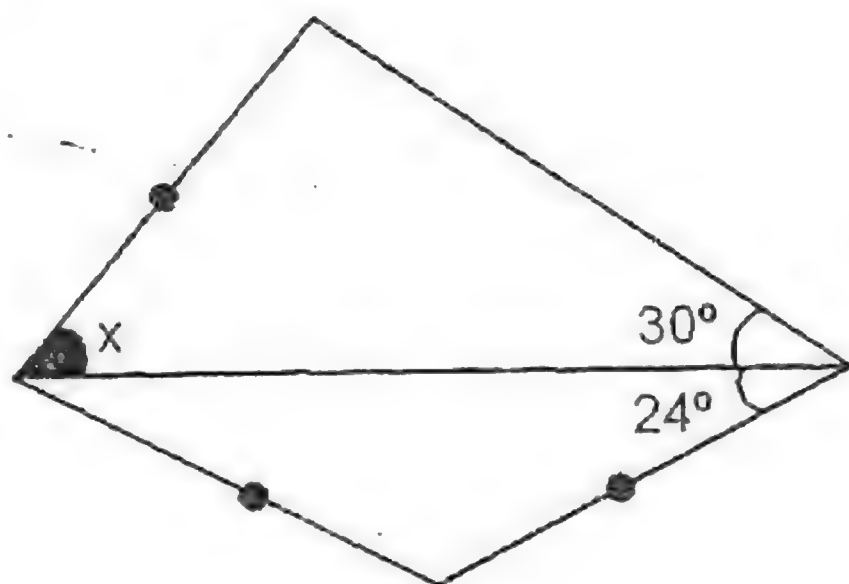
11. En la figura, $AI = 4$, calcular "AM"

- A) $4\sqrt{3}$
 B) $8\sqrt{2}$
 C) $4\sqrt{2}$
 D) $2\sqrt{2}$
 E) $2\sqrt{3}$



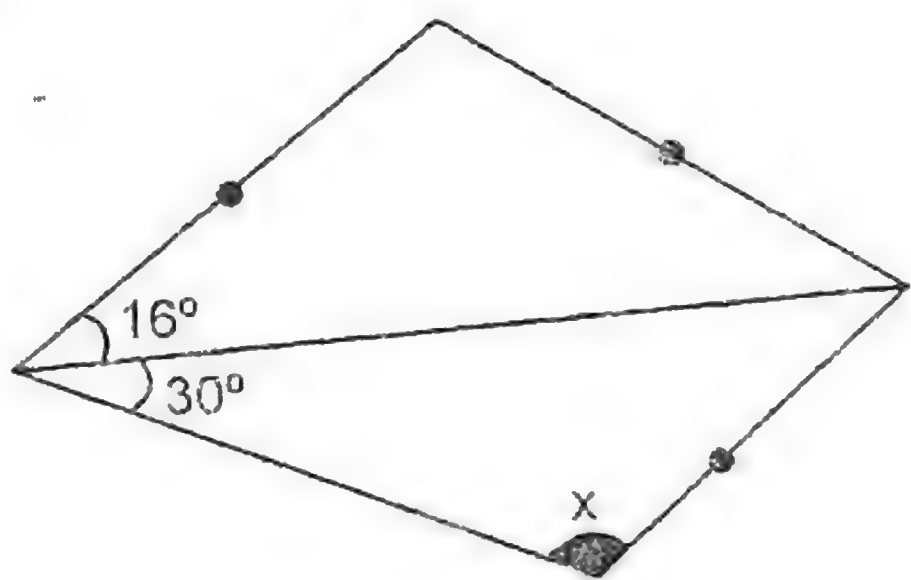
12. Calcular "x"

- A) 36°
 B) 30°
 C) 24°
 D) 48°
 E) 16°



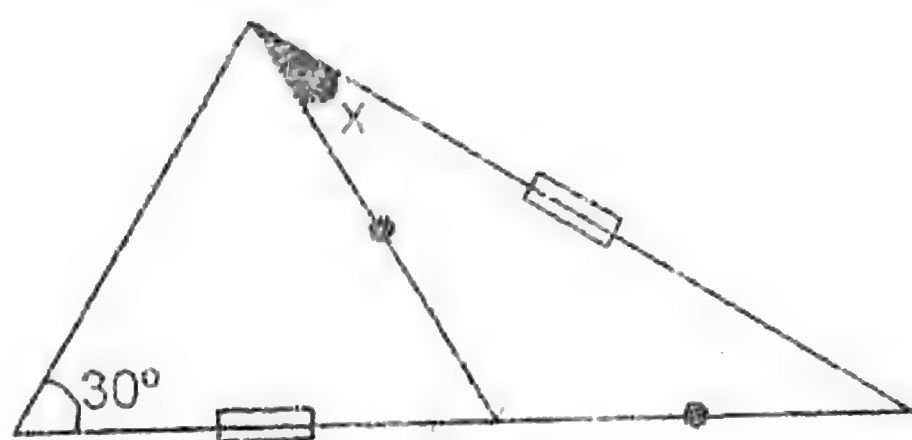
13. Calcular "x"

- A) 44°
 B) 24°
 C) 106°
 D) 95°
 E) 94°



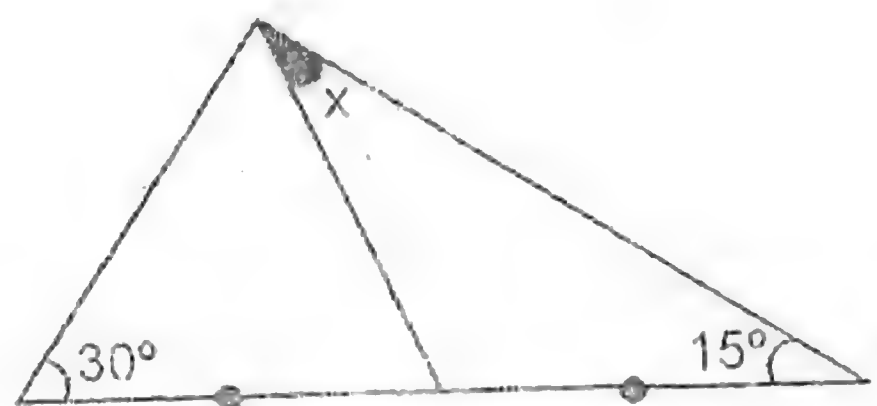
14. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 15°
 C) 20°
 D) 25°
 E) 30°



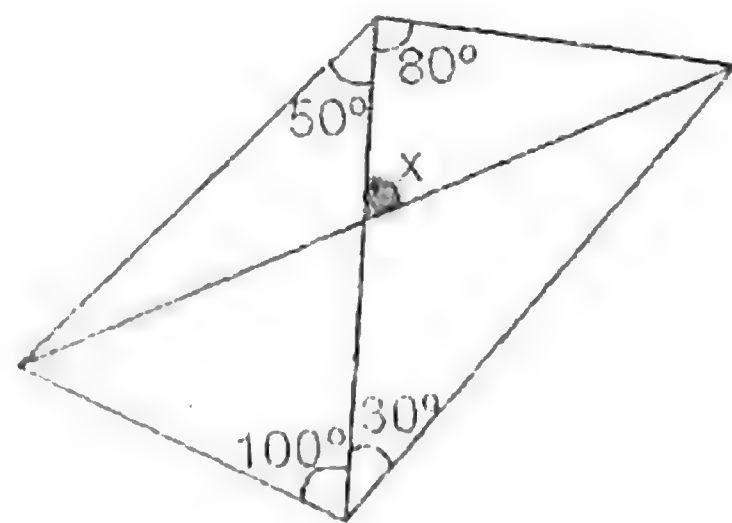
15. Calcular "x"

- A) 15°
 B) 20°
 C) 28°
 D) 30°
 E) 37°



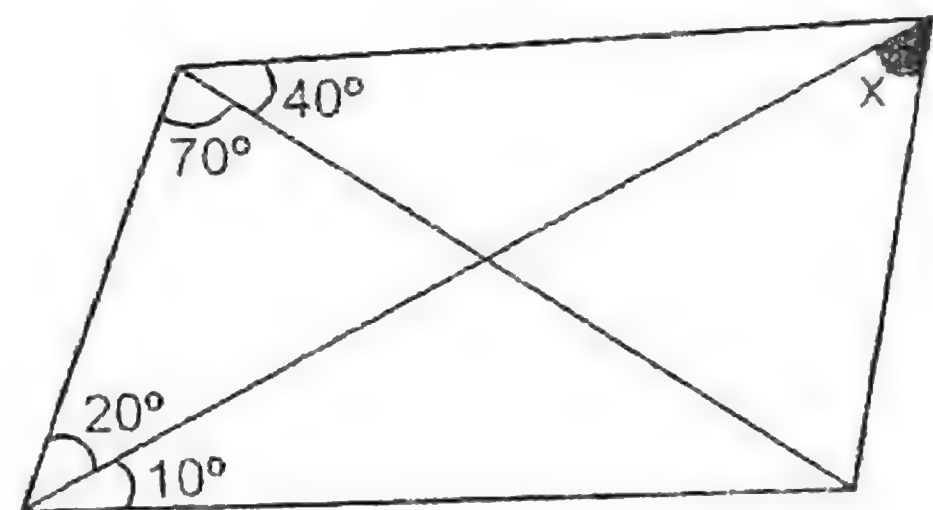
16. Calcular "x"

- A) 30°
 B) 45°
 C) 50°
 D) 60°
 E) 70°



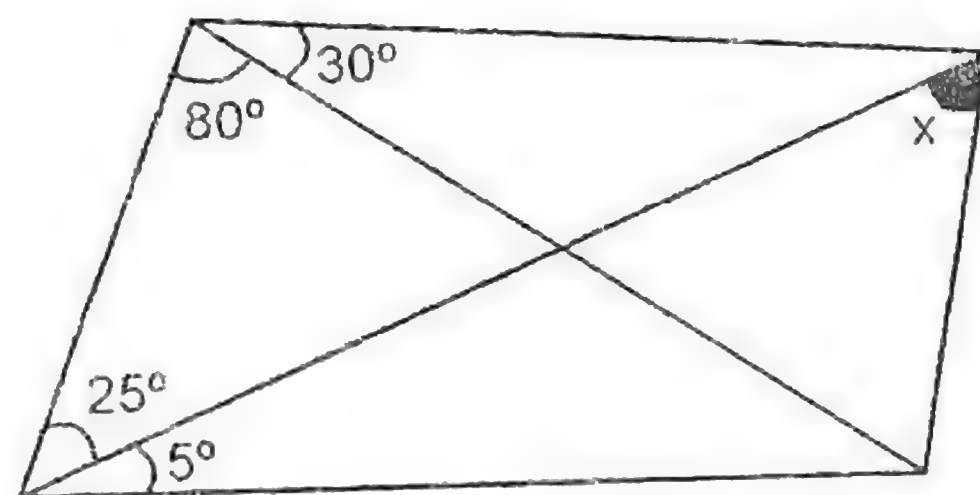
17. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 40°
 E) 45°



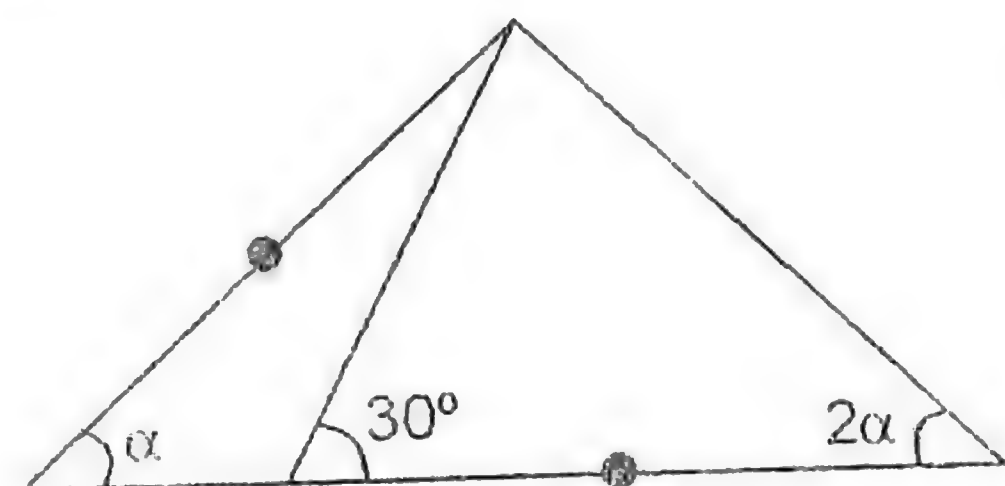
18. Calcular "x"

- A) 20°
 B) 24°
 C) 30°
 D) 36°
 E) 40°



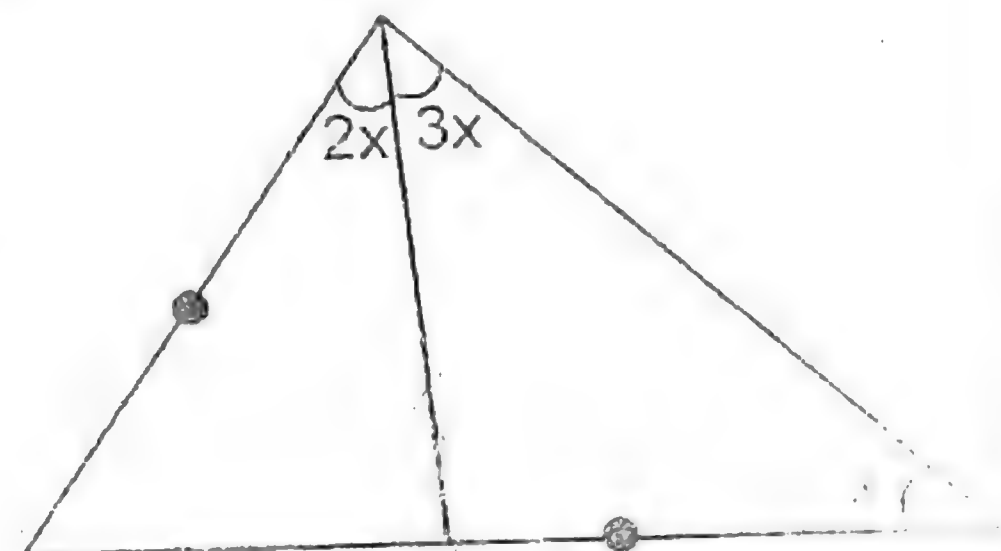
19. Calcular "α"

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 15°
 E) 18°



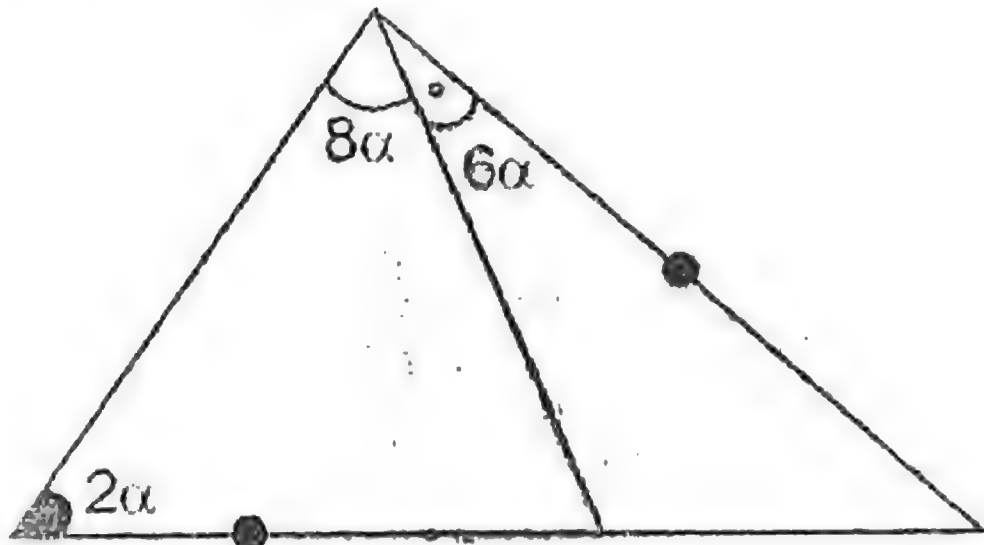
20. Calcular "x"

- A) 20°
 B) 24°
 C) $25,7^\circ$
 D) 28°
 E) 29°



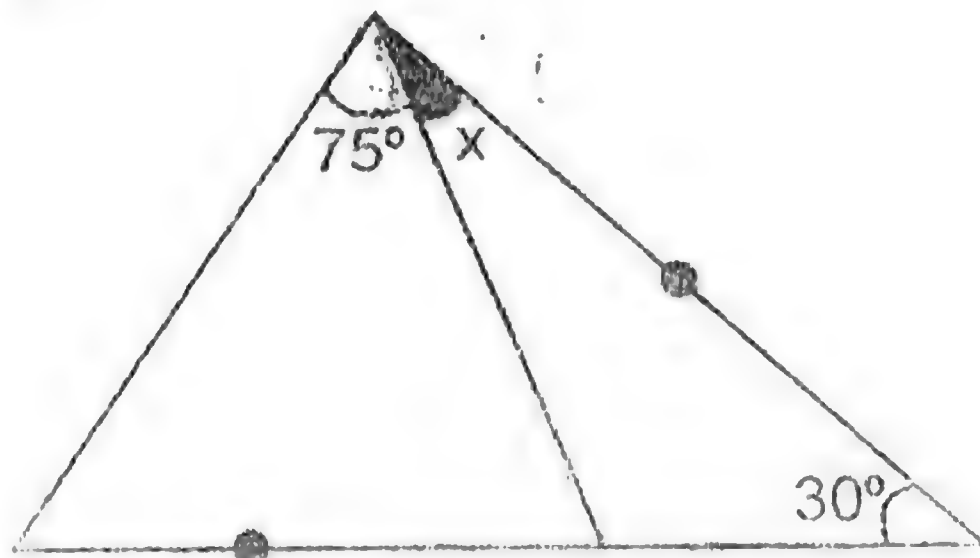
21. Calcular " α "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 8°
- D) 9°
- E) 6°



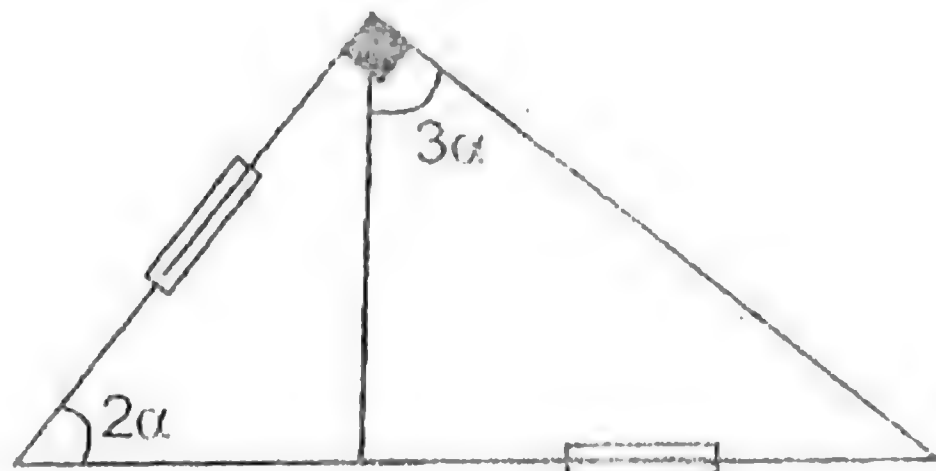
22. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 35°
- C) 45°
- D) 50°
- E) 55°



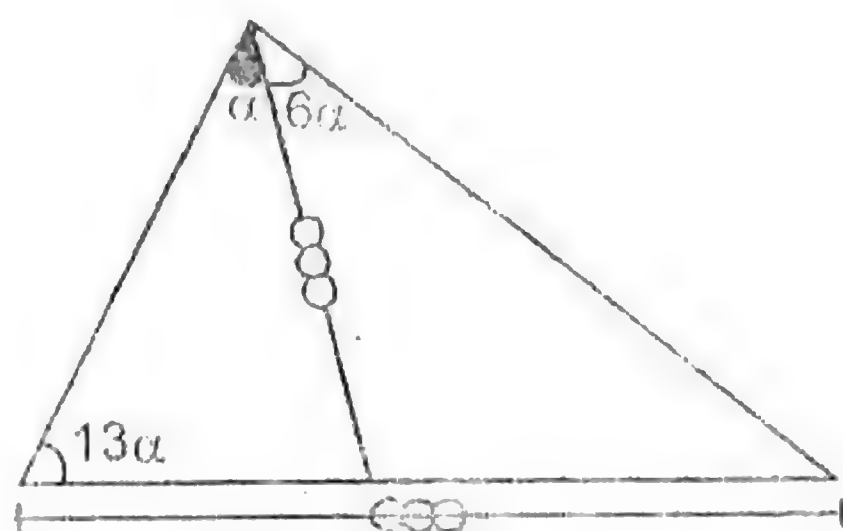
23. Calcular " α "

- A) 18°
- B) 20°
- C) $22,5^\circ$
- D) 23°
- E) 24°



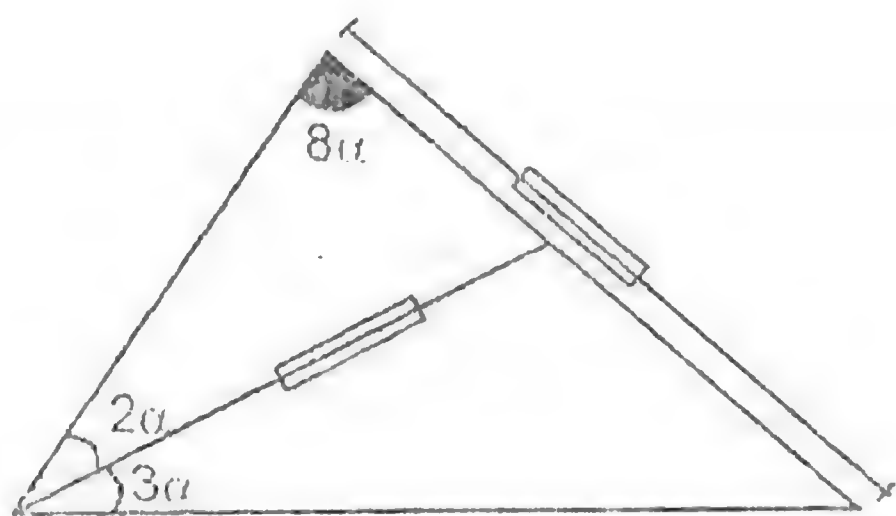
24. Calcular " α "

- A) 5°
- B) $5,5^\circ$
- C) $6,6^\circ$
- D) $6,3^\circ$
- E) $6,8^\circ$



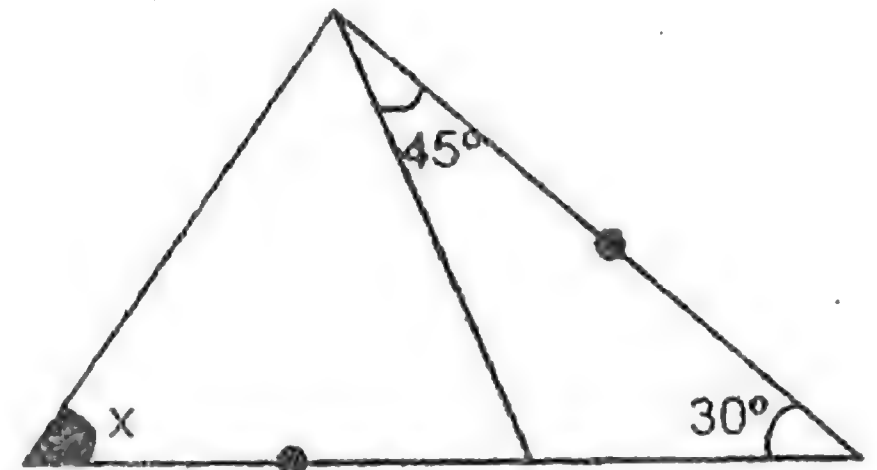
25. Calcular " α "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



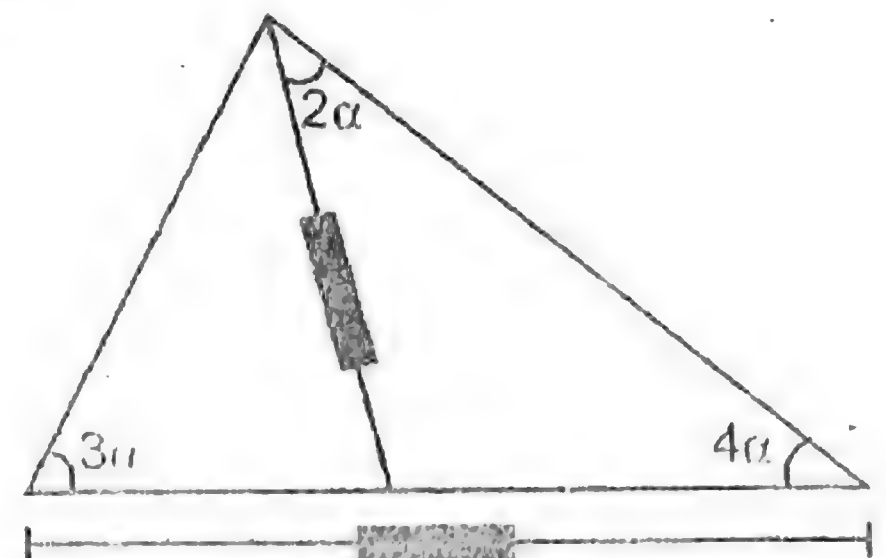
26. Calcular " x "

- A) 20°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 36°
- E) 45°



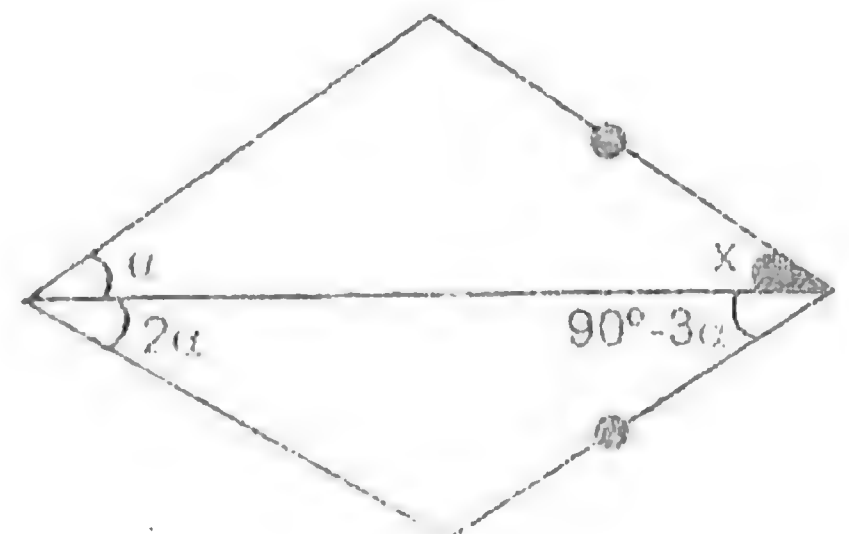
27. Calcular " α "

- A) 18°
- B) 20°
- C) 24°
- D) 15°
- E) 12°



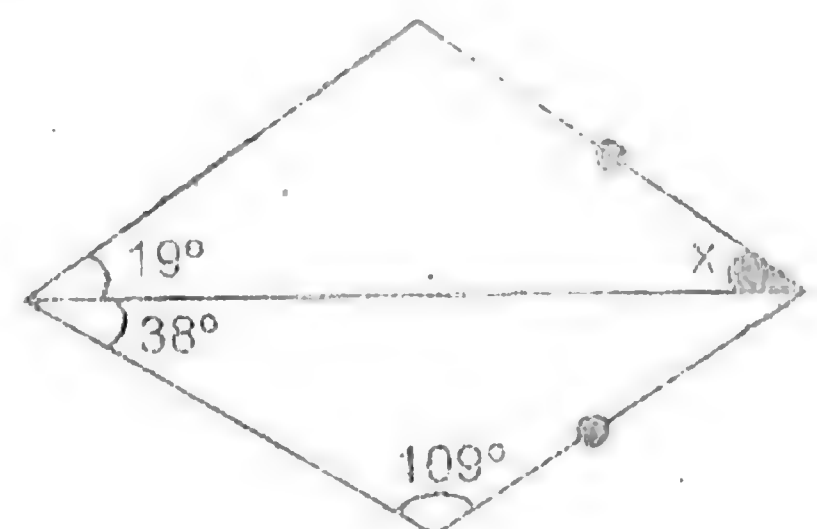
28. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 15°
- C) $30^\circ - \alpha$
- D) $30^\circ + \alpha$
- E) $45^\circ - \frac{3\alpha}{2}$



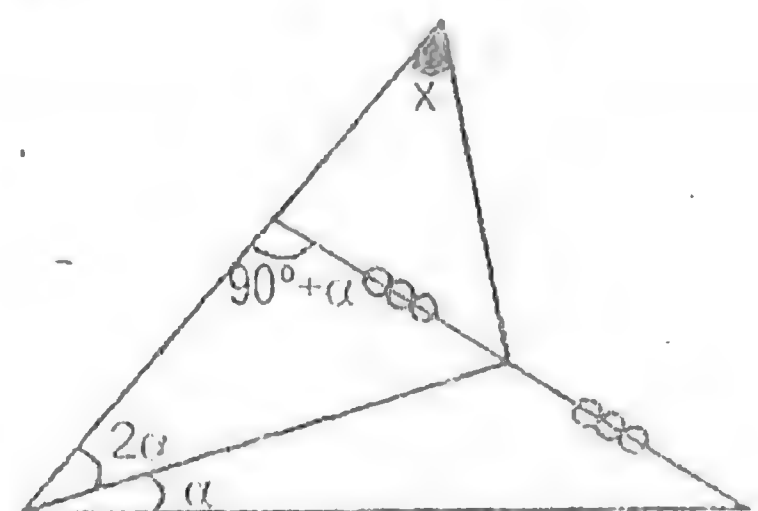
29. Calcular " x "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 19°
- E) 11°



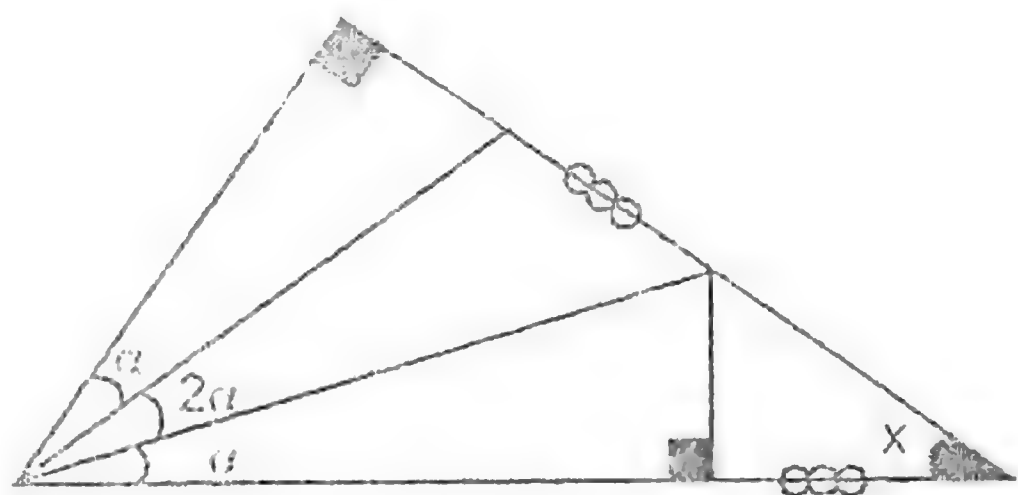
30. Calcular " x "

- A) 30°
- B) 18°
- C) 37°
- D) 8°
- E) 15°



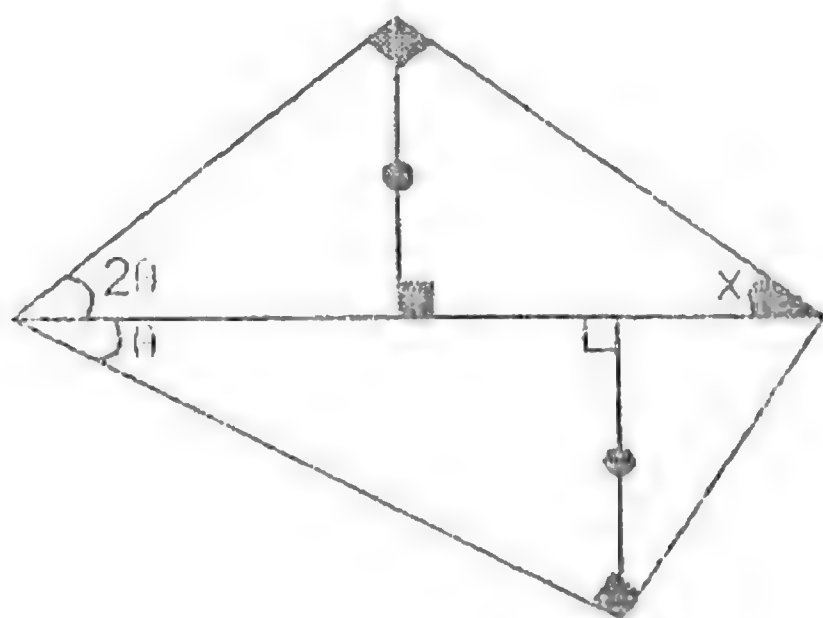
31. Calcular "x"

- A) 15°
- B) 30°
- C) $53^\circ/2$
- D) $37^\circ/2$
- E) 14°



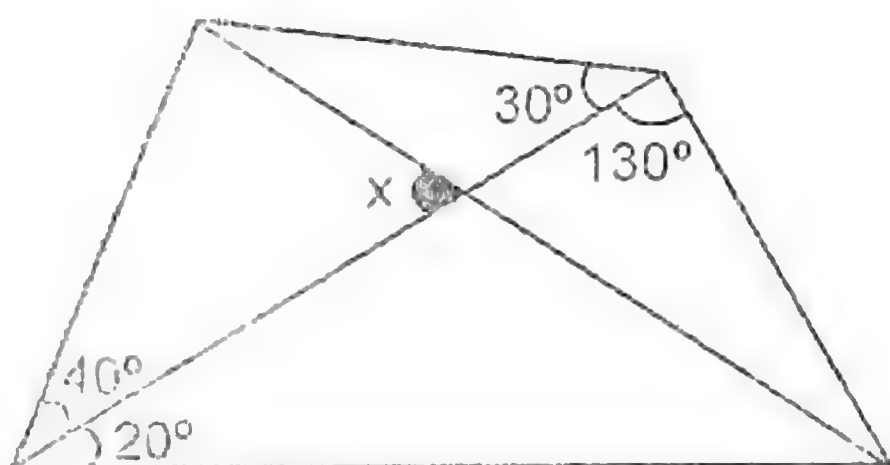
32. Calcular "x"

- A) 15°
- B) 18°
- C) 60°
- D) 45°
- E) 30°



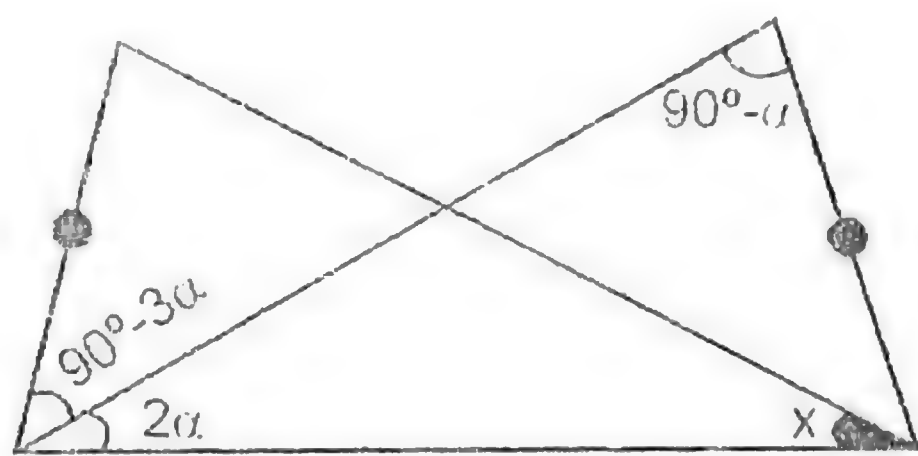
33. Calcular "x"

- A) 40°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 24°



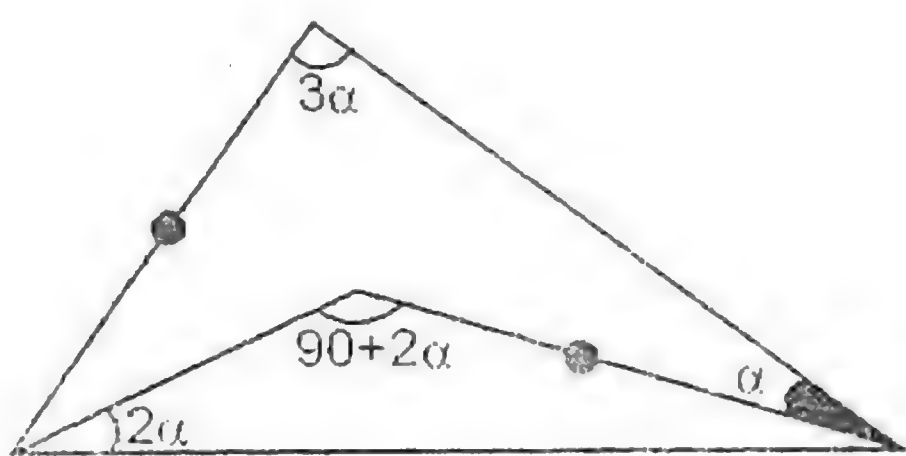
34. Calcular "x"

- A) 2α
- B) $90 - 3\alpha$
- C) $45 - 2\alpha$
- D) α
- E) $\alpha/2$



35. Calcular "alpha"

- A) 15°
- B) 18°
- C) 20°
- D) $22,5^\circ$
- E) 24°



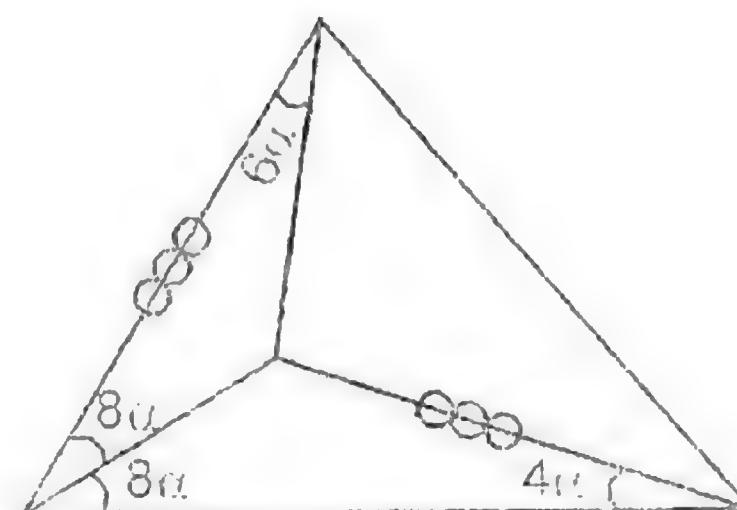
36. Calcular "x"

- A) 12°
- B) 24°
- C) 26°
- D) 30°
- E) 36°



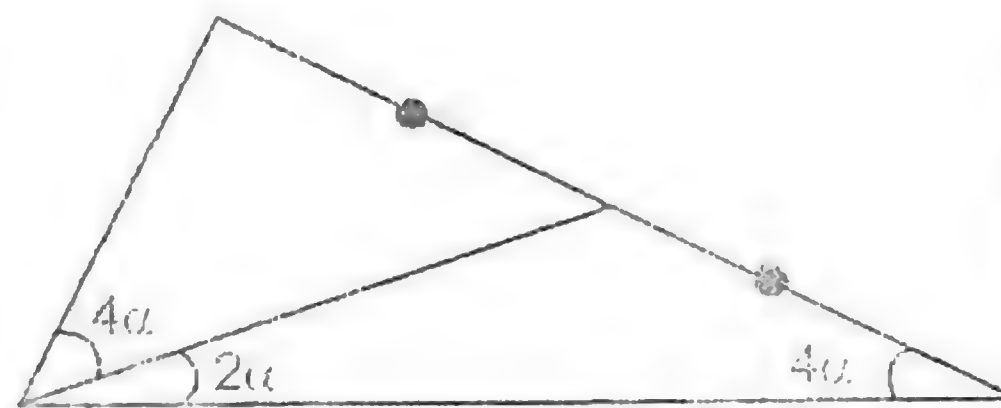
37. Calcular "alpha"

- A) 3°
- B) 4°
- C) 5°
- D) 6°
- E) 7°



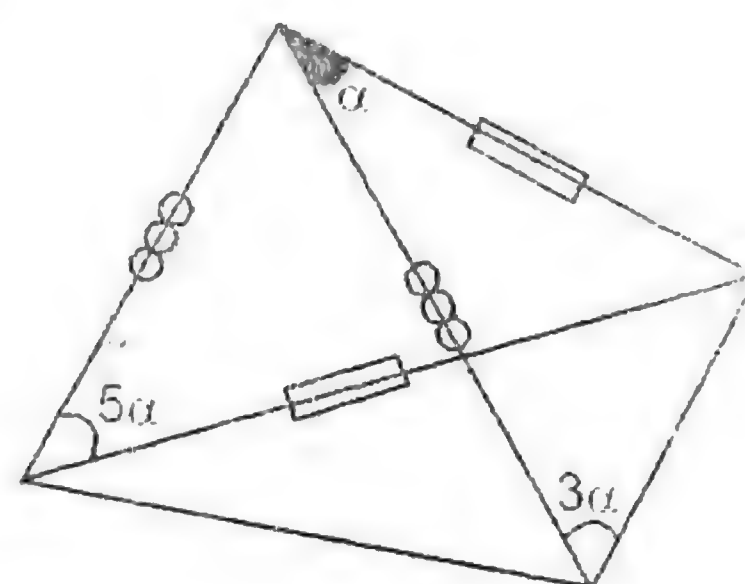
38. Calcular "alpha"

- A) 6°
- B) $7,5^\circ$
- C) 8°
- D) 9°
- E) 10°



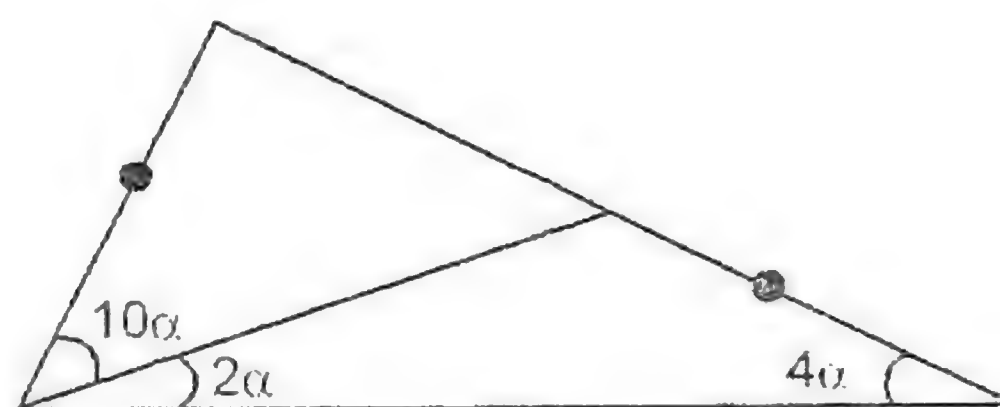
39. Calcular "alpha"

- A) 8°
- B) 9°
- C) 10°
- D) 12°
- E) 15°



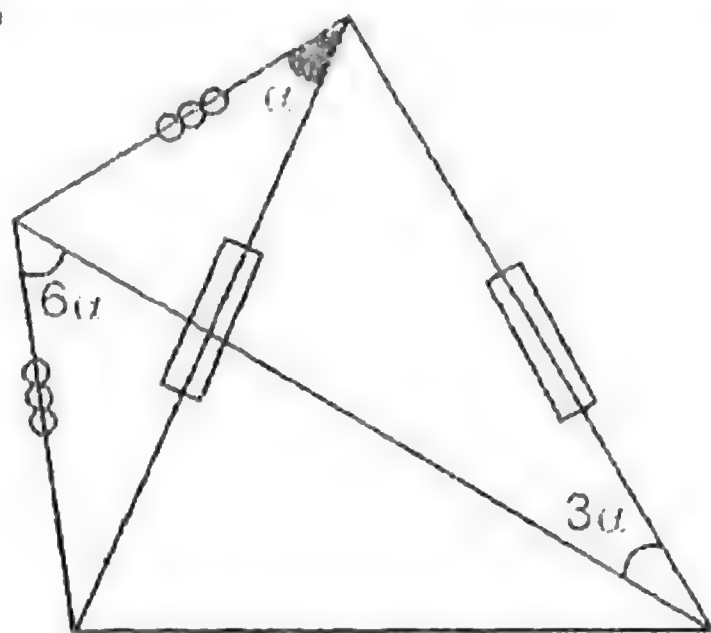
40. Calcular "alpha"

- A) 5°
- B) 6°
- C) $7,5^\circ$
- D) 9°
- E) 10°

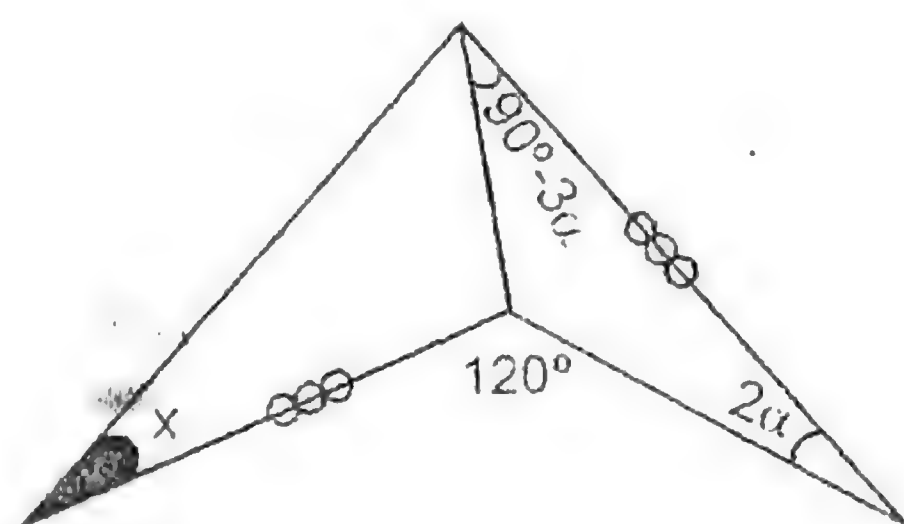


41. Calcular " α "

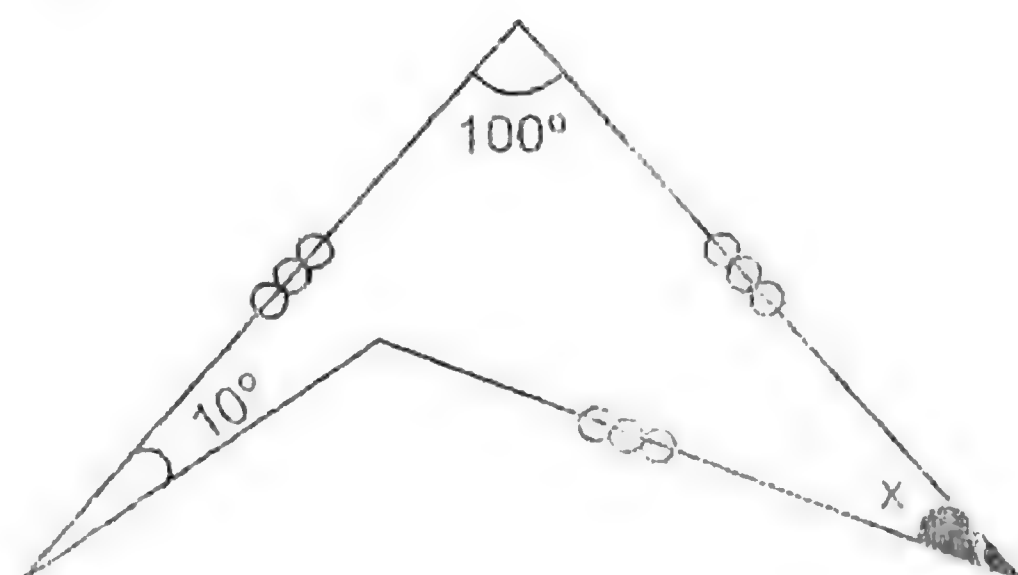
- A) 10°
 B) 15°
 C) 20°
 D) 30°
 E) 32°

42. Calcular " x "

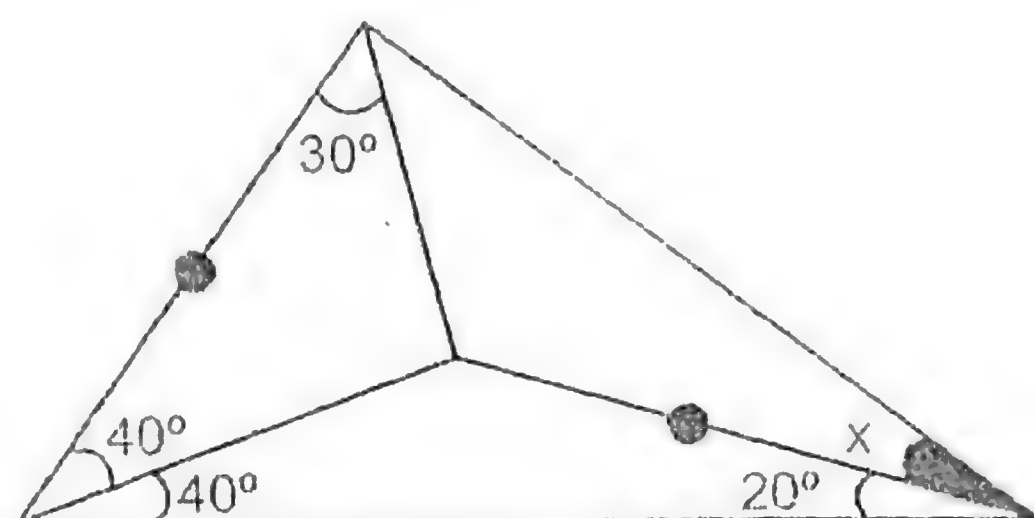
- A) $30^\circ - 3\alpha$
 B) $60^\circ - 3\alpha$
 C) α
 D) $2\alpha/3$
 E) $90^\circ - 4\alpha$

43. Calcular " x "

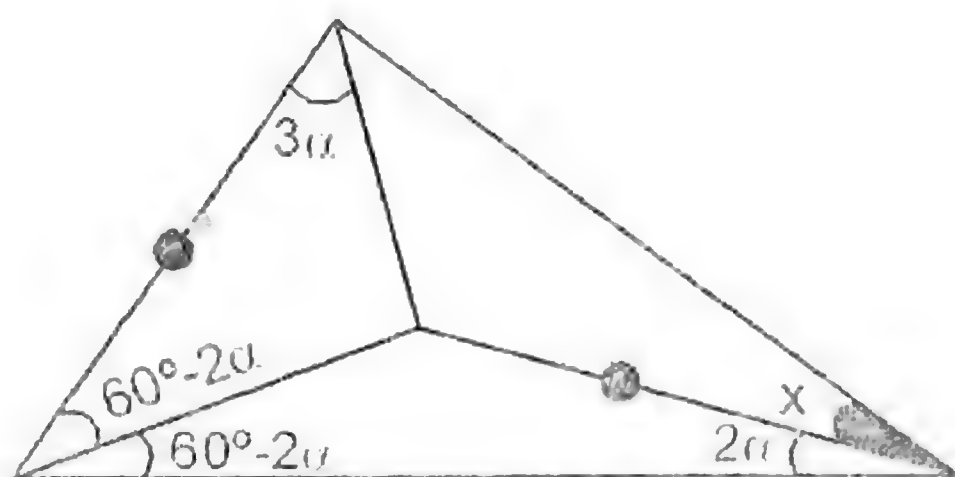
- A) 5°
 B) 10°
 C) 15°
 D) 20°
 E) 25°

44. Calcular " x "

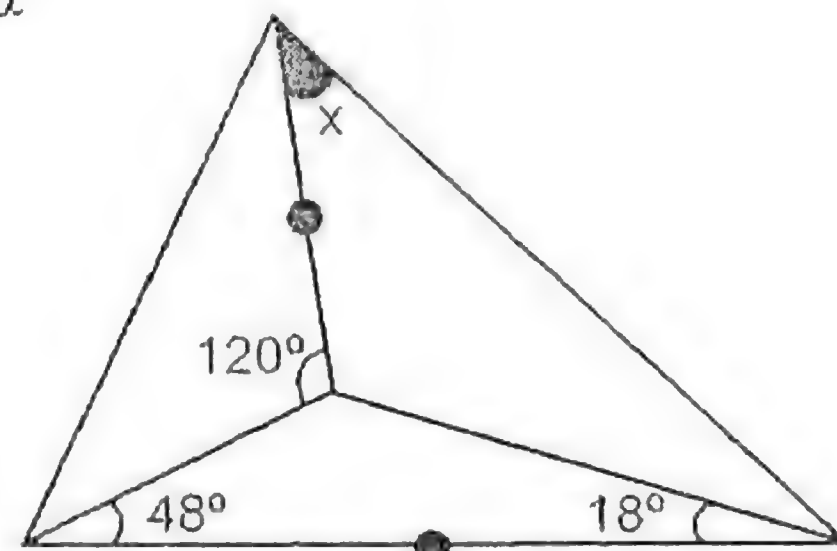
- A) 10°
 B) 15°
 C) 20°
 D) 25°
 E) 30°

45. Calcular " α "

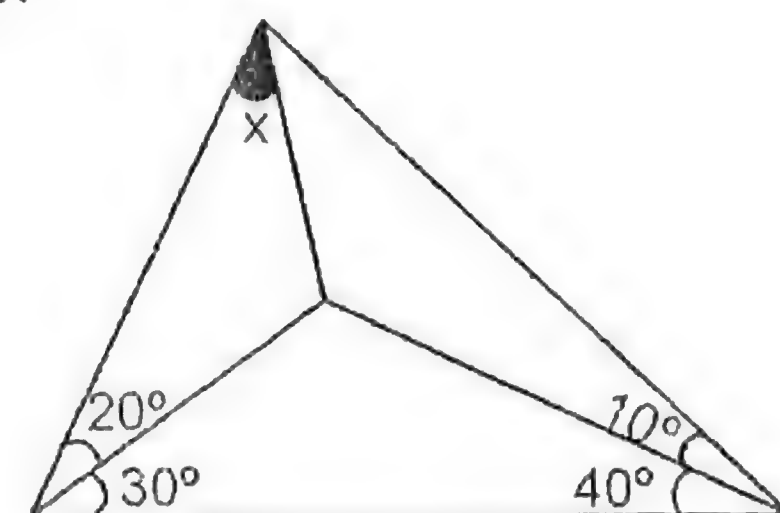
- A) 30°
 B) $30^\circ + \alpha$
 C) $30^\circ - \alpha$
 D) $60^\circ - \alpha$
 E) α

46. Calcular " α "

- A) 12°
 B) 18°
 C) 20°
 D) 24°
 E) 30°

47. Calcular " x "

- A) 30°
 B) 40°
 C) 45°
 D) 50°
 E) 60°



48. Exterioirmente relativo al lado \overline{AB} de un triángulo ABC, se ubica el punto "P", tal que $PB = BC$, calcular la $m \angle APB$.

Si: $m \angle BAC = 2m \angle PAB = 2\alpha$ y
 $m \angle ACB = 90^\circ + \alpha$

- A) 100° B) 135° C) 120°
 D) 150° E) 127°

49. Exterioirmente y relativo al lado \overline{AC} de un triángulo obtuzángulo ABC, (obtuzo en "B") se ubica el punto "D", tal que $BC = CD$. Calcular $m \angle ABC$, si $m \angle DAC = 2m \angle BAC$ y $m \angle ACD = 90^\circ - 3m \angle BAC$

- A) 120° B) 135° C) 150°
 D) 160° E) 165°

50. En un triángulo ABC acutángulo, sobre "BC" se ubica un punto exterior "D" de tal manera que AD es bisectriz del $m \angle BDC$, donde además $m \angle DBC = 90^\circ + \theta$, $m \angle BDA = \theta$ y $m \angle ACB = 60^\circ + 2\theta$. Hallar el máximo valor entero de $m \angle BAD$. ($\theta \neq 0^\circ$)

- A) 30° B) 29° C) 28°
 D) 27° E) 20°

51. En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) donde $m \angle ABC = 20^\circ$ se traza la ceviana \overline{CP} ($P \in \overline{AB}$), tal que: $BC = AC + AP$. Calcular $m \angle APC$

- A) 10° B) 60° C) 30°
 D) 45° E) 37°

52. En un triángulo ABC ($m\angle B = 100^\circ$) se traza la bisectriz interior \overline{CM} , si $AC = AM + BC$. Calcular $m\angle BAC$

- A) 30° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 37°

53. Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), en la prolongación de \overline{AC} se ubica el punto "P" tal que: $AC = BP$ y $2m\angle BAC = 3m\angle CPB$. Calcular: $m\angle BAC$

- A) 15° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 53°

54. En el interior de un triángulo ABC ($AB = BC$) se toma el punto "P" tal que $PB = AC$, $m\angle PBA = 10^\circ$ y $m\angle PBC = 30^\circ$. Hallar la $m\angle PAB$.

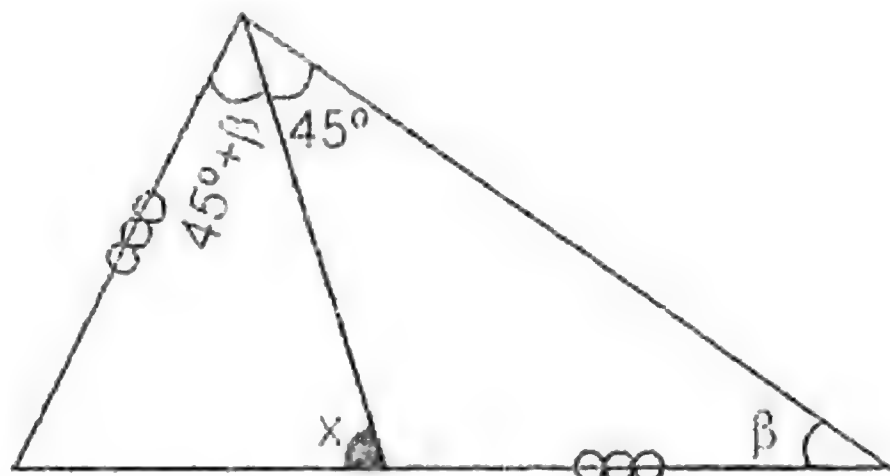
- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 25°

55. En la región interior a un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ubica el punto "P", tal que $m\angle ABP = 20^\circ$, $m\angle PBC = 80^\circ$ y $m\angle PCA = 10^\circ$. Calcular la $m\angle PAC$.

- A) 10° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 15°

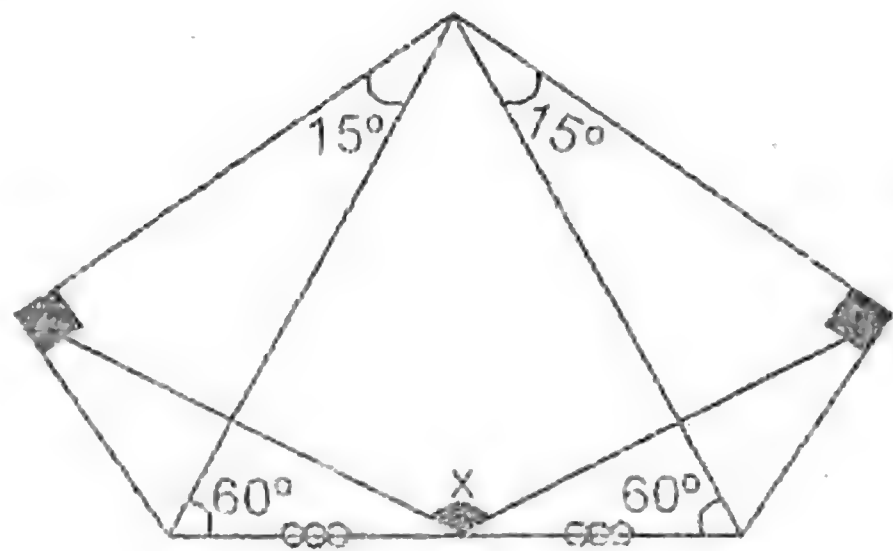
56. Calcular "x"

- A) $26^\circ 30'$
B) $71^\circ 30'$
C) 60°
D) 75°
E) $63^\circ 30'$



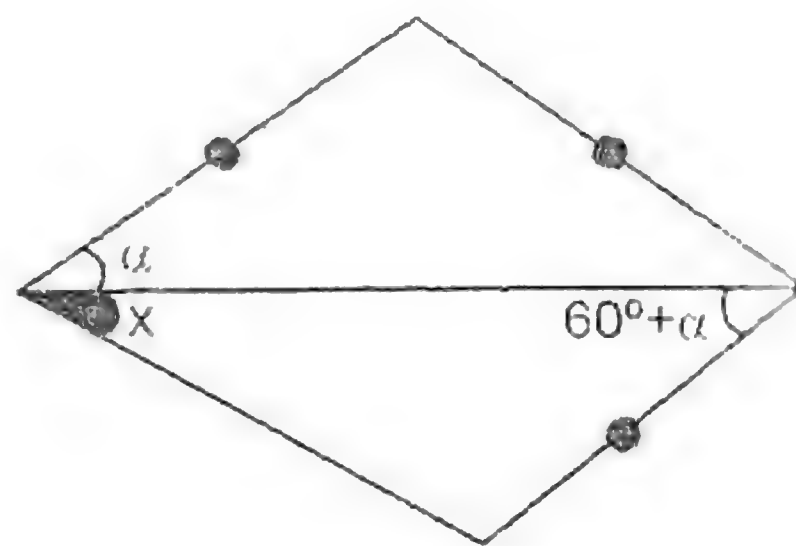
57. Calcular "x"

- A) 100°
B) 120°
C) 135°
D) 150°
E) 160°



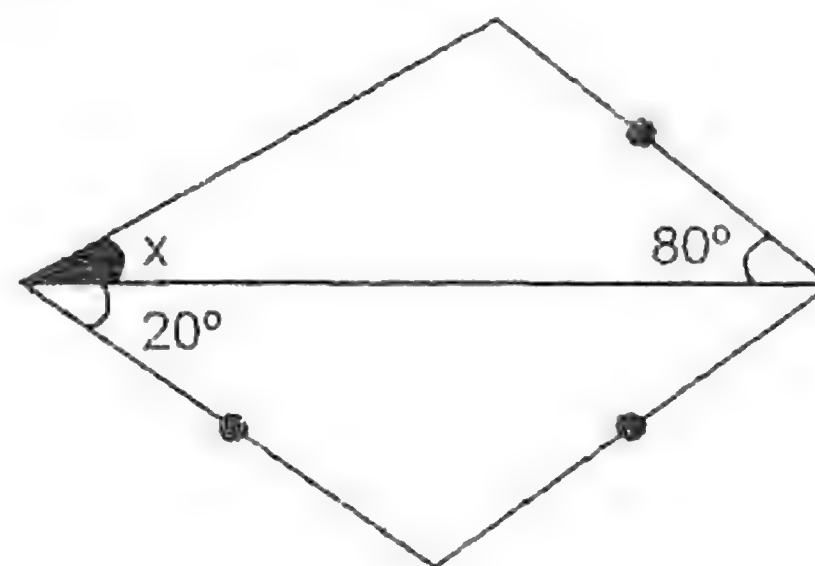
58. Calcular "α"

- A) 24°
B) $30^\circ - \alpha$
C) $60^\circ - \alpha$
D) 30°
E) 60°



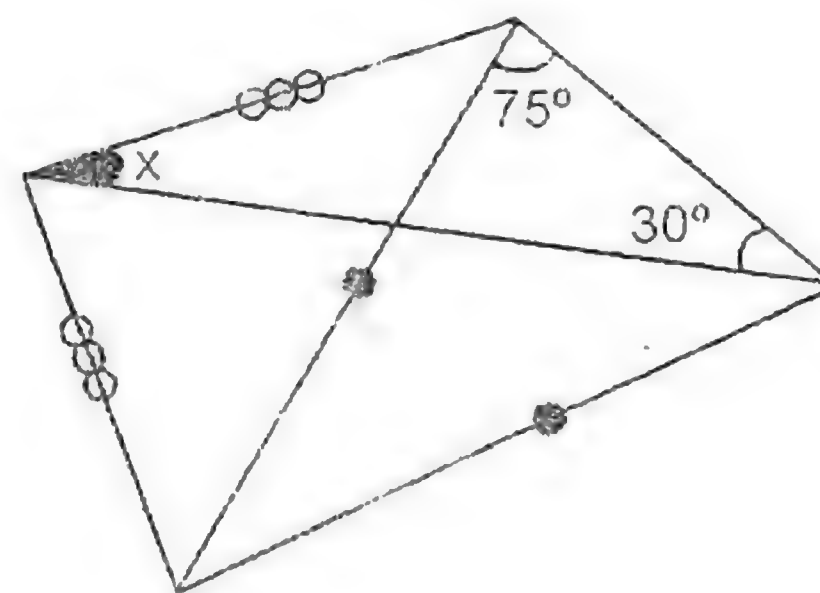
59. Calcular "x"

- A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 60°



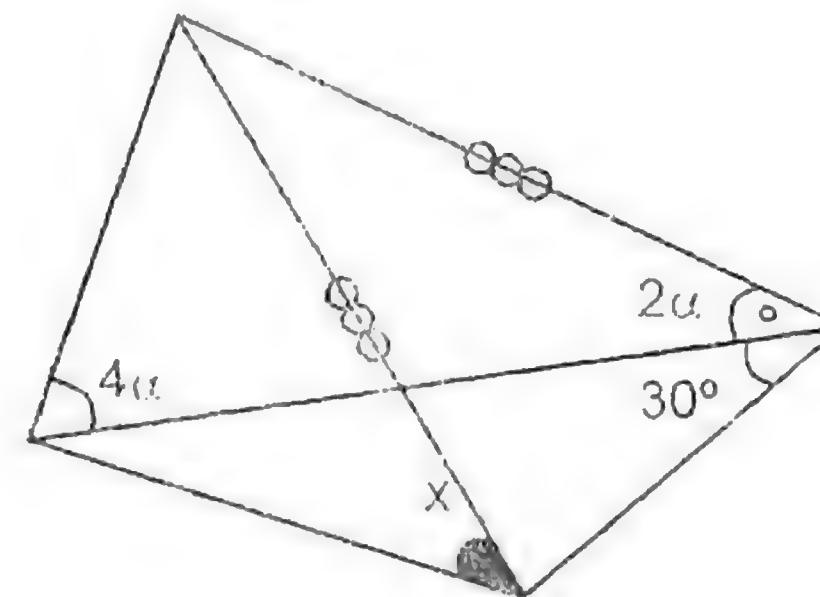
60. Calcular "x"

- A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



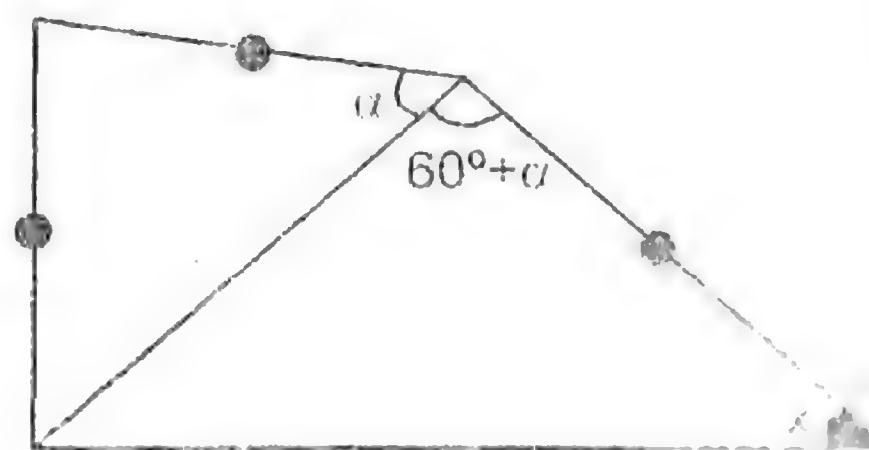
61. Calcular "x"

- A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



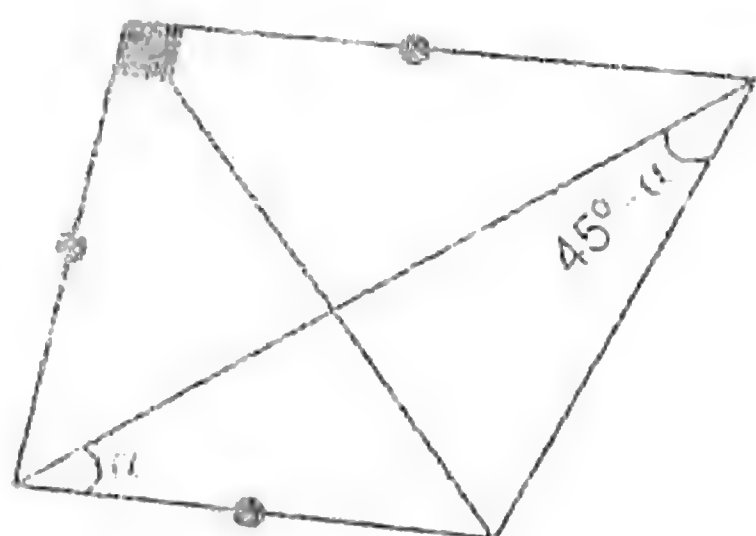
62. Calcular "x"

- A) α
B) $60^\circ - \alpha$
C) $30^\circ - \alpha$
D) $120^\circ - 2\alpha$
E) $90^\circ - \alpha$

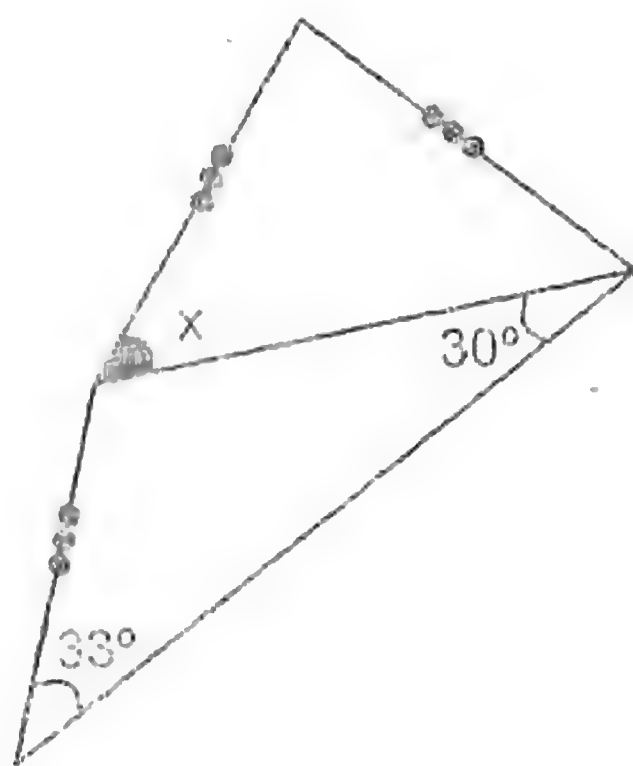


63. Calcular " α ".

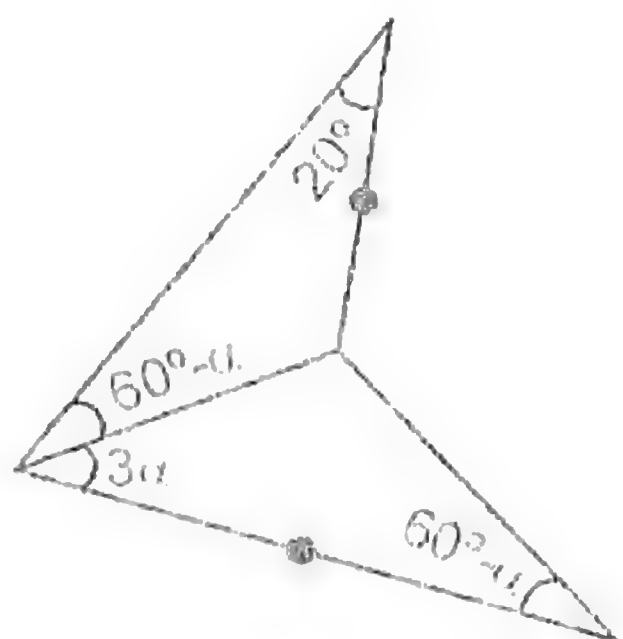
- A) 10°
 B) 12°
 C) 15°
 D) 18°
 E) 30°

64. Calcular " α ".

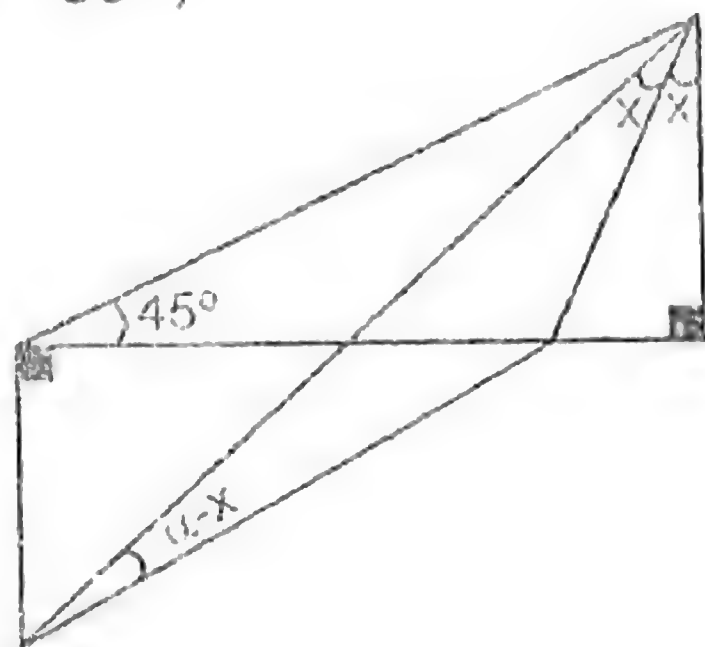
- A) 53°
 B) 57°
 C) 33°
 D) 43°
 E) 67°

65. Calcular " α ".

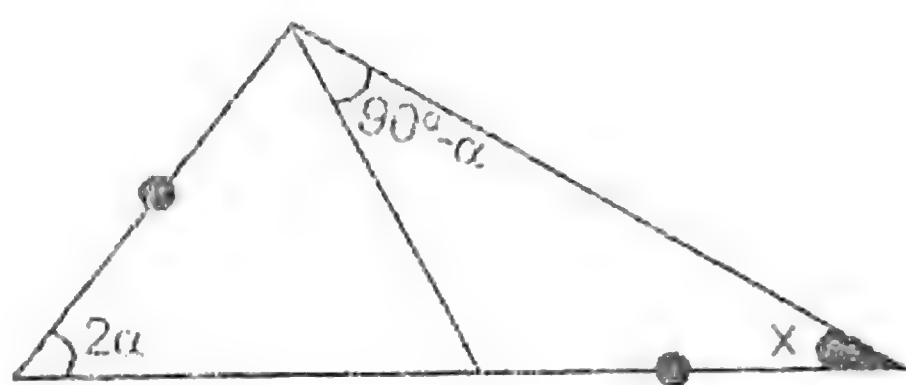
- A) $7^\circ 30'$
 B) 10°
 C) 15°
 D) 3°
 E) 30°

66. Calcular " x " ($2\alpha = 53^\circ$)

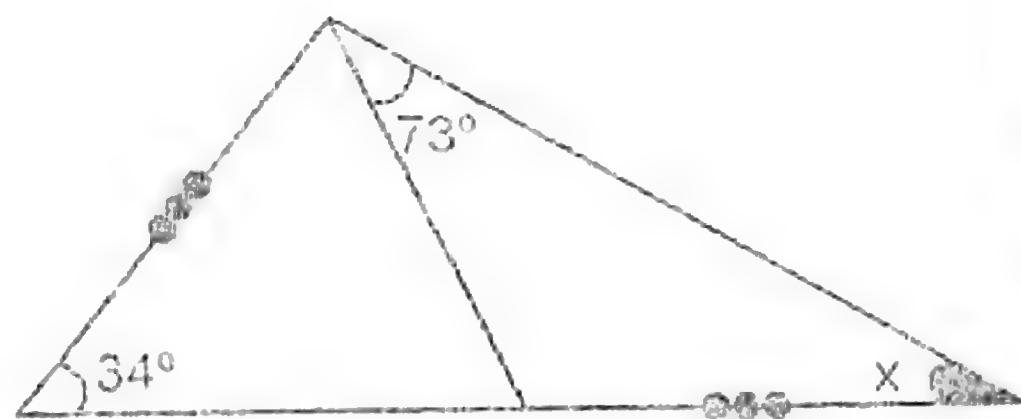
- A) 8°
 B) 14°
 C) 15°
 D) 18°
 E) $18^\circ 30'$

67. Calcular " x ".

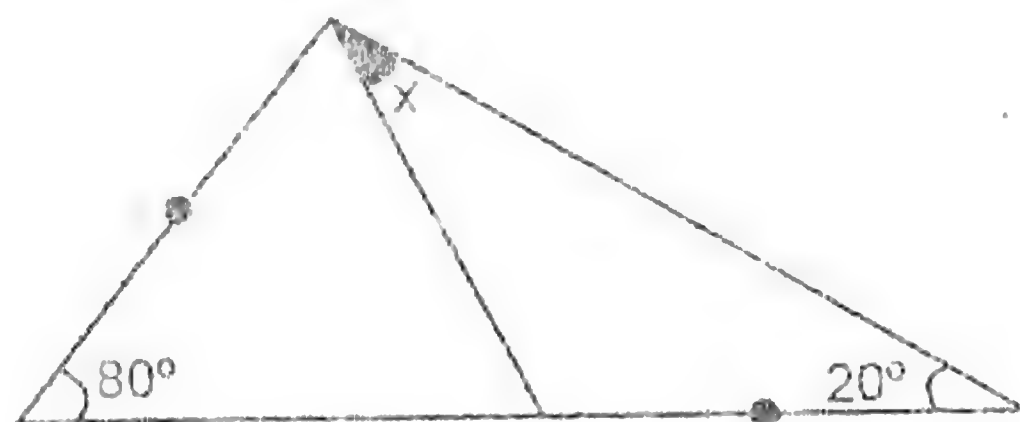
- A) 2α
 B) α
 C) $90^\circ - 2\alpha$
 D) $30^\circ - \alpha$
 E) $60^\circ - \alpha$

68. Calcular " x ".

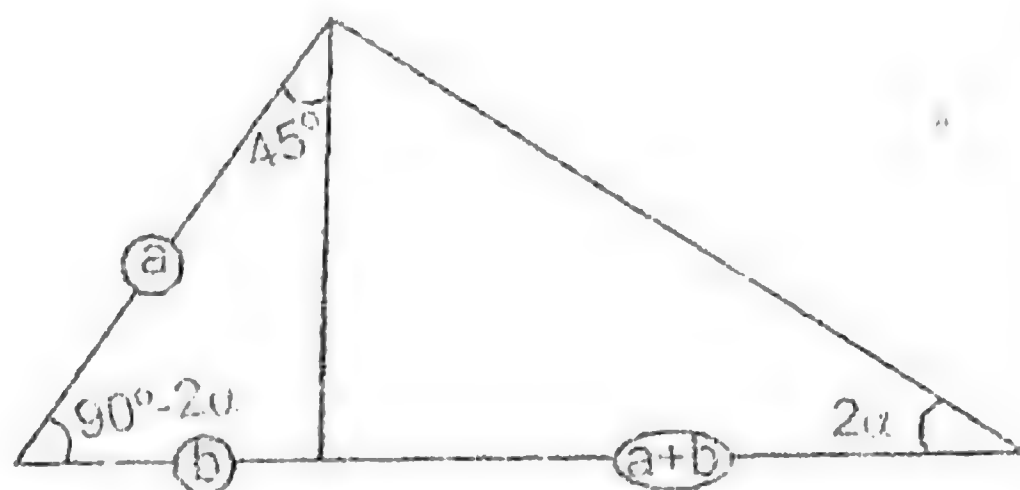
- A) 17°
 B) 34°
 C) 30°
 D) 33°
 E) 68°

69. Calcular " x ".

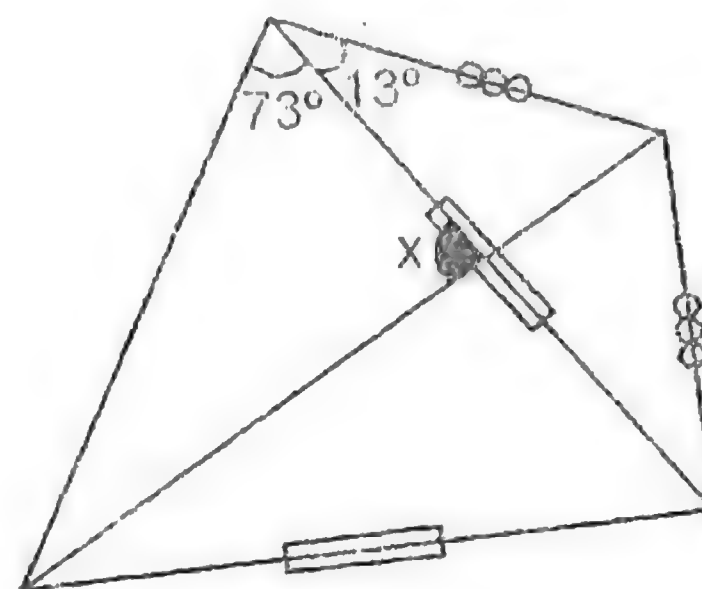
- A) 30°
 B) 25°
 C) 20°
 D) 15°
 E) 10°

70. Calcular " α ".

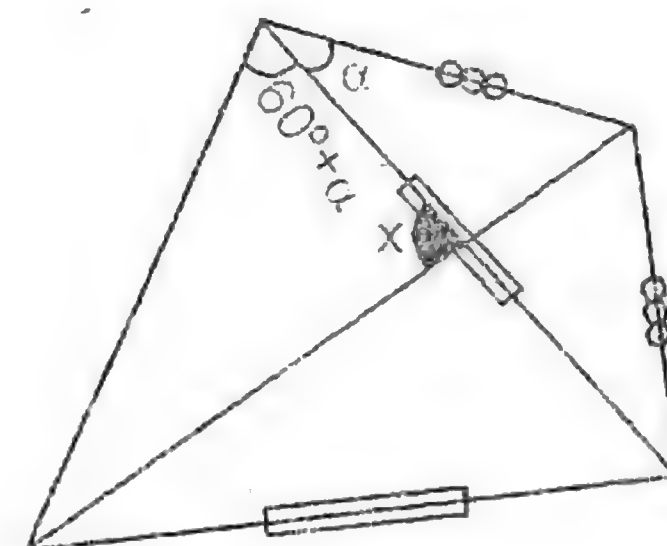
- A) 10°
 B) 12°
 C) 14°
 D) 15°
 E) 18°

71. Calcular " x ".

- A) 64°
 B) 60°
 C) 72°
 D) 84°
 E) 30°

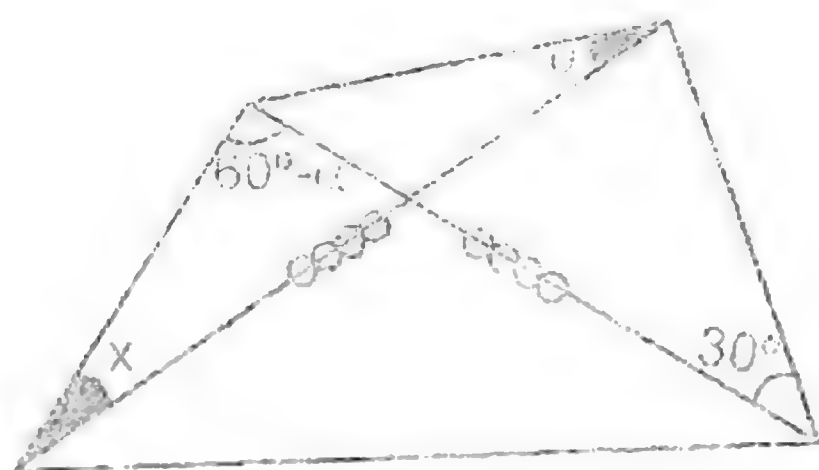
72. Calcular " x ".

- A) $90 - \alpha$
 B) $90 - 2\alpha$
 C) 30°
 D) 2α
 E) $45 - 2\alpha$



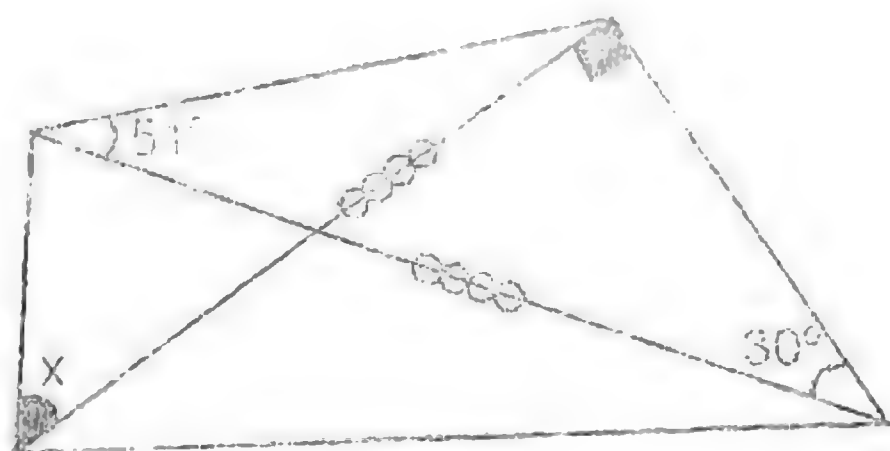
73. Calcular "x"

- A) α
- B) $30^\circ - \alpha$
- C) $60^\circ - 2\alpha$
- D) 2α
- E) 15°



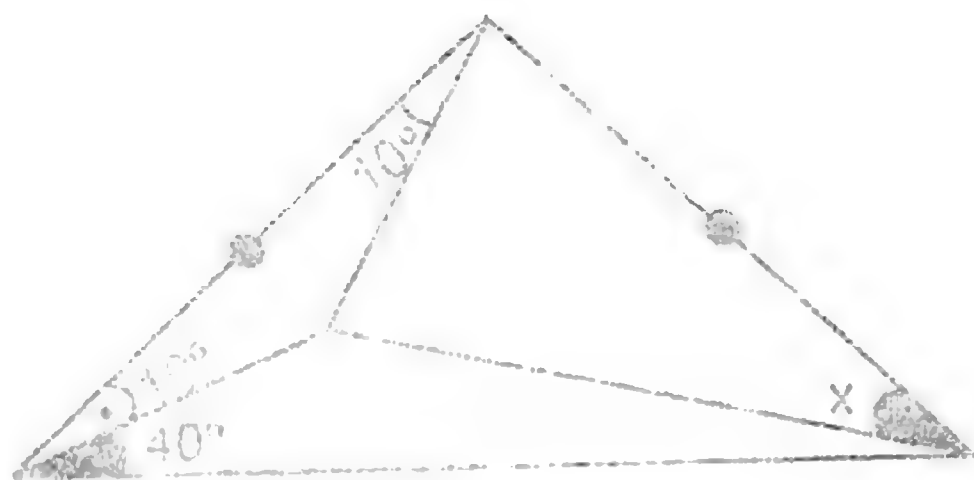
74. Calcular "x"

- A) 10°
- B) 15°
- C) 9°
- D) 35°
- E) 12°



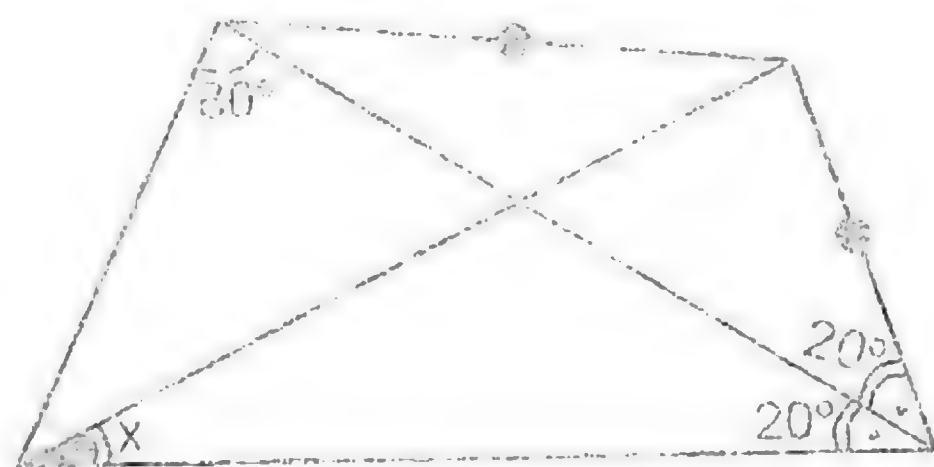
75. Calcular "x"

- A) 20°
- B) 24°
- C) 36°
- D) 40°
- E) 30°



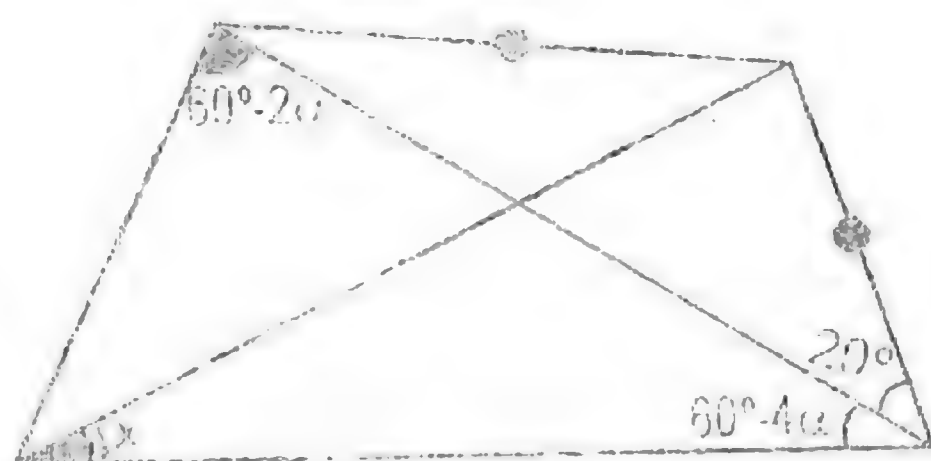
76. Calcular "x"

- A) 20°
- B) 24°
- C) 36°
- D) 40°
- E) 30°



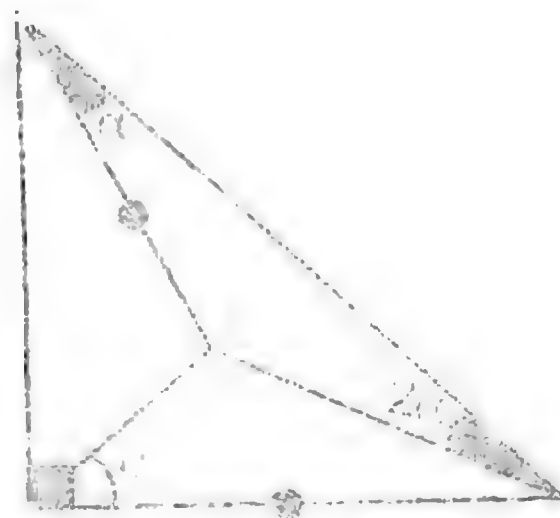
77. Calcular "x"

- A) α
- B) 2α
- C) $60^\circ - \alpha$
- D) $30^\circ + \alpha$
- E) 30°



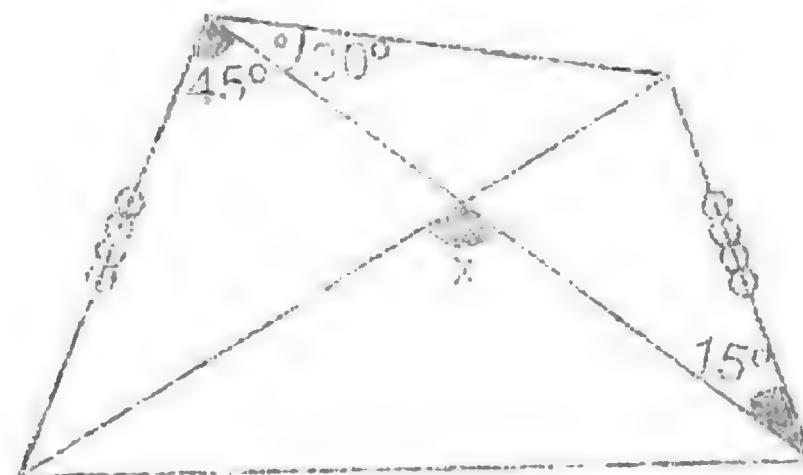
78. Calcular "α"

- A) 10°
- B) 15°
- C) $20^\circ 30'$
- D) $18^\circ 30'$
- E) 18°



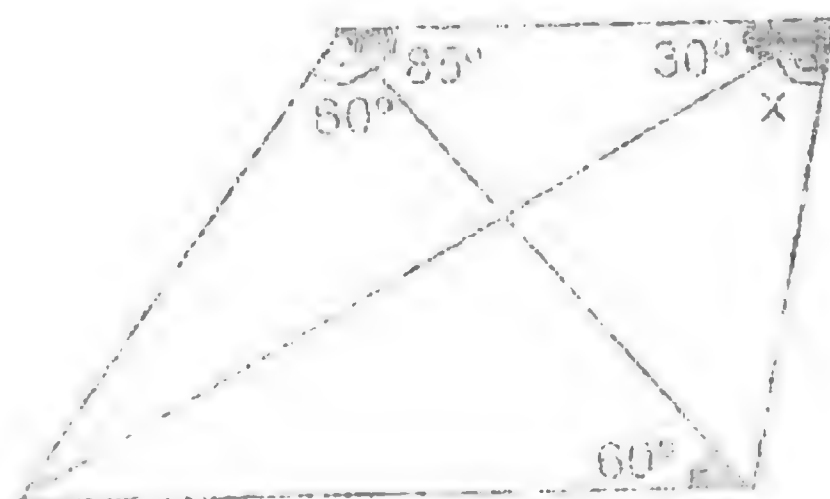
79. Calcular "x"

- A) 60°
- B) 90°
- C) 45°
- D) 37°
- E) 75°



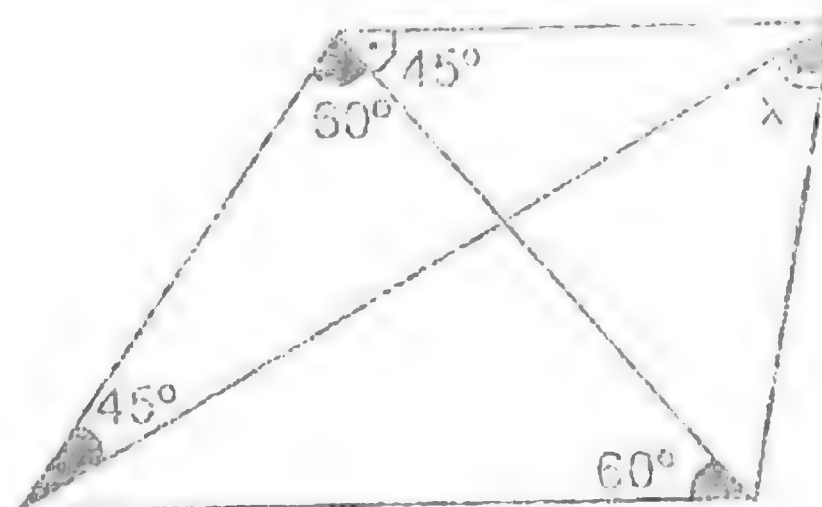
80. Calcular "x"

- A) 30°
- B) 55°
- C) 60°
- D) 65°
- E) 50°



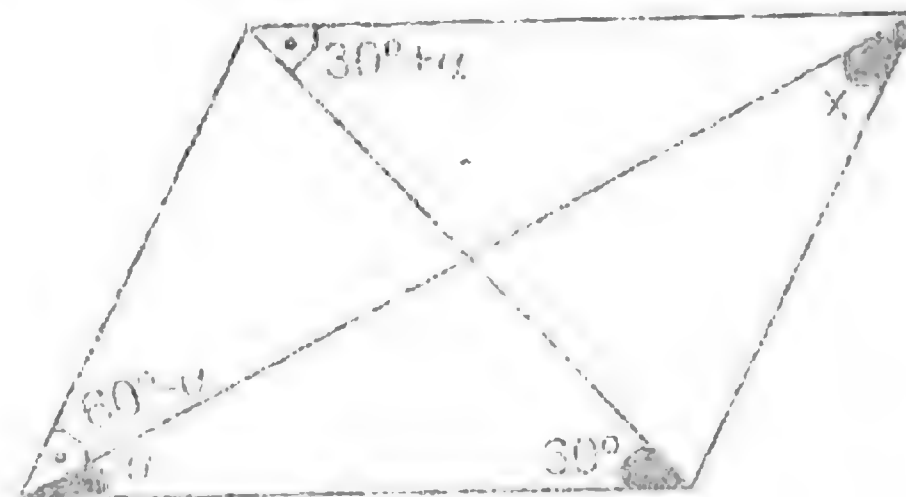
81. Calcular "x"

- A) 15°
- B) 18°
- C) 20°
- D) 24°
- E) 30°



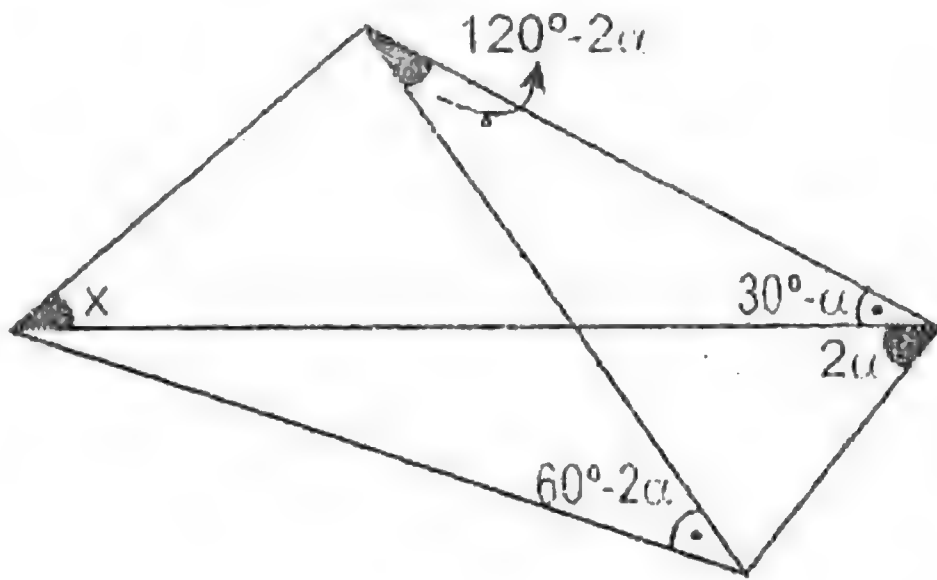
82. Calcular "x"

- A) α
- B) $30^\circ - \alpha$
- C) $15^\circ + \alpha$
- D) $30^\circ + \alpha$
- E) 2α



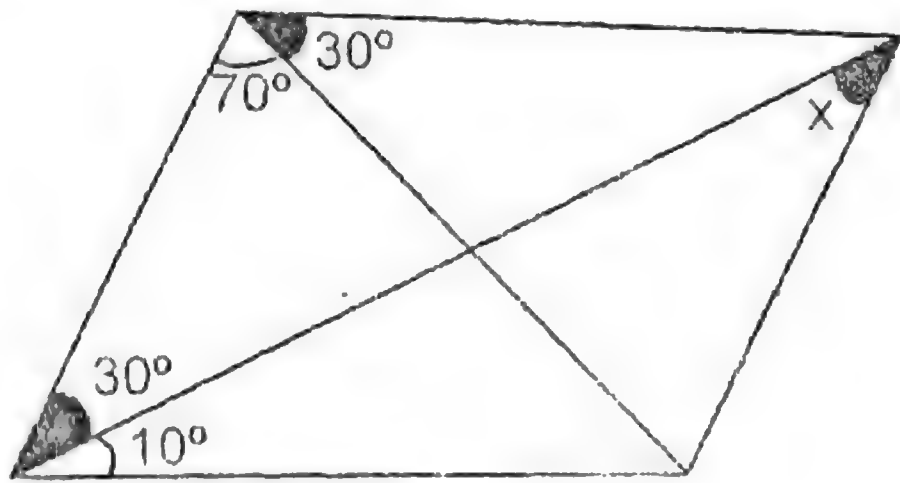
83. Calcular "x"

- A) $60^\circ - \alpha$
 B) 15
 C) $30^\circ + \alpha$
 D) $30^\circ - \alpha$
 E) 30



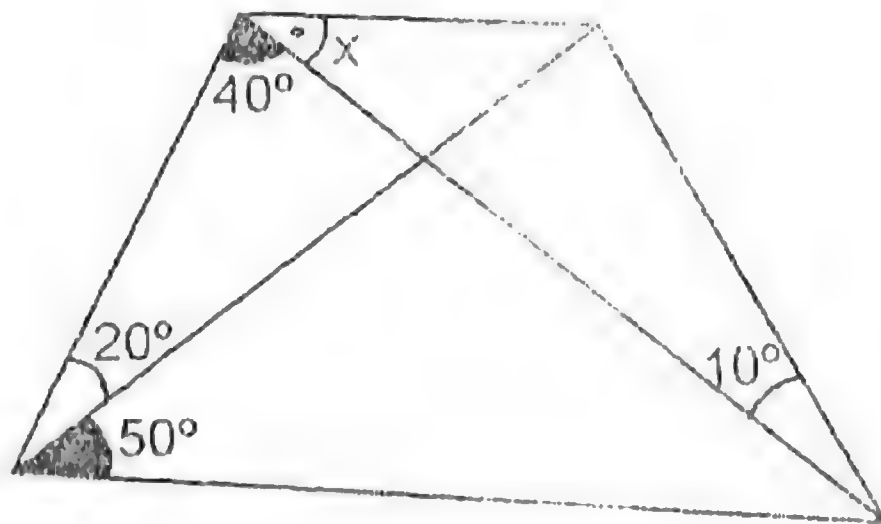
84. Calcular "x"

- A) 30°
 B) 20°
 C) 10°
 D) 18°
 E) 32°



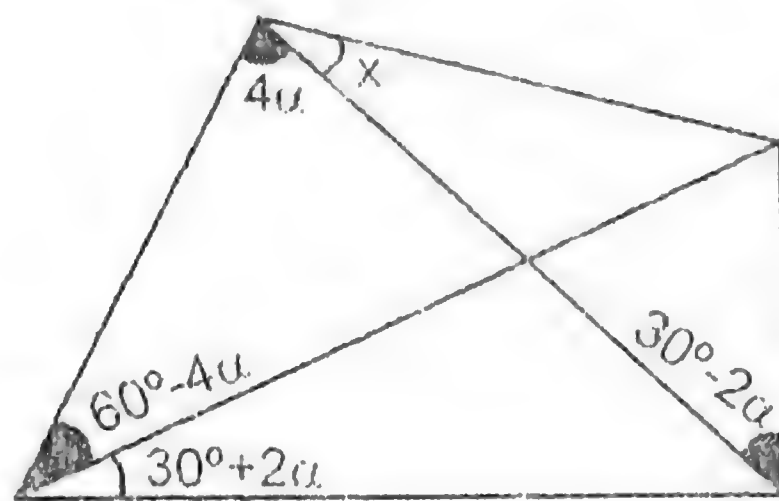
85. Calcular "x"

- A) 20°
 B) 30°
 C) 36°
 D) 40°
 E) 10°



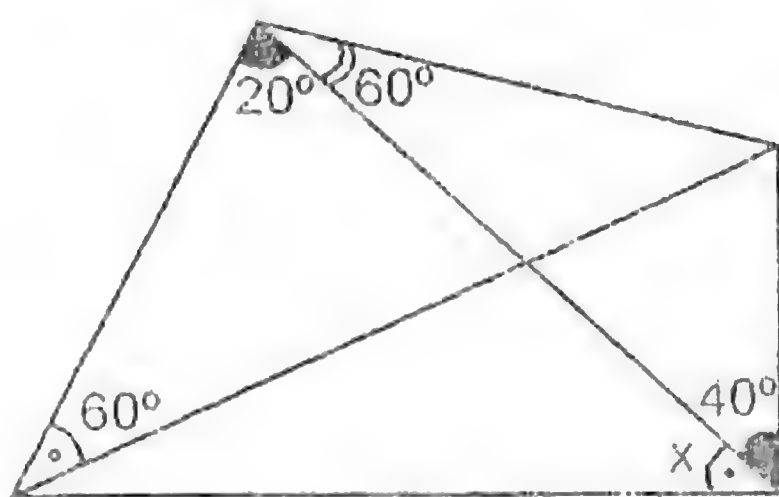
86. Calcular "x"

- A) α
 B) 2α
 C) $30^\circ - \alpha$
 D) $60^\circ - \alpha$
 E) $30^\circ - 2\alpha$



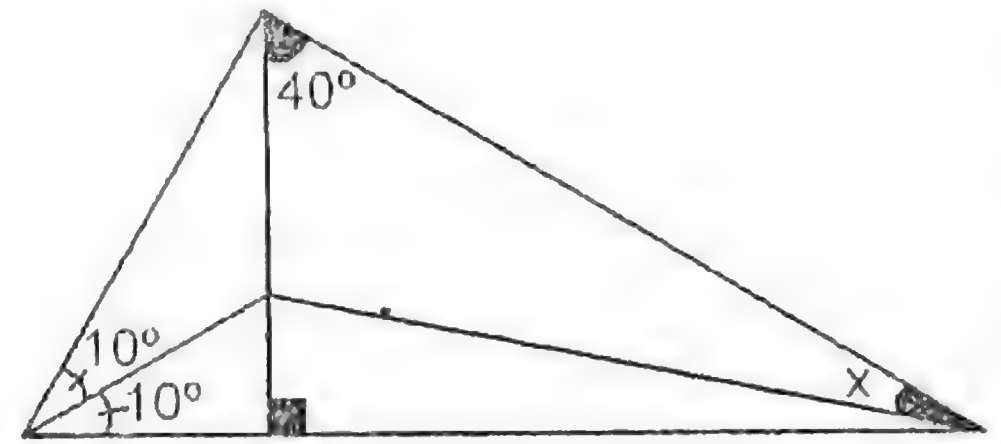
87. Calcular "x"

- A) 18°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 35°
 E) 40°



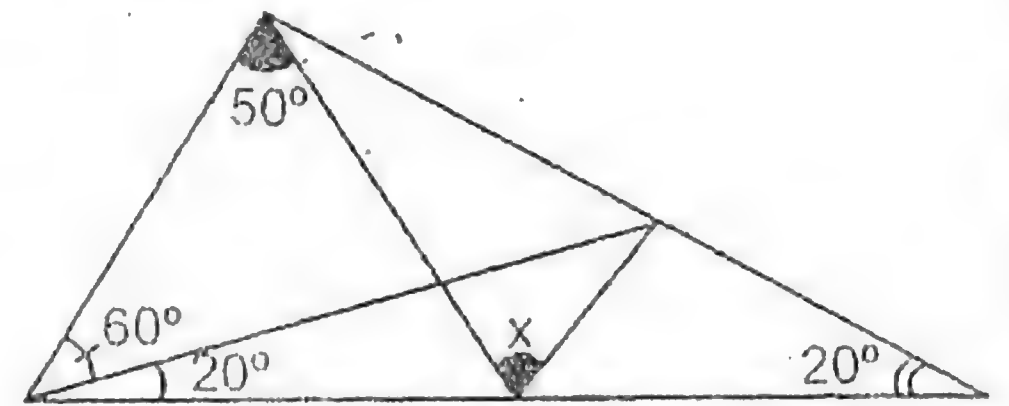
88. Calcular "x"

- A) 10°
 B) 18°
 C) 20°
 D) 24°
 E) 30°



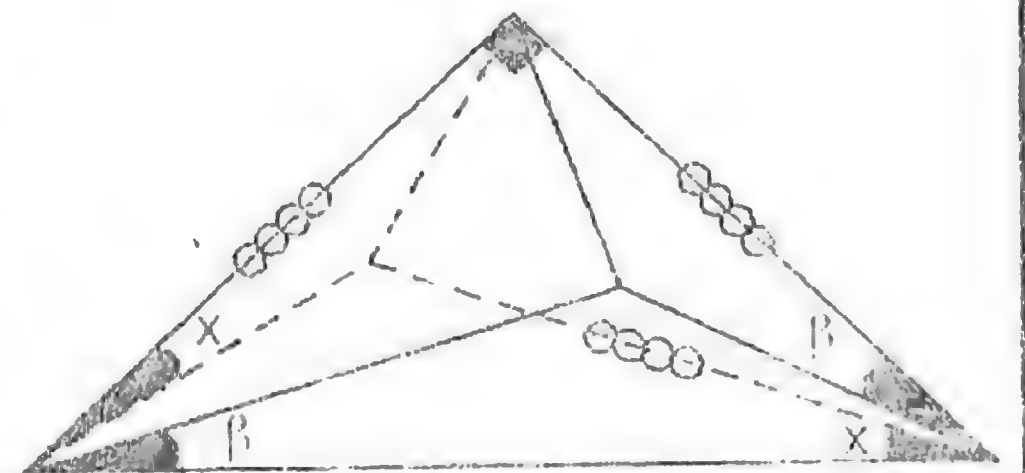
89. Calcular "x"

- A) 40°
 B) 50°
 C) 60°
 D) 70°
 E) 80°



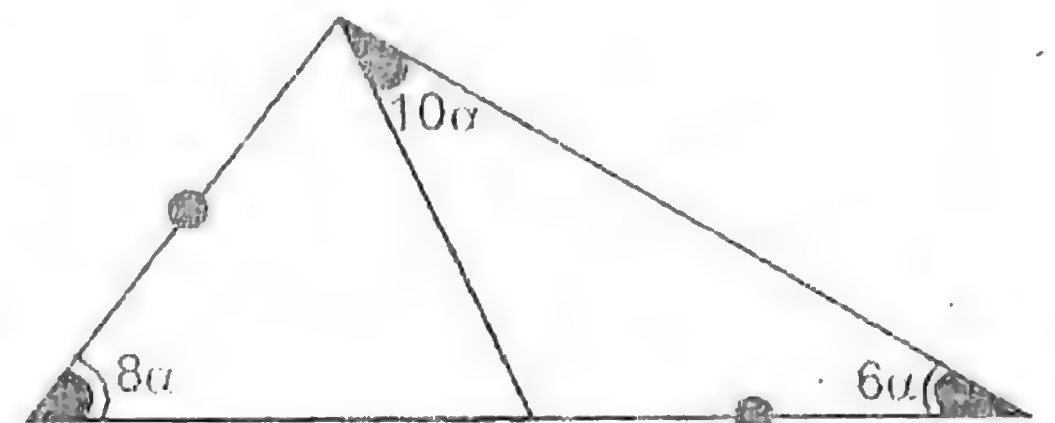
90. Calcular "x"

- A) 30°
 B) 18°
 C) 15°
 D) $18^\circ 30'$
 E) $22^\circ 30'$



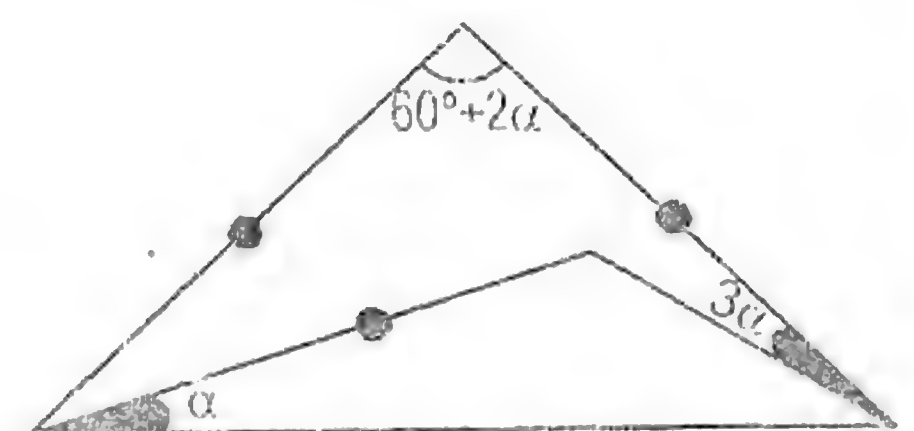
91. Calcular "α"

- A) 3°
 B) 4°
 C) 5°
 D) 6°
 E) 7°



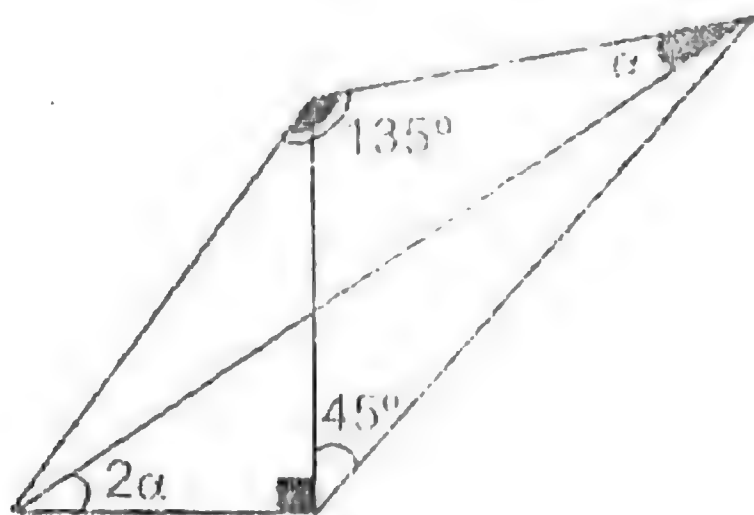
92. Calcular "α"

- A) 6°
 B) $6^\circ 30'$
 C) 7°
 D) $7^\circ 30'$
 E) 8°



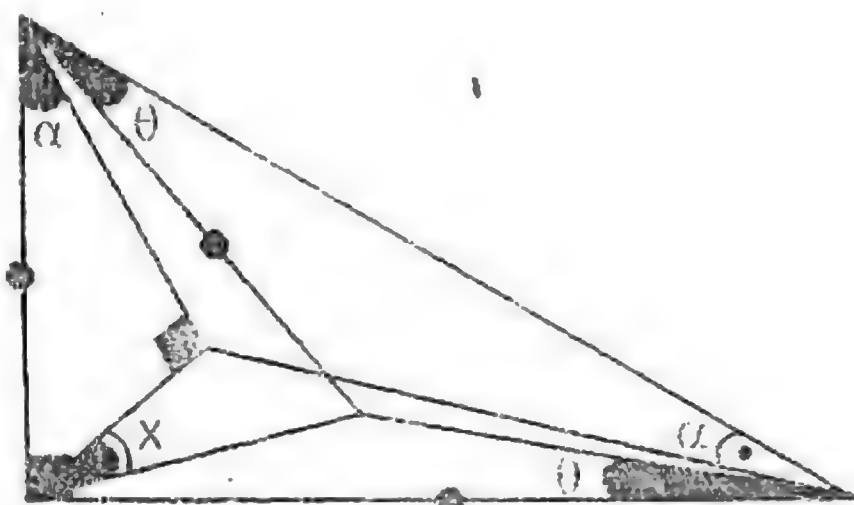
93. Calcular " α "

- A) 12°
- B) $18^\circ 30'$
- C) 15°
- D) 20°
- E) $22^\circ 30'$



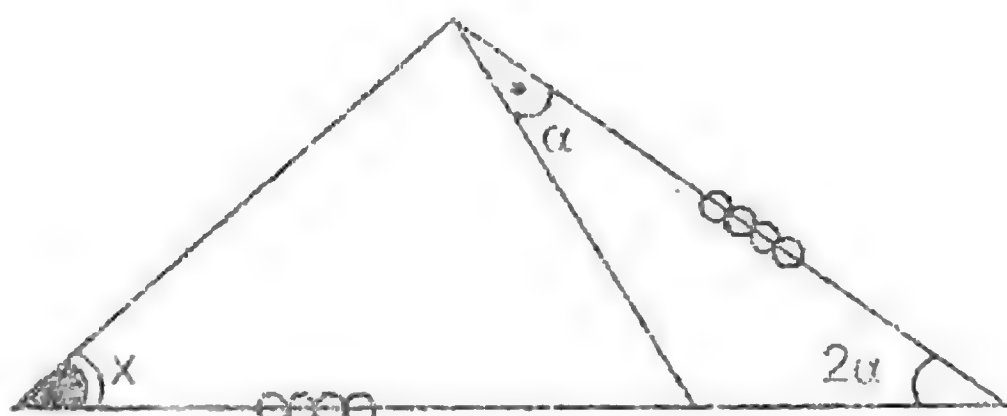
94. Calcular " x "

- A) 10°
- B) $11^\circ 30'$
- C) 12°
- D) 15°
- E) 23°



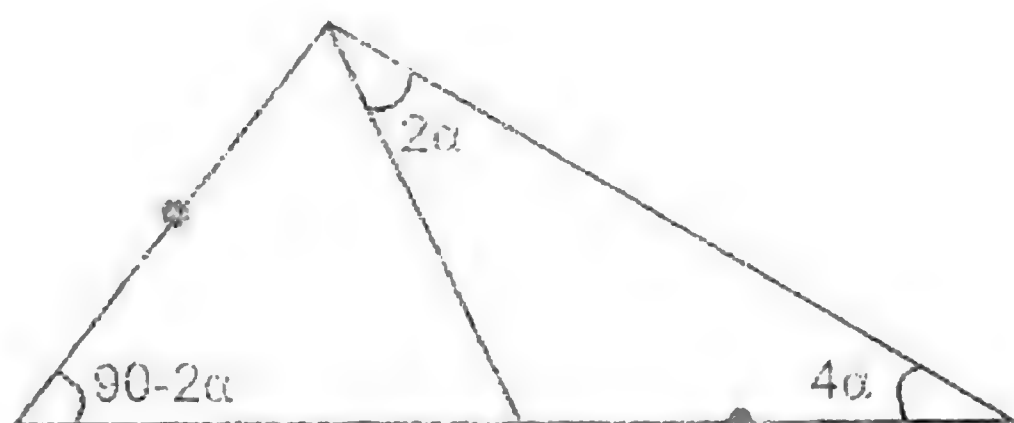
95. Calcular " x "

- A) 15°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



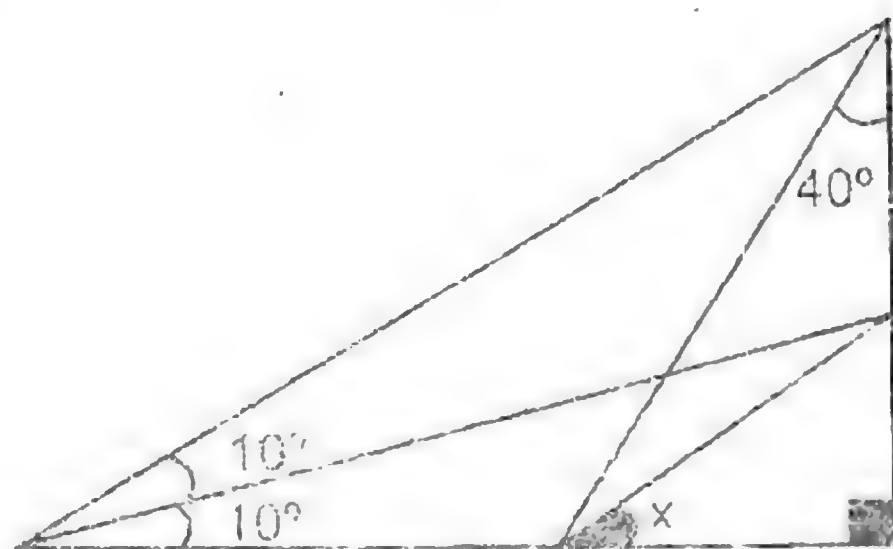
96. Calcular " α "

- A) 5°
- B) 6°
- C) 8°
- D) 10°
- E) 12°



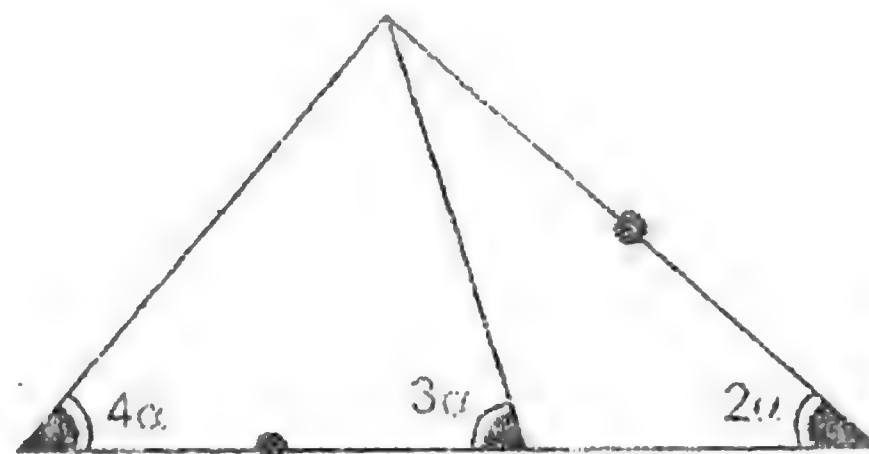
97. Calcular " x "

- A) 18°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 36°
- E) 40°



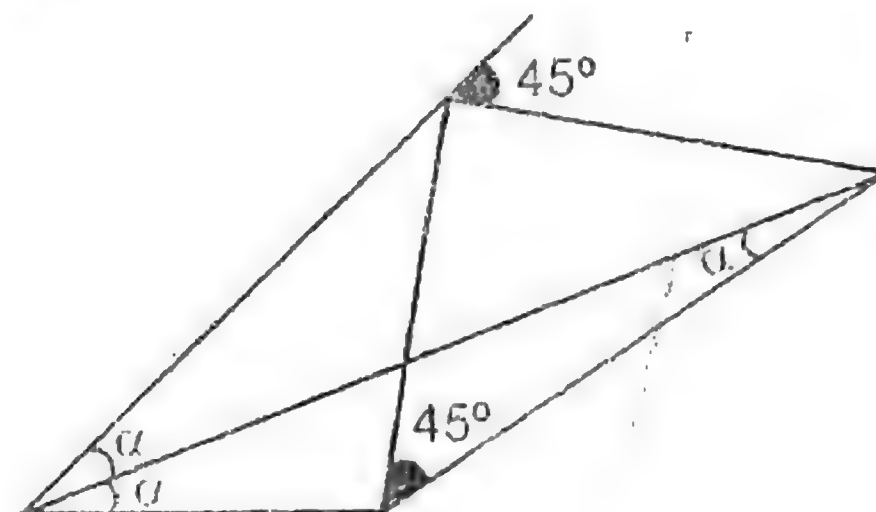
98. Calcular " α "

- A) 5°
- B) 8°
- C) 9°
- D) 10°
- E) 12°



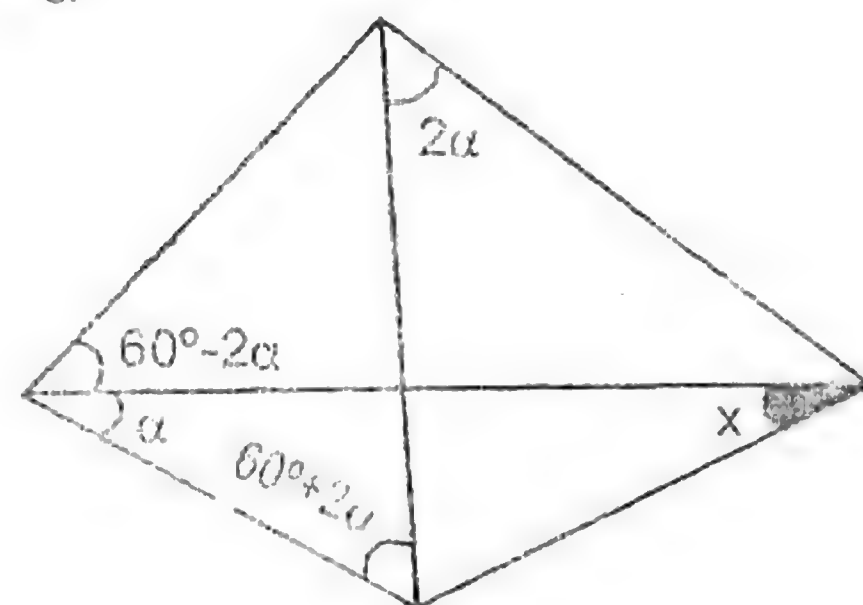
99. Calcular " α "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 15°
- E) 18°



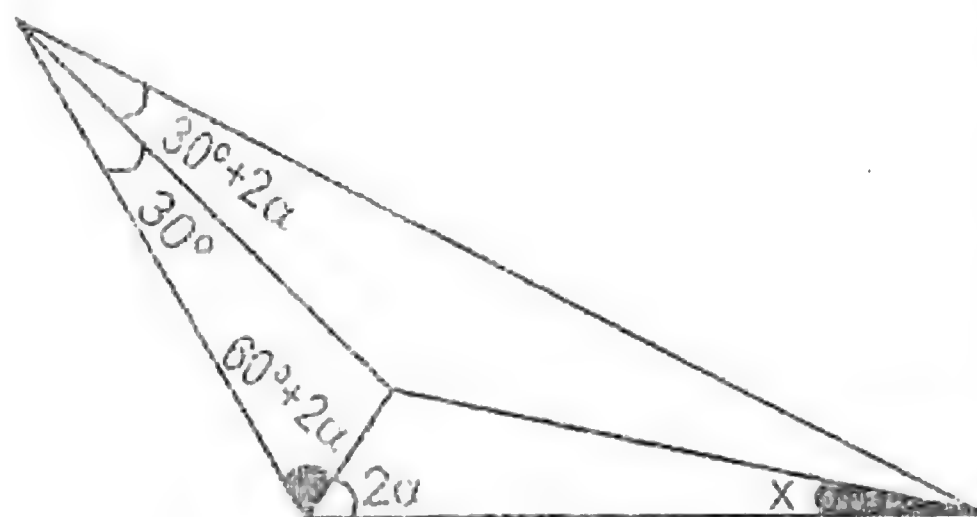
100. Calcular " α "

- A) 15°
- B) 18°
- C) 24°
- D) 30°
- E) 45°



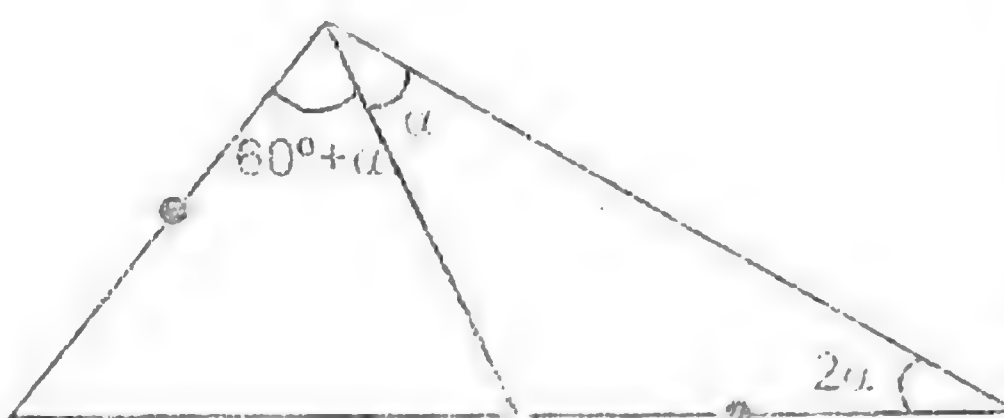
101. Calcular " α "

- A) α
- B) 2α
- C) $30^\circ - \alpha$
- D) $60^\circ - \alpha$
- E) 10°



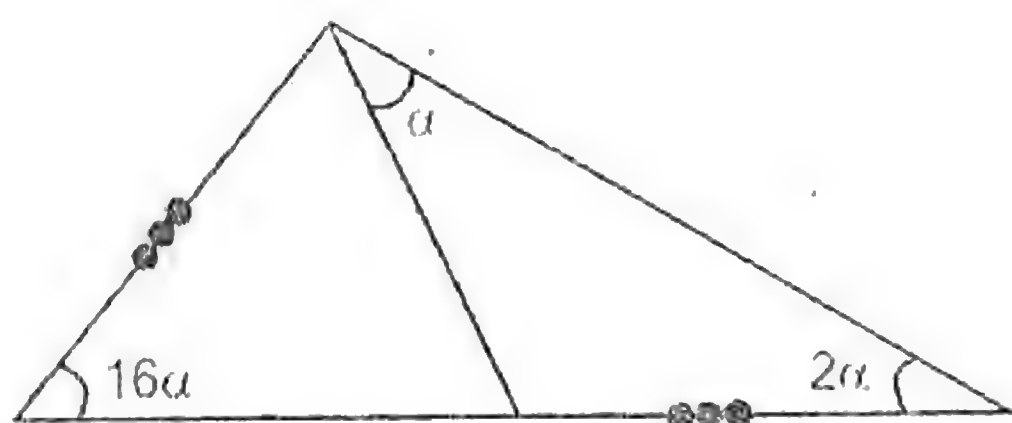
102. Calcular " α "

- A) 10°
- B) 8°
- C) 5°
- D) 15°
- E) 20°



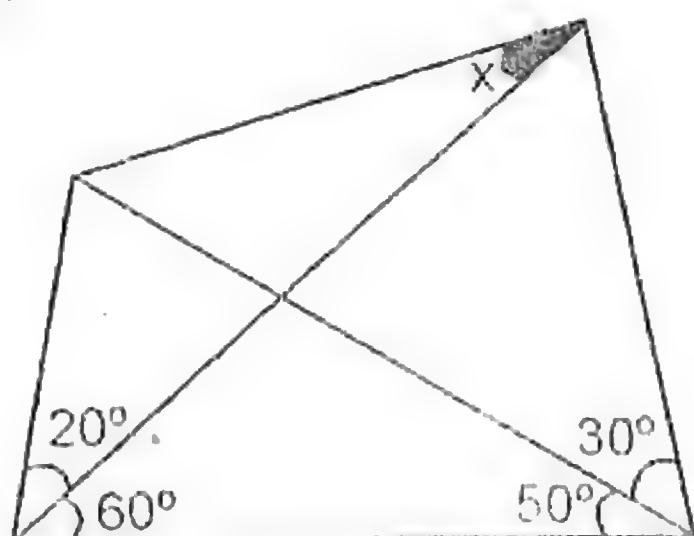
103. Calcular " α "

- A) 3°
- B) 4°
- C) 5°
- D) 6°
- E) 9°



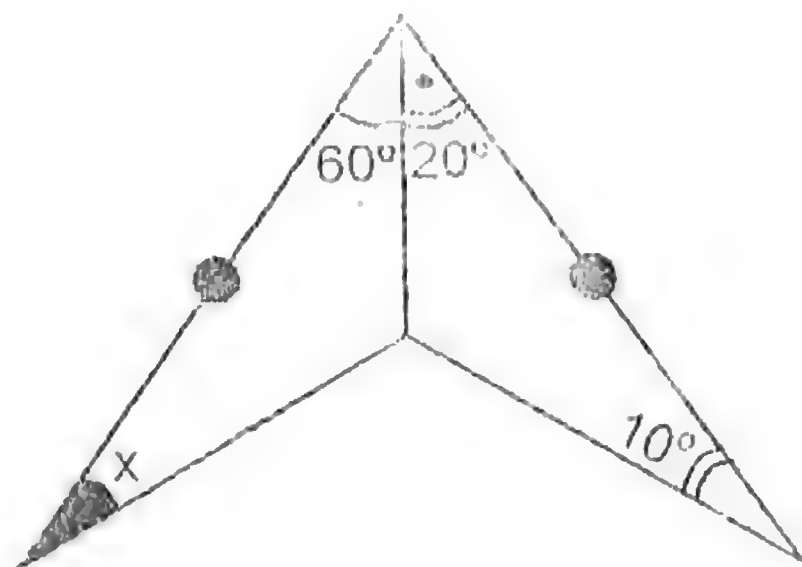
104. Calcular " x "

- A) 36°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 24°
- E) 60°



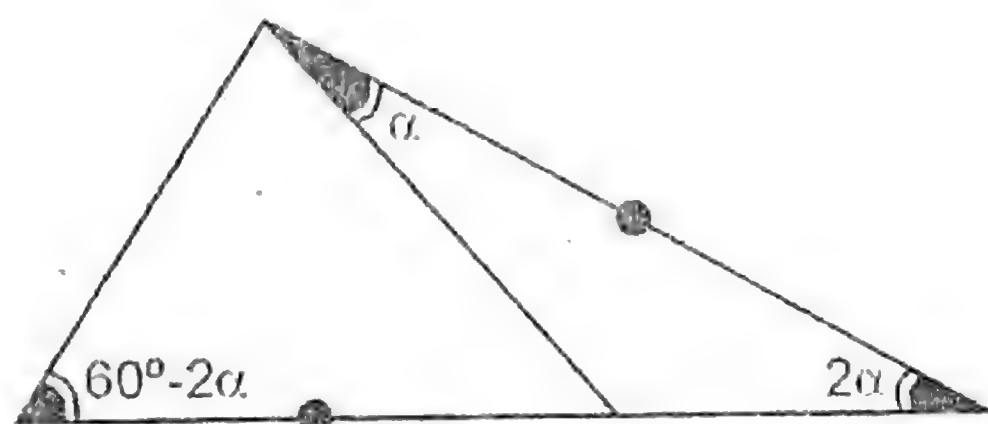
105. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 12°
- C) 14°
- D) 18°
- E) 20°



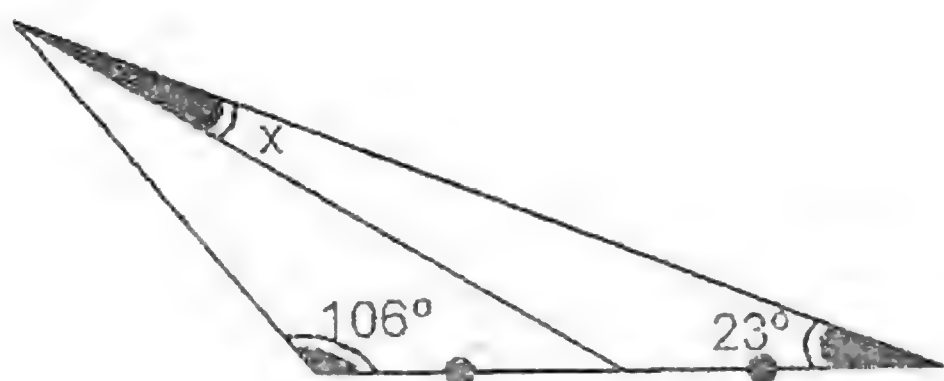
106. Calcular " α "

- A) 5°
- B) 9°
- C) 10°
- D) 12°
- E) 15°



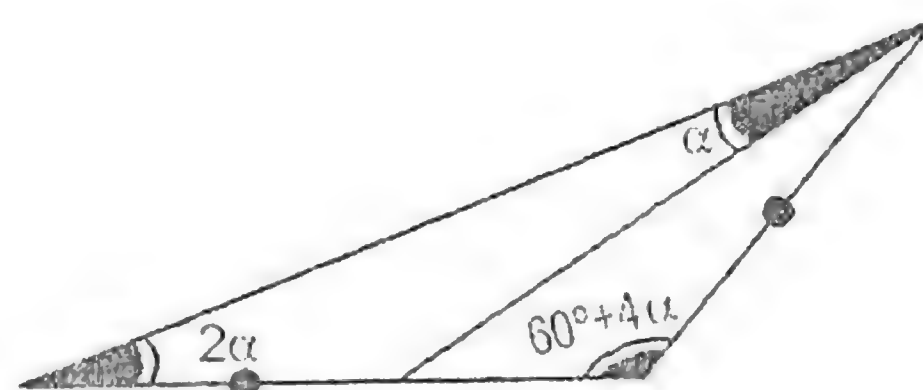
107. Calcular " x "

- A) 10°
- B) 14°
- C) 16°
- D) 20°
- E) 37°



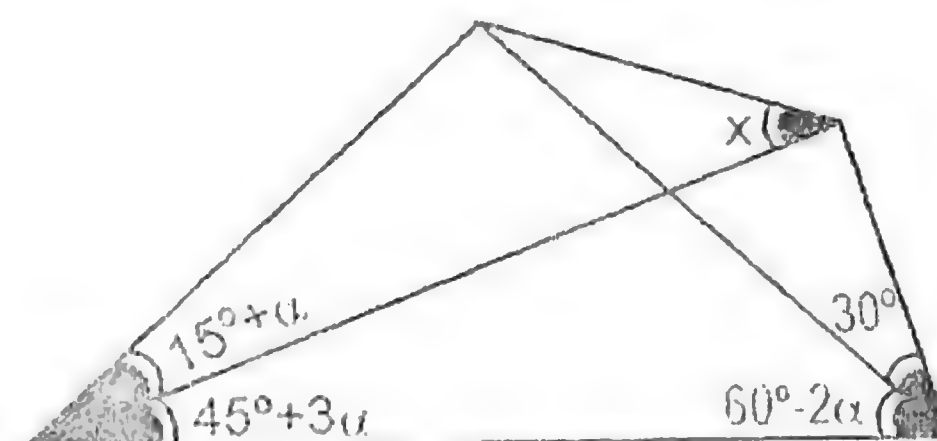
108. Calcular " α "

- A) 9°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 14°
- E) 15°



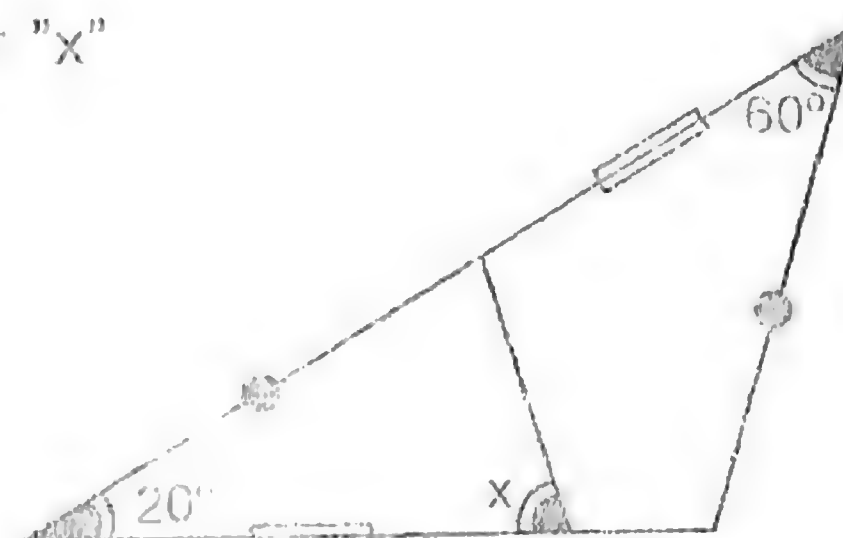
109. Calcular " x "

- A) 15°
- B) 18°
- C) 23°
- D) 30°
- E) 39°



110. Calcular " x "

- A) 20°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 36°
- E) 40°



MUJER

Eres la razón de la hermosura
Axioma de mujer y dulzura
creada por la ley divina
la diosa que me fascina.

Eres la obra perfecta
del más sabio geómetra
quien con finos trazos
ingenió; la más bella silueta.

Eres un teorema de amor, alucinante
que lo difícil no es demostrarte,
sino conquistarte,
donde la solución requiere; belleza y arte.

Sólo un genio puede conocerte
y plasmar con su compás ardiente
en una esfera transparente
tus curvas en el futuro y en el presente.

Venero al Dios del universo
con este humilde verso
que con sus manos de aurora
moldeó a tan maravillosa criatura.

MBarcena

Humor Matemático

1. Distintos puntos de vista :

* A la pregunta: $2 + 2 = \dots\dots\dots?$

entonces responden:

El ingeniero : 3,9968743

El físico: $4,000,0000004 \pm 0,000\ 000\ 000\ 6$

El matemático: esperen, sólo unos minutos más, ya he probado que la solución existe y es única, ahora la estoy acotando...

El filósofo: ¿qué quiere decir $2+2$?

El lógicó: Defina mejor $2+2$ y le responderé.

* A la pregunta:

2. ¿Cómo se calcula el volumen de una vaca?

El Ingeniero: Metemos la vaca dentro de una gran cuba de agua y la diferencia de volumen es la de la vaca.

El matemático: Parametrizamos, la superficie de la vaca y se calcula el volumen mediante una integral triple.

El físico: Supongamos que la vaca es esférica

3. Para los que saben química:

¿Por qué los osos blancos se disuelven en agua?

- porque son polares

¿Qué hace un electrón cuando cae al suelo?

- Plank

Chistes Matemáticos

1. Estaba Jesús predicando en el monte Sinaí, cuando comento a sus discípulos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

¿y eso es? Dijo uno de los discípulos.

A lo que Jesús respondió : ¡una parábola!

2. ¿Qué es un niño complejo?

Un niño con la madre real y el padre imaginario

3. ¿Qué es un oso polar?

Un oso rectangular, después de un cambio de coordenadas.

4. ¿Qué le dice la curva a la tangente?

¡No me toques!

5. ¿Te gusta los polinomios?

Pero, sólo hasta cierto grado

6. ¿Por qué se suicidó el libro de matemática?

Porque tenía demasiados problemas.

7. Un estadístico podría meter su cabeza en un horno y sus pies en hielo, y decir que en promedio se encuentra bien.

8. Va e^x por la calle y se le cruza un integrador, el cual, todo prepotente, le dice: "¡a que te integro!" y e^x le contesta: "Y a mí que".

9. Un médico, un abogado y un matemático están hablando de si tener una esposa o novia. Empieza el abogado : "obviamente, lo mejor es tener una novia; porque divorciarte de tu mujer puede ser muy difícil, en cambio, en cambio cortar con una novia es fácil". El doctor dice: ¡No estoy de acuerdo, esta claro que el tener una mujer te evita el estrés y mejora tu salud". A lo que el matemático señala: "lo mejor es tener a los dos; así consigues que la esposa crea que estas con la otra, la otra crea que estas con la esposa, y mientras tanto tu puedes trabajar tranquilo en la matemática.

CLAVES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

| Nº | | Nº | | Nº | | Nº | | Nº | |
|----|---|----|---|----|---|----|---|-----|---|
| 1 | C | 23 | C | 45 | B | 67 | A | 89 | E |
| 2 | C | 24 | D | 46 | D | 68 | B | 90 | A |
| 3 | D | 25 | B | 47 | A | 69 | E | 91 | C |
| 4 | B | 26 | C | 48 | D | 70 | D | 92 | D |
| 5 | B | 27 | A | 49 | C | 71 | A | 93 | B |
| 6 | C | 28 | C | 50 | B | 72 | B | 94 | B |
| 7 | D | 29 | E | 51 | C | 73 | A | 95 | C |
| 8 | A | 30 | A | 52 | C | 74 | C | 96 | A |
| 9 | B | 31 | C | 53 | D | 75 | C | 97 | C |
| 10 | C | 32 | E | 54 | B | 76 | E | 98 | D |
| 11 | C | 33 | A | 55 | D | 77 | E | 99 | D |
| 12 | A | 34 | A | 56 | B | 78 | C | 100 | D |
| 13 | C | 35 | D | 57 | D | 79 | E | 101 | B |
| 14 | C | 36 | B | 58 | B | 80 | B | 102 | A |
| 15 | D | 37 | C | 59 | B | 81 | A | 103 | C |
| 16 | D | 38 | B | 60 | C | 82 | A | 104 | B |
| 17 | C | 39 | C | 61 | D | 83 | E | 105 | E |
| 18 | C | 40 | A | 62 | E | 84 | A | 106 | C |
| 19 | B | 41 | A | 63 | C | 85 | A | 107 | B |
| 20 | C | 42 | C | 64 | B | 86 | B | 108 | B |
| 21 | A | 43 | D | 65 | C | 87 | C | 109 | D |
| 22 | C | 44 | C | 66 | B | 88 | C | 110 | A |



REFLEXIÓN

Toda está en el estado mental;
Porque muchas carreras se han perdido
Antes de haberse corrido;
Y muchos cobardes han fracasado;
Antes de haber su trabajo empezado.
Piensa en grande y tus hechos crecerán.
Piensa en pequeño, y quedarás atrás;
Piensa que puedes y podrás;
Todo está en el estado mental.



Handwritten signature and date: 10/10/17